

强耦合杨-米尔斯理论中的对偶超导真空*

贾多杰^{1,2;1)} 艾德臻¹

1 (西北师范大学物理与电子工程学院理论物理研究所 兰州 730070)

2 (中国科学技术大学交叉科学理论研究中心 合肥 230026)

摘要 基于联络分解变量的紫外/红外分离, 提出杨-米尔斯理论真空的强耦合极限表现为一个经典场论意义下色空间的黑洞. 基于此想法, 证明在强耦合杨-米尔斯理论中存在对偶超导体解. 在量子水平下, 强耦合理论的非微扰真空可由磁荷的多粒子体系构成, 而理论的经典平均给出对偶阿贝尔-黑格斯模型. 该模型预言了与最近的格点模拟相一致的结果: 理论真空位于第一类与第二类超导体边界. 进一步通过求解对偶阿贝尔-黑格斯模型讨论了色电场的对偶迈斯纳效应.

关键词 杨-米尔斯理论 对偶超导 黑洞 对偶迈斯纳效应

1 引言

人们已知, 杨-米尔斯(YM)理论在能级极限下是渐进自由的, 因而可用微扰法求解. 但在低能区域, 传统的微扰方法由于理论的强耦合特征而不再适用, 必须求助于非微扰数学方法, 如格点场论方法和Sum Rule方法等. 其中格点场论方法被视为是最为精确的非微扰方法而受到关注. 而另外的一种唯象方法, 即对偶超导模型^[1, 2], 因得到格点场论计算的支持, 仍是人们研究的对象之一. 对偶超导的思想提出较早但由于磁荷的稳定性问题而未受到进一步的关注. 最近, 联络分解方法的研究^[3]和稳定的磁单极解的发现^[4]表明, YM理论在原则上不排斥对偶超导机制.

对偶超导体图像的格点计算研究表明^[5], 单极凝聚机制在极大阿贝尔规范和伦敦规范下的胶子动力学中的确存在^[6, 7]. 进一步的计算表明^[8], YM理论的真空类型介于第一类和第二类超导体的边界之间. 这些计算对完全的格点理论和有效对偶阿贝尔-黑格斯(AH)模型进行了详细比较^[9], 并为长距胶子动力学的对偶超导图像提供了有力的支持.

但严格的说, 对偶超导体图像, 尤其是图像中磁单极的角色, 在格点的连续极限下还需要更多证据. 就作者所知, 人们尚不能明确从格点场论本身证实对

偶超导体图像所依赖的3个条件: (1) 电和磁动力学间的对偶结构; (2) 非微扰真空形成一个稳定磁荷的多粒子体系; (3) 这些荷可形成玻色凝聚体.

Faddeev等人沿此路线取得了新的进展^[3]. 他们证明, 可通过称为联络分解的非微扰手段得到YM理论的红外序参量及随之而来的对偶超导结构^[3, 10, 11]. 通过将原始的胶子自由度变成AH变量(A_μ, ϕ)及单位同位旋矢量 \mathbf{n} , 并利用标准重整化群分析, 他们得到红外极限下YM理论的有效模型^[3]

$$\mathcal{L}^{FS} = m_F^2 (\partial_\mu \mathbf{n})^2 + \frac{1}{g^2} (\mathbf{n}, \partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n})^2. \quad (1)$$

这个模型展示了一个扭结涡漩结构^[12]并被认为是和胶子激发有关联. 不过就这些变量的意义及它们与胶子激发之间的联系仍有不同的理解(参见[13]及其所引文献).

本文提出YM理论真空的强耦合极限表现为一个经典场论意义下色空间的黑洞. 通过由YM理论出发推导对偶AH模型并预测理论的真空类型, 证明强耦合YM理论存在对偶超导体解, 且理论真空可由磁荷的多粒子体系构成. 我们的论证可归纳如下: YM真空的黑洞类比 \implies 联络分解中变量的层级结构 \implies 真空作为密集单极体系 \implies 强耦合YM理论的对偶超导体图像.

2006-10-08 收稿

* 国家自然科学基金(10547009)和西北师范大学博士后启动基金(NWNU-B-5002-537)资助

1) E-mail: jiadj@nwnu.edu.cn

2 基于联络分解的对偶动力学

考虑 $SU(2)$ YM 理论, 其中, 联络(胶子场) $A_\mu = A_\mu^a \tau^a$ ($\tau^a = \sigma^a/2$, $a = 1, 2, 3$) 描述 6 个横向紫外自由度. 引入一个单位同位旋矢量场 $\mathbf{n}(x)$ 可得 FN(Faddeev-Niemi) 联络分解式^[3]

$$\mathbf{A}_\mu = A_\mu \mathbf{n} + \mathbf{C}_\mu + g^{-1} \phi_1 \partial_\mu \mathbf{n} + g^{-1} \phi_2 \partial_\mu \mathbf{n} \times \mathbf{n}, \quad (2)$$

