

# 相互作用玻色子模型中相变特征量的 玻色子数 $N$ 依赖行为<sup>\*</sup>

张宇<sup>1</sup> 侯占峰<sup>1</sup> 刘玉鑫<sup>1,2;1)</sup>

1(北京大学物理学院理论物理研究所 北京 100871)

2(北京大学重粒子物理教育部重点实验室 北京 100871)

**摘要** 研究了相互作用玻色子模型中各种对相变比较敏感的特征量相对于总玻色子数  $N$  的依赖行为. 通过比较这些特征量在  $U(5)$ - $SU(3)$  过渡区以及  $U(5)$ - $O(6)$  过渡区在不同  $N$  情况下的临界行为, 发现  $BE(2)$  比值  $B(E2; 4_1 \rightarrow 2_1)/B(E2; 2_1 \rightarrow 0_1)$  和  $B(E2; 0_2 \rightarrow 2_1)/B(E2; 2_1 \rightarrow 0_1)$  等可以作为完全区分一级相变和二级相变的有效序参量.

**关键词** 相变 序参量 临界区 相互作用玻色子模型

## 1 引言

量子相变问题一直都是理论和实验共同关注的热点, 不同体系所表现出来的量子相变的特征也是千差万别. 作为一个既与壳模型密切相关又与几何模型直接对应的代数模型<sup>[1]</sup>, 许多有关形状相变的重要信息都可以由相互作用玻色子模型得到<sup>[2-7]</sup>. 原子核的 3 种典型形状相可以用相互作用玻色子模型中的 3 种动力学对称性极限来标记, 它们分别是标志球形振动相的  $U(5)$  对称性极限, 长椭球转动相的  $SU(3)$  对称性极限以及  $\gamma$  不稳定转动相的  $O(6)$  对称性极限. 一般来说, 在两个对称性极限之间的过渡区存在着相变, 并且  $U(5)$ - $SU(3)$  过渡对应一个一级相变, 而  $U(5)$ - $O(6)$  过渡则对应一个二级相变. 相应的研究表明, 这两个不同级相变的临界点分别对应所谓的  $X(5)$ <sup>[8]</sup> 和  $E(5)$ <sup>[9]</sup> 对称性. 为了有效地区分不同级相变的特征, 文献[4]提出了利用一些对相变敏感的特征量作为有效序参量的方法. 而后来工作文献[5,10]的研究结果表明, 文献[4]中提出的许多相变特征量随着总玻色子数  $N$  的增加会表现出一些小  $N$  时表现不出来的性质. 本文的目的就是通过对各种特征量分类描述, 从中找出一些不仅可以区分一级相变和二级相变, 而且其临

界行为随总玻色子数  $N$  增大没有本质变化的特征量, 从而较好地标记核形状相变的特征.

## 2 模型和计算结果

本文采用一个两参数的哈密顿量<sup>[3]</sup>:

$$H = (1 - \xi)n_d - \frac{\xi}{4N} Q^x \cdot Q^x, \quad (1)$$

其中  $n_d = \sum_m d_m^\dagger d_m$ ,  $Q^x = (d^\dagger \times \tilde{s} + s^\dagger \times \tilde{d})^{(2)} + \chi(d^\dagger \tilde{d})^{(2)}$ ,  $-\sqrt{7}/2 \leq \chi \leq 0$ , 且  $0 \leq \xi \leq 1$ . 本文中, 我们具体研究  $U(5)$ - $SU(3)$  相变和  $U(5)$ - $O(6)$  相变, 所以相应的参数取值分别对应  $\chi = -\sqrt{7}/2$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$  以及  $\chi = 0$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ .

为了对角化哈密顿量, 把式(1)对应的本征矢量按  $U(6) \supset U(5) \supset O(5) \supset O(3)$  群链所对应的基矢  $|N n_d v LM\rangle$  来展开:

$$|N k v LM; \xi\rangle = \sum_{n_d} C_{n_d}^k(\xi) |N n_d v LM\rangle, \quad (2)$$

其中  $C_{n_d}^k(\xi)$  是相应的展开系数,  $k$  是用来区分具有相同  $v$ ,  $L$  和  $M$  量子数的不同本征态的附加量子数. 将哈密顿量对角化后, 我们可以得到体系的能级以及

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(10425521, 10575004), 国家重大基础研究发展规划(G2000077400), 教育部重点科研项目(305001)和教育部博士点专项研究基金(20040001010)资助

1) E-mail: liuyx@phy.pku.edu.cn

相应的本征波函数, 从中可以找到相变所对应的临界点<sup>[5, 6, 11]</sup>.

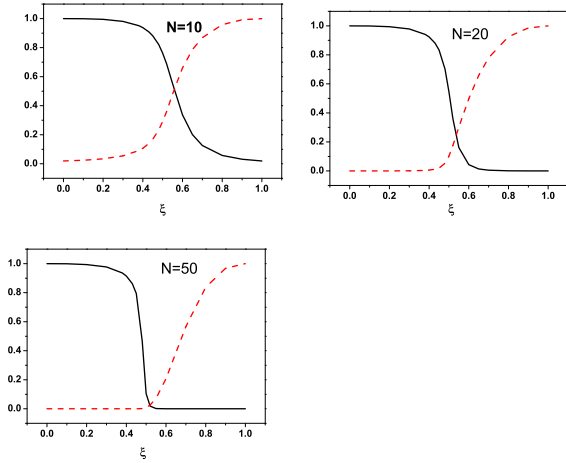


图 1 基态波函数重叠在  $U(5)$ - $SU(3)$  过渡区中的临界行为

其中实线表示  $|\langle 0_g; \xi | 0_g; \xi = 0 \rangle|$ , 虚线为  $|\langle 0_g; \xi | 0_g; \xi = 1 \rangle|$ .