其中 g 是耦合常数, $A_\mu \equiv \mathbf{A}_\mu \cdot \mathbf{n}$ 是 $U(1)$ 阿贝尔联络. \mathbf{C}_μ 不依赖于原始自由度 \mathbf{A}_μ 意味着 \mathbf{A}_μ 有更基本的内在结构. 这种思想最先源于多个磁单极方面的工作^[10], 后来先后推广到 $SO(N)$ 联络情形^[14] 和旋量分解的情形^[15]. 在 $U(1)$ 定轴 (\mathbf{n}) 转动下, A_μ 和 ϕ 分别构成 $U(1)$ 规范势和 $U(1)$ 群自身表示. FN 分解 (2) 式表明: 原始的 YM 理论可约化为具有色“电-磁”场对偶的 Abel 规范理论, 且该理论包含磁单极 (在 $\mathbf{n}(x)$ 的奇点处). 这与早年 't Hooft 和 Polyakov 提出的图像相一致^[2], 这种图像认为 YM 理论的紫外和红外极限代表不同的相, 其中色荷由于磁单极凝聚体的对偶 Meissner 效应而禁闭起来.

当 $\mathbf{n}(x)$ 失去它明确的方向或者梯度 $\partial \mathbf{n}$ 变成无穷大, 联络分解 (2) 式中就会产生奇异性. 从拓扑上说, 这些奇异性是由两个群流形 $SU(2)$ 和 $U(1)$ 之间的区别引起的. 正如文献 [10, 11] 中所讨论的, $\mathbf{n}(x)$ 中的每个奇异性都对应着一个磁单极势. 引入磁场的强度 $B_{\mu\nu} := -(\mathbf{n} \cdot \partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n})$, 则磁势 B_μ 可由 $B_{\mu\nu} := \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ 定义. 由 (2) 式计算总场强 $\mathbf{G}_{\mu\nu}$, 代入 YM 拉氏量 $\mathcal{L} = -\mathbf{G}_{\mu\nu}^2/4$, 可得 YM 理论的对偶模型^[3]

$$\mathcal{L}^{\text{dual}} = -\frac{1}{4} \left[F_{\mu\nu} + \frac{Z(\phi)}{g} B_{\mu\nu} \right]^2 - \frac{1}{4g^2} [(n_{\mu\nu} - iB_{\mu\nu})(\nabla^\mu \phi)^\dagger \nabla^\nu \phi + \text{h.c.}], \quad (3)$$

其中 $F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, $Z(\phi) = 1 - |\phi|^2$, $n_{\mu\nu} := \eta_{\mu\nu}(\partial_\rho \mathbf{n})^2 - \partial_\mu \mathbf{n} \cdot \partial_\nu \mathbf{n}$, $\nabla_\mu \phi \equiv \nabla_\mu \phi_1 + i\nabla_\mu \phi_2 = (\partial_\mu - igA_\mu)\phi$ 是 $U(1)$ 协变微分, h.c. 表示厄米共轭. 这里, 使用了符号 $\nabla_\mu \phi_1 \equiv \partial_\mu \phi_1 + gA_\mu \phi_2$, $\nabla_\mu \phi_2 \equiv \partial_\mu \phi_2 - gA_\mu \phi_1$. 容易看出这个模型具有剩余的 $U(1)$ 对称性: 绕 \mathbf{n} 的定轴转动.

模型 (3) 式描述色电场 $F_{\mu\nu}$ 和色磁场 $B_{\mu\nu}$ 与某种 ϕ 粒子相互作用的阿贝尔动力学. 同时, 介质因子 $Z(\phi)$ 的出现暗示, 色磁场处在由 ϕ 参数化的“介质”当中. 动力学 (3) 式在略去第二项 (通过取大 g 极限) 的经典解要求 $\langle \phi \rangle = \text{常数}$, 即介质是均匀无限大介质. 故在大而有限的耦合时, 由于 (3) 式中 ϕ 场的动能项 (第二

项), 可设想介质变为非均匀、有限 (设体积为 V) 的介质. 参照 Lee^[16] 的思想, 该介质可视为非微扰真空.

3 经典意义下真空的黑洞类似

基于对联络分解结构的分析, 下面将论证当假定 \mathbf{n} 是紫外自由度时, YM 理论真空 (此后简称为 YM 真空或非平凡真空) 的强耦合极限在经典意义下等效于一个色空间的“黑洞”.

根据有效场理论, 假定 \mathbf{n} 是紫外自由度就意味着 AH 变量 (A_μ, ϕ) 是低能 YM 理论的相关变量. 由联络分解 (2) 式可知, 变量 $\mathbf{n}(x)$ 能起到由整体基矢 $\{\tau^{1\sim 3}\}$ 到局域基矢 $\{\mathbf{n}, \partial_\mu \mathbf{n}, \partial_\mu \mathbf{n} \times \mathbf{n}\}$ 的奇异变换函数的作用, 而基矢之间的变换是理论真空的一种特性. 于是, (3) 式可看成弯曲时空背景 V 下的标量电动力学, 其中, A_μ 对应于四矢量电磁势, $\{\mathbf{n}, \partial_\mu \mathbf{n}, \partial_\mu \mathbf{n} \times \mathbf{n}\}$ 对应于 V 的局域基矢 $\{e_\mu^{1\sim 4}(x)\}$. 这为我们提供一种根据引力的强场极限即黑洞来理解 YM 理论禁闭相的框架: 若将第 2 节所提及的介质对应于高度弯曲的时空 V , 则黑洞的强引力对应于 V 的强联络 $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha(x)$; 由此 V 可被理解为黑洞内部俘获光子场和标量场的真空介质的区域. 强的色空间弯曲效应俘获了阿贝尔场 A_μ 和标量粒子 ϕ .

下面说明 YM 真空的黑洞类似与 \mathbf{n} 是一个紫外自由度 (“快” 变量) 的假设相等价. 在广义相对论中, 强引力意味着大的时空连络 $\Gamma_{\nu\mu}^\rho(x)$. 按弯曲空间几何学关系 $\partial_\mu e_\nu^\alpha(x) = \Gamma_{\nu\mu}^\rho(x) e_\rho^\alpha(x)$, 这等价于 e_ν^α 有大的梯度 $\partial_\mu e_\nu^\alpha$, 即大的 $|\partial_\mu \mathbf{n}|$. 由于 $(\partial \mathbf{n})^2$ 在 V 范围内都相当大, 所以相对于 AH 变量, \mathbf{n} 是一个快变量. 又因 \mathbf{n} 是一个单位方向矢量, $|\partial \mathbf{n}| \gg 1$ 表明在一个很小的长度范围和一个很小的时间段内 \mathbf{n} 变化迅速. 这说明 \mathbf{n} 是一个 “快” 变量或紫外自由度.

4 作为稠密磁介质的非平凡真空

下面基于对偶动力学的拓扑性质-磁通量守恒来论证强耦合 YM 真空是一个充满磁单极的等效介质. 首先, V 范围内磁场的总磁通量为

$$\Phi_m = \int_V g^{-1} B_{\mu\nu} d\sigma^{\mu\nu} = g^{-1} \int_V (\mathbf{n} \cdot d\mathbf{n} \times d\mathbf{n}) = \frac{4\pi}{g} n, \quad (4)$$

其中 $n = W(\mathbf{n})$ 是 \mathbf{n} 场的环绕数, 单位磁荷大小为 $g_m = 4\pi/g$.

为理解对偶超导体图像中的“电磁对偶”, 用 Wilson-loop 来考察非-阿贝尔场的通量守恒. 类似于高斯定理, Diakonov 和 Petrov 证明了一条非-阿贝

尔理论下的广义高斯定理^[17], 即为非阿贝尔斯托克斯定理. 它在我们的情形下具有如下形式^[18]:

$$W^C[\mathbf{A}] := \text{tr} \left[\mathcal{P} \exp \left\{ i \int_C \mathbf{A}_\mu dx^\mu \right\} \right] = \int [dU] \exp \left\{ (i/2) \int_C dx^\mu \text{tr} \left\{ \sigma^3 \left[U \mathbf{A}_\mu U^\dagger + \frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger \right] \right\} \right\} = \int [d\mu_C(\mathbf{n})] e^{i[\Phi_A(C) + \Phi_m(C)]}. \quad (5)$$

其中 $\Phi_A(C) := \int_C A_\mu dx^\mu$ 代表通过圈 C 的阿贝尔场 A_μ 的流量, $\Phi_m(C)$ 代表通过 C 的磁通量, $d\mu_C(\mathbf{n})$ 代表陪集 $SU(2)/U(1)$ 的 Haar 测度. 从(5)式可得, 色荷守恒要求流过大圈 C 的所有“电”和磁荷都守恒. 即总通量

$$\Phi_A(C) + \Phi_m(C) = 4\pi(q_e + n/g) \quad (6)$$

保持不变. 这里 q_e 是阿贝尔电场 A_μ 的电荷. 对于对偶模型(3), 由于未破缺的 $U(1)$ 对称, q_e 是守恒的. 由非阿贝尔规范场的拓扑性质可知, 当 g 变化时, (6)式中的总通量保持不变. 快变量 \mathbf{n} 有大的梯度意味着 V 内存在强的磁场 $B_{\mu\nu}$, 即 V 内存在大的 $\Phi_m(C)$; 于是, (6)式中的 n/g 是一个大的值, 即对强耦合 YM 理论, n 在数量上很大. 在 Wu-Yang 单极情形下, 容易验证整个区域 V 内具有 \mathbf{n} 的大梯度分布时, 单极之间的空隙很小. 这样, 真空背景的黑洞类似表明 YM 真空可看作大量磁单极构成的致密介质.

5 红外变量的经典近似

假定联络分解(2)式能给出紫外红外自由度 \mathbf{n} 的分离. 于是 AH 变量 (A_μ, ϕ) 成为红外变量(即“慢变量”), 其量子涨落很小; 而快变量 \mathbf{n} 和 $\partial_\mu \mathbf{n}$ 是有强烈量子涨落. 为简化问题, 对新变量作以下经典近似(用 $\langle \dots \rangle$ 来表示真空期望值):

(1) 在 V 内, $\partial_\mu \mathbf{n}$ 的真空期望值为零, 但均方量子涨落为一常量:

$$\langle \partial_\mu \mathbf{n} \rangle \equiv 0, \quad \langle (\partial_\mu \mathbf{n})^2 \rangle \neq 0, \quad \text{在 } V \text{ 内}. \quad (7)$$

(2) 由有效场理论中的退耦定理, 红外变量 (A_μ, ϕ) 与紫外变量 \mathbf{n} 和 $\partial_\mu \mathbf{n}$ 退关联:

$$\langle F(A_\mu, \phi) P(\mathbf{n}, \partial \mathbf{n}) \rangle = \langle F(A_\mu, \phi) \rangle \langle P(\mathbf{n}, \partial \mathbf{n}) \rangle, \quad (8)$$

其中 F 和 P 是有关变量的任意函数, 对 A_μ 的任意函数 f 有近似值 $\langle f(A_\mu^2) \rangle \approx f(A_\mu^2)$, 这相当于忽略慢变量 $A_\mu = \bar{A}_\mu + \delta A_\mu$ 在经典值 \bar{A}_μ 周围的小的涨落 δA_μ .

(3) 复标量 $\phi(x)$ 涨落的真空期望值近似为零, 并忽略涨落二次方的期望值. 于是有

$$\langle \phi^\dagger(x) \phi(y) \rangle \approx \Phi^*(x) \Phi(y), \quad \text{当 } x_0 > y_0, \quad (9)$$

其中 $\Phi(x)$ 是 $\phi(x)$ 的期望值. 因 $\phi(x)$ 描述介质真空, 可以认为 $|\Phi(x)|^2$ 是正比于磁单极的定域密度. 按对偶超导图像, Φ 就是介质真空的序参量. 这恰好与前面关于方程(3)中的 ϕ 作为真空介质的参数出现在介质因子 $Z(\phi)$ 中的观点相一致.

6 有效对偶阿贝尔-黑格斯模型

为进一步证实对偶超导体图像, 从(3)式推导出 $SU(2)$ 胶子动力学的有效对偶超导体模型, 并基于 Wilsonian 重正化群分析对 $SU(2)$ 真空类型加以讨论, 由此得到的真空类型和最近模拟获得的结果进行比较, 从而验证对偶超导体图像的有效性. 将(3)式改写为

$$\mathcal{L}_{\text{dual}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 - \frac{Z(\phi)^2}{4g^2} B_{\mu\nu}^2 - \frac{Z(\phi)}{2g} F_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + \mathcal{L}_D, \quad (10)$$

式中 $\mathcal{L}_D = -\frac{1}{2g^2} (n_{\mu\nu} - iB_{\mu\nu})(\nabla^\mu \phi)^\dagger \nabla^\nu \phi$, 并且将(2)式中的所有变量看作量子算符. 真空的规范和洛伦兹对称性及第5节中的性质(1)意味着真空期望值 $\langle (\partial_1 \mathbf{n})^2 \rangle$ (质量平方标度, 由 m^2 表示) 是一个常数, 该常数在有效理论以重正化参数形式出现. 于是由真空的洛伦兹对称性可得

$$\langle (\partial_1 \mathbf{n})^2 \rangle = \langle (\partial_2 \mathbf{n})^2 \rangle = \langle (\partial_3 \mathbf{n})^2 \rangle = \langle (\partial_0 \mathbf{n})^2 \rangle = m^2. \quad (11)$$

由真空的规范对称性知诸 $\langle (\partial_\mu n^a)^2 \rangle$ ($a = 1, 2, 3$) 相等. 因此对于固定的 ($a = 1, 2, 3$), 有 $\langle (\partial_\mu n^a)^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle (\partial_\mu \mathbf{n})^2 \rangle = -\frac{2}{3} m^2$, 由此可得

$$\langle (\partial \mathbf{n})^2 \rangle := \langle \partial^\mu n^a(x) \partial_\mu n^a(x) \rangle = -2m^2. \quad (12)$$

进一步, 真空的洛伦兹对称性可给出

$$\langle n_{\mu\nu} \rangle = \eta_{\mu\nu} \langle (\partial \mathbf{n})^2 \rangle - \eta_{\mu\nu} \langle (\partial_0 \mathbf{n})^2 \rangle = -3\eta_{\mu\nu} m^2, \quad (13)$$

式中利用了方程(7), (11)和(12). 由第5节中的性质(1)和 Wick 定理, 得

$$\begin{aligned} \langle B_{\mu\nu} \rangle &= \epsilon^{abc} \lim_{\epsilon^\mu \rightarrow 0} \partial_\mu^{x_2} \partial_\nu^{x_3} \langle n^a(x_3) n^b(x_2) n^c(x_1) \rangle = \\ &= g^{-1} \epsilon^{abc} \lim_{x_3 \rightarrow x} \langle n^a(x_3) \rangle \times \\ &= \langle \partial_\mu n^b(x_2) \partial_\nu n^c(x_1) \rangle \Big|_{x_2=x_1=x} \propto \\ &= \epsilon^{abc} \langle \partial_\mu n^b(x) \partial_\nu n^c(x) \rangle = 0, \end{aligned}$$

式中 $\varepsilon^\mu \equiv \max_{i,j} \|(x_i)^\mu - (x_j)^\mu\|$, ($i, j = 1, 2, 3$) 是 4 个正的小参数, 时间顺序假定为 $(x)^\mu < (x_1)^\mu < (x_2)^\mu < (x_3)^\mu < (x)_0 + \varepsilon^0$.

对于拉格朗日(10)的真空平均值, 可应用第 5 节中的性质(1)–(3)推出有效模型. 第二项 $\mathcal{L}_2 = -Z(\phi)^2 B_{\mu\nu}^2/4g^2$ 变为

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}_2 \rangle &= -\frac{m^{*4}}{4g^2} \langle 1 + (\phi^\dagger \phi)^2 - 2\phi^\dagger \phi \rangle = \\ &= -\frac{m^{*4}}{4g^2} (1 + 2|\Phi^* \Phi|^2 - 2\Phi^* \Phi) = \\ &= -\frac{m^{*4}}{2g^2} [(|\Phi|^2 - 1/2)^2 + 1/4], \quad (14) \end{aligned}$$

其中 $m^{*4} := \langle B_{\mu\nu}^2 \rangle$ 是量纲为 $[M^4]$ 的正参数. 利用 ϕ 的有序性(第 5 节中的性质(3))、标量场的玻色对称性和 Wick 定理, 得

$$\begin{aligned} \langle \phi^\dagger \phi \phi^\dagger \phi \rangle|_x &= \lim_{\varepsilon^\mu \rightarrow 0} \langle \phi_1^\dagger \phi_2 \phi_3^\dagger \phi_4 \rangle = \lim_{\varepsilon^\mu \rightarrow 0} \{ \langle \phi_4 \phi_3^\dagger \rangle \langle \phi_2 \phi_1^\dagger \rangle + \\ &= \langle \phi_4 \phi_1^\dagger \rangle \langle \phi_3 \phi_2^\dagger \rangle + \langle \phi_1^\dagger \phi_3^\dagger \rangle \langle \phi_2 \phi_4 \rangle \} = \\ &= 2\Phi(x)\Phi^*(x)\Phi(x)\Phi^*(x). \end{aligned}$$

这里 $\phi_i \equiv \phi(x_i)$ 和 ε^μ 是 $(x_i)^\mu - (x_j)^\mu$ 的最大范数 ($i, j = 1-4$), 时间顺序假定为 $(x)^\mu < (x_1)^\mu < \dots < (x_4)^\mu < (x)_0 + \varepsilon^0$. 此外, 由于量子场 ϕ 只有 ϕ 和 ϕ^\dagger 相乘才有非零真空期望值, 所以 $\langle \phi_1^\dagger \phi_3^\dagger \rangle = \langle \phi_2 \phi_4 \rangle = 0$. 将经典平均值 \bar{A}_μ 简记为 A_μ , 可得

$$\begin{aligned} \langle [\nabla^\mu \phi(x)]^\dagger \nabla_\mu \phi(x) \rangle &= \langle (\partial_\mu \phi^\dagger(x) \partial^\mu \phi(x) + \\ &= igA^\mu(x) \phi^\dagger(x) \partial_\mu \phi(x) - igA_\mu(x) \partial^\mu \phi^\dagger(x) \phi(x) + \\ &= g^2 A^\mu(x) A_\mu(x) \phi^\dagger(x) \phi(x)) \rangle = \lim_{y \rightarrow x^-} [\partial_x^\mu \partial_{\mu y} + \\ &= igA^\mu \partial_{\mu x} - igA_\mu \partial^{\mu y} + g^2 A^\mu A_\mu] \langle \phi^\dagger(x) \phi(y) \rangle, \end{aligned}$$

利用(9)式, 可导出 $\langle [\nabla^\mu \phi]^\dagger \nabla_\mu \phi \rangle = [\nabla_\mu \Phi(x)]^* \nabla^\mu \Phi(x)$. 再结合(13)和关系式 $\langle B_{\mu\nu} (\nabla^\mu \phi)^\dagger \nabla^\nu \phi \rangle \propto \langle B_{\mu\nu} \rangle = 0$, 可得

$$\langle \mathcal{L}_D \rangle = \frac{3m^2}{2g^2} |(\partial_\mu - igA_\mu)\Phi|^2. \quad (15)$$

将式(14)和(15)代入到(10)中, 可得有效拉格朗日 $\mathcal{L}^{\text{eff}} = \langle \mathcal{L}_{\text{dual}} \rangle$. 注意, 由第 5 节中的性质(2), 公式(10)中的第三项的平均值为零并且 $\langle B^{\mu\nu} \rangle = 0$. 于是

$$\mathcal{L}^{\text{eff}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + \frac{3m^2}{2g^2} |\nabla^\mu \Phi|^2 - \frac{\lambda}{2} \left(|\Phi|^2 - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{\lambda}{8}. \quad (16)$$

将 Φ 重标度使之变成具有质量量纲的量: $\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{m}{g} \Phi(x) \rightarrow \Phi(x)$, 忽略(16)式中的附加常数, 可

得有效对偶 AH 模型

$$\mathcal{L}^{\text{eff}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + |(\partial_\mu - igA_\mu)\Phi|^2 - V(\Phi), \quad (17)$$

该模型在对偶超导体图像中曾被当成 QCD 禁闭相的有效理论. 这里, 势 $V(\Phi)$ 具有墨西哥帽形式

$$V(\Phi) = \frac{\tilde{\lambda}}{4} (|\Phi|^2 - \mu^2)^2.$$

其中 $\tilde{\lambda} = (8g^2/9)(m^*/m)^4$, $\mu = (\sqrt{3}m/2g) > 0$.

7 真空介质的类型

由 $m^{*4} = \langle (\mathbf{n}, d\mathbf{n} \times d\mathbf{n})^2 \rangle$ 所确定的正的质量标度可用第 5 节中的性质(1)简化. 利用关系式(7)和 Wick 定理, 可得

$$\begin{aligned} m^{*4} &= \epsilon_{abc} \epsilon_{mkl} [\langle \partial_\mu n^b \partial^\mu n^k \partial_\nu n^c \partial^\nu n^l n^a n^m \rangle] = \\ &= \epsilon_{abc} \epsilon_{mkl} [\langle \partial_\mu n^b \partial^\mu n^k \rangle \langle \partial_\nu n^c \partial^\nu n^l \rangle \langle n^a n^m \rangle + \\ &= \langle \partial_\mu n^b \partial^\nu n^l \rangle \langle \partial_\nu n^c \partial^\mu n^k \rangle \langle n^a n^m \rangle + \\ &= \langle \partial_\mu n^b n^m \rangle \langle \partial_\nu n^c \partial^\nu n^l \rangle \langle \partial^\mu n^k n^a \rangle + \dots] = \\ &= \epsilon_{abc} \epsilon_{mkl} \delta^{bk} \delta^{cl} \langle (\partial_\mu n^1)^2 \rangle \langle n^a n^m \rangle = \frac{8}{9} m^4, \end{aligned}$$

因此可得 $\tilde{\lambda} = \left(\frac{8g}{9} \right)^2$. 磁单极的质量为

$$m_\Phi = \sqrt{\tilde{\lambda}} \mu = \frac{4\sqrt{3}}{9} m, \quad (18)$$

它和(1)中的 m_F 具有相同的量级. 这样, YM 真空的黑洞类似或 \mathbf{n} 为紫外变量意味着磁单极很重 ($m_\Phi \gg 1$), 这与经验事实定性地相符合. 在这个意义上, 原始对偶超导图像^[1, 2]中提出的模型式(17)成为超导体 Ginzburg-Landau 模型的对偶模型.

模型(17)式在其简并最小能态 $\Phi_{\min} = \mu$ 处的自发对称破缺使 A_μ 获得了一个质量 m_A . 这可通过平移 $\Phi(x) \rightarrow \mu + \Phi(x)$ 很容易验证. 结果是

$$m_A = \sqrt{\frac{3}{2}} m. \quad (19)$$

众所周知, 模型(17)式存在 Nielsen-Olesen 涡旋解. 当 Nielsen-Olesen 涡旋为减少能量代价形成一个自封闭的涡旋时, 模型(17)式的涡旋解与模型(1)式的扭结涡旋解相一致. 从式(18)和(19)中得出 Ginzburg-Landau 参数是

$$\kappa = \frac{m_\Phi}{m_A} = \frac{8/9}{\sqrt{2}}, \quad (\text{弱第 I 类}). \quad (20)$$

(20)式的预测和参考文献[8]给出的 $\sqrt{2}\kappa = \lambda/\xi = 0.85$ 非常一致, 表明 $SU(2)$ 胶子动力学的真空类型是弱第

I 类对偶超导体, 非常接近于第 I 类和第 II 类对偶超导体的边界.

方程 (17) 中的有效 Mexico-hat 形式的势 $V(\Phi)$ 是由介质因子 $\langle Z(\phi) \rangle$ 平均得到的事实表明, YM 真空是“磁”类型的. 因子 $Z(\phi)$ 在 (3) 中起一个逆磁导的作用. 这一点连同对偶 AH 模型的推导再次支持强耦合 YM 真空表现为一个由大量磁单极组成的介质的结论. 该图像还可以通过将强耦合 YM 理论等效于弯曲时空中的标量电动力学来进一步说明, 其中作为背景介质的真空表现为一个捕获阿贝尔场 A_μ 和标量 Φ 粒子的黑洞.

8 对偶伦敦方程及其讨论

为了看出非微扰真空的抗色电性质, 求解对偶 AH 模型 (17) 的运动方程, 即广义对偶伦敦方程. 在洛伦兹规范 ($\partial_\mu A^\mu = 0$) 下, (17) 式的运动方程为^[19]

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -ig(\Phi^* \partial^\mu \Phi - \partial^\mu \Phi^* \Phi) - 2g^2 |\Phi|^2 A^\mu, \quad (21)$$

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \Phi = -\frac{\tilde{\lambda}}{2} [|\Phi|^2 - \mu^2] \Phi. \quad (22)$$

为了看到对偶迈斯纳效应, 我们寻找一个柱对称涡旋解. 取柱坐标系 (r, θ, z) , $r^2 = x^2 + y^2$. 设 $A(r, \theta) = \hat{\theta} A(r) = A_\theta$, $\Phi(r, \theta) = \rho(r) e^{in\theta}$. 则磁场为 $B = \nabla \times A = \hat{z} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rA(r)]$. 又设 $A(r) = \frac{n}{gr} [1 - F(r)]$, $B(r) = -\frac{n}{gr} F'(r)$. 式中, “'”代表对 r 的微商. 则方程 (21) 和 (22) 可分别化简为

$$F'' - \frac{F'}{r} + 2g^2 \rho^2 F = 0. \quad (23)$$

$$\rho'' + \frac{\rho'}{r} - \frac{n^2 F^2}{r^2} \rho - \frac{\tilde{\lambda}}{2} \rho [\rho^2 - \mu^2] = 0. \quad (24)$$

在边界条件 $F(\infty) \rightarrow 0$, $\rho(\infty) \rightarrow \mu$ (当 $r \rightarrow \infty$ 时) 和 $F(0) \rightarrow 1$, $\rho(0) \rightarrow 0$ (当 $r \rightarrow 0$ 时) 之下, 文献 [6] 和 [20] 曾进行过数值计算. 参照其结果设方程 (23) 和 (24) 中的 $B(r)$ 和 $\rho(r)$ 的解形式分别为

$$B(r) = B_z(r) = B_0 \left[\frac{b}{1.8319 \lambda^2 \cosh(r/\lambda)} + \frac{2(1-b)}{\delta^2} \exp\left(-\frac{r^2}{\delta^2}\right) \right]. \quad (25)$$

$$\rho(r) = \mu \tanh(2\lambda r / \delta^2). \quad (26)$$

其中 B_0, b, λ, δ 是待定参数. 由于色磁场 $B(r)$ 只有 z 方向分量 $B_z(r)$ 非零, 而阿贝尔磁单极流 $k(r)$ 只有方位角分量 $k_\theta(r)$ 非零, 故根据对偶安培定则 $k = \text{curl} B$,

可得磁单极流分布

$$k_\theta(r) = B_0 \left[\frac{b}{1.8319 \lambda^3 \cosh(r/\lambda)} + \frac{4(1-b)}{\delta^4} \exp\left(-\frac{r^2}{\delta^2}\right) \right]. \quad (27)$$

当 $n = 1$ 时, 又由 $B(r) = -\frac{n}{gr} F'(r)$ 可解出 $F(r) = -g \int r B(r) dr$ 为

$$F(r) = 0.172g \left((b-1) \exp\left(-\frac{r^2}{\delta^2}\right) - \frac{0.546b}{\lambda} \left(r \arctan\left(\frac{2 \exp(-r/\lambda)}{1 - \exp(-2r/\lambda)}\right) + \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{-2 \exp(-(4i+1)r/\lambda)}{(4i+1)^2} + \frac{2 \exp(-(4i+3)r/\lambda)}{(4i+3)^2} \right) \right) \right). \quad (28)$$

其中已取 $B_0 = 0.1719$. 由 (17) 式可以推出单位长度上的能量 $E = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty r \varepsilon(r) dr$ 为

$$E = 2\pi \int_0^\infty r \left[\frac{1}{2} \left(\frac{n}{gr} \right)^2 (F'(r))^2 + \left(\frac{n}{r} \right)^2 (F(r))^2 (\rho(r))^2 + (\rho'(r))^2 + V(\rho) \right] dr. \quad (29)$$

用符号计算软件求积分式 (29) 的极小值, 定出 b, λ, δ 的值, 给出下面两个图形. 图 1 中的曲线给出了 $B_z(r)$ 和 $k_\theta(r)$ 的 r 依赖性; 图 2 给出了 $F(r), \rho(r)$ 和 $\varepsilon(r)$ 的 r 依赖性, 图中 $\varepsilon_0 = 0.0033 \text{ MeV}$, $R = 1 \text{ fm}$. 由图可以看出涡旋外的介质对色电场存在对偶迈斯纳效应, 且绕涡旋轴有磁单极环流分布.

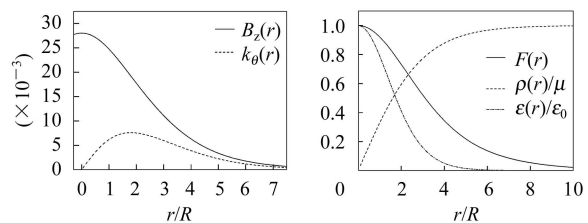


图 1 $B_z(r)$ 和 $k_\theta(r)$ 的 r 依赖性

图 2 $F(r), \rho(r)$ 和 $\varepsilon(r)$ 的依赖性

9 结论

基于联络分解变量的紫外/红外分离, 我们提出 YM 真空的强耦合极限在经典场论意义下表现为一个色空间的黑洞. 由此, 我们证明在强耦合 YM 理论中存在对偶超导体解. 在量子水平下, 强耦合理论的非微扰真空可由磁荷的多粒子体系构成, 而理论的经典近

似给出对偶 AH 模型. 该模型预言对偶超导真空位于第一类与第二类超导体边界, 这与最近的格点模拟结

果相一致. 通过求解对偶 AH 模型我们还讨论了色电场的涡旋解和对偶迈斯纳效应.

参考文献(References)

- 1 Nambu Y. Phys. Rev., 1974, **D10**: 4262; Mandelstam S. Phys. Rep., 1976, **C23**: 245
- 2 't Hooft G. Nucl. Phys., 1978, **B138**: 1; Nucl. Phys., 1979, **B153**: 141; Polyakov A M. Nucl. Phys., 1977, **B120**: 429
- 3 Faddeev L D, Niemi A J. Phys. Rev. Lett., 1999, **82**: 1624
- 4 Cho Y M, Pak D G. Phys. Lett., 2006, **B632**: 745
- 5 Suzuki T et al. Phys. Rev., 1990, **D42**: 4257; Bali G, Bornyakov V et al. Phys. Rev., 1996, **D54**: 2863; Suganuma H et al. Phys. Rev., 1999, **D60**: 77501; Suganumaa H, Ichie H. Nucl. Phys., 2003, **121**(Proc. Suppl.): 316
- 6 Chernodub M N, Polikarpov M I et al. Nucl. Phys., 1996, **49**(Proc. Suppl.): 307; Giacomo A D, Paffuti G. Phys. Rev., 1997, **D56**: 6816; Schilling K, Bali G S et al. Nucl. Phys., 1999, **73**: 638
- 7 Chernodub M N, Ishiguro K et al. Phys. Rev., 2005, **D72**: 074505; Koma Y et al. Phys. Rev., 2003, **D68**: 114504
- 8 Sekido T, Ishiguro K et al. Pos. (Lat 2005): 329. hep-lat/0511027
- 9 Suzuki T. Prog. Theor. Phys., 1988, **80**: 929
- 10 DUAN Y S, GE M L. Sci. Sin., 1979, **11**: 1072
- 11 Cho Y M. Phys. Rev., 1980, **D21**: 1080
- 12 Faddeev L D, Niemi A J. Nature., 1997, **387**: 58; Battye R, Sutcliffe P. Phys. Rev. Lett., 1998, **81**: 4798
- 13 Cho Y M et al. Phys. Lett., 2002, **B525**: 347; Mod. Phys. Lett., 2004, **A19**: 2707; Kondo K I. Phys. Lett., 2004, **B600**: 287
- 14 DUAN Y S, Lee X G. Helv. Phys. Acta, 1995, **68**: 513; DUAN Y S, MENG X H. J. Math. Phys., 1993, **34**: 1149
- 15 JIA D J, DUAN Y S. Mod. Phys. Lett., 2001, **A16**: 1863; DUAN Y S, LIU X et al. Phys. Rev., 2003, **D67**: 085022
- 16 Lee T D. Particle Physics and Introduction to Field Theory. Harwood: Harwood Academic Publishers, 1983. 7—14
- 17 Diakonov D, Petrov V. Phys. Lett., 1989, **B224**: 131; 1990, **B242**: 425
- 18 Kondo K I. Phys. Rev., 1998, **D58**: 105016; Cho Y M. Phys. Rev., 2000, **D62**: 074009
- 19 JIA D J. HEP & NP, 2006, **30**(3): 196 (in Chinese) (贾多杰. 高能物理与核物理, 2006, **30**(3): 196)
- 20 Schilling K, Bali G S, Schlichter C. Prog. Theor., 1998, **131**(Proc. Suppl.): 645

Dual Superconductor Vacuum in Strongly-Coupled Yang-Mills Theory^{*}

JIA Duo-Jie^{1,2;1)} AI De-Zhen¹

1 (Institute of Theoretical Physics, College of Physics and Electronic Engineering,
Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

2 (Interdisciplinary Center for Theoretical Study, University of Science & Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract Based on the ultraviolet/infrared scale separation of the connection decomposition variables, we propose that at the classic level the strong-coupling limit of the Yang-Mills theory vacuum behaves as a black hole with regard to colors. With this idea, we prove that there exists a dual superconductor solution for the strongly-coupled Yang-Mills theory, whose vacuum is made up of a many-body system of magnetic charges at the quantum level. The classic average of the theory reproduce the dual Abelian-Higgs model. This model predicts a result which is consistent with recent lattice simulations. The vacuum of the $SU(2)$ gluodynamics is at border between type-I and type-II. The dual Meissner effect of Chromo-electric field is discussed by solving the dual Abelian-Higgs model.

Key words Yang-Mills theory, dual superconductor, black hole, dual meissner effect

Received 8 October 2006

^{*} Supported by National Natural Science Foundation of China (10547009) and Postdoctoral Fellow Startup Fund of NWNNU (NWNNU-B-5002-537)

1) E-mail: jiadj@nwnu.edu.cn