首先, 计算了体系基态波函数的重叠, 其具体定义为  $|\langle 0_g; \xi | 0_g; \xi_0 \rangle|$ , 其中  $\xi_0 = 0, 1$ . 在图 1 中我们给出总玻色子数  $N = 10, 20, 50$  时在  $U(5)$ - $SU(3)$  过渡区中基态波函数重叠的演化行为, 而在图 2 中我们给出  $N = 10, 300, 1000$  时  $U(5)$ - $O(6)$  过渡区中基态波函数重叠的演化行为. 值得一提的是, 由于当前的计算能力不能得到  $U(5)$ - $SU(3)$  过渡区在大  $N$  情形下的精确结果, 因此这里仅给出  $N$  不是很大的结果.

从图 1 可以看到, 在  $\xi \sim 0.5$  处, 波函数重叠  $|\langle 0_g; \xi | 0_g; \xi = 0 \rangle|$  和  $|\langle 0_g; \xi | 0_g; \xi = 1 \rangle|$  在  $N$  比较小的情况下有一个交叉点, 并且随着  $N$  增大, 交叉点纵坐标下降至零左右. 图 2 也表现出类似的行为, 因为对于  $U(5)$ - $O(6)$  过渡区可以得到大  $N$  的结果, 所以由图 2 可以看到, 在  $N$  很大情况下, 交叉点已经演变成一个交叉区<sup>[10]</sup>. 总之, 从图 1 和图 2 可以看到, 基态波函数重叠在  $U(5)$ - $SU(3)$  过渡区和  $U(5)$ - $O(6)$  过渡区中的临界行为是相似的, 这两个不同的过渡区对应相变的级数不同, 所以基态波函数重叠不能用来区分一级和二级相变. 实际上, 与基态波函数重叠的临界行为类似的特征量还有  $d$  玻色子占有率  $n_d$  以及  $B(E2; 2_1 \rightarrow 0_1)$  等<sup>[4, 10]</sup>, 那么这些特征量都不能很好地区分不同级的量子相变. 另外, 文献[4]提出, 用  $V_1 = \alpha_0 (\langle 0_2 | n_d | 0_2 \rangle - \langle 0_g | n_d | 0_g \rangle)$  和  $V_2 = \beta_0 (\langle 2_1 | n_d | 2_1 \rangle - \langle 0_1 | n_d | 0_1 \rangle)$  作为有效序参量来区分一级相变和二级相变, 并且指出, 由于两相竞争,  $V_1$  在一级相变的临界区中呈现摆动状; 而对于二级相变,

$V_1$  在其临界区的演化是光滑的.  $V_2$  具有与  $V_1$  类似的特征. 因此, 这两个特征量可作为有效序参量来区分一级和二级相变. 而文献[10]指出, 当总玻色子数  $N$  足够大时, 这两个特征量的上述特征不能很好地保持.

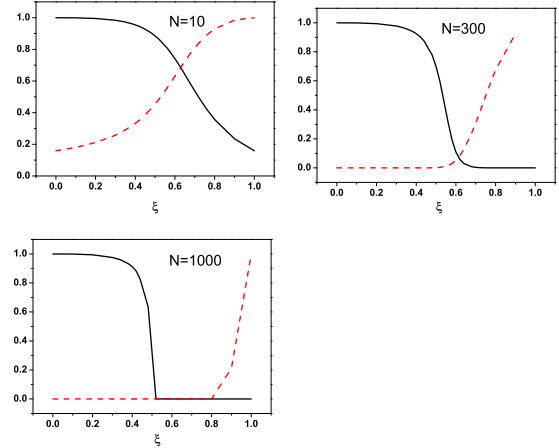


图 2 基态波函数重叠在  $U(5)$ - $O(6)$  过渡区中的临界行为

其中实线表示  $|\langle 0_g; \xi | 0_g; \xi = 0 \rangle|$ , 虚线为  $|\langle 0_g; \xi | 0_g; \xi = 1 \rangle|$ .

因此我们又分别仔细计算了  $V_1$  和  $V_2$  在  $U(5)$ - $SU(3)$  过渡区和  $U(5)$ - $O(6)$  过渡区中随总玻色子数  $N$  变化的临界行为, 其具体  $N$  的取值与基态波函数重叠相同, 计算结果在图 3 中给出. 从图 3 可以看到, 在  $U(5)$ - $SU(3)$  过渡区以及大  $N$  时的  $U(5)$ - $O(6)$  过渡区中,  $V_1$  都呈现摆动特征, 在  $U(5)$ - $O(6)$  过渡区中体系发生的是二级量子相变. 所以我们认为  $V_1$  不是一个好的有效序参量. 因为  $V_2$  的情形与  $V_1$  相似 (这可以从图 3 中看出), 所以  $V_2$  也不能作为好的序参量.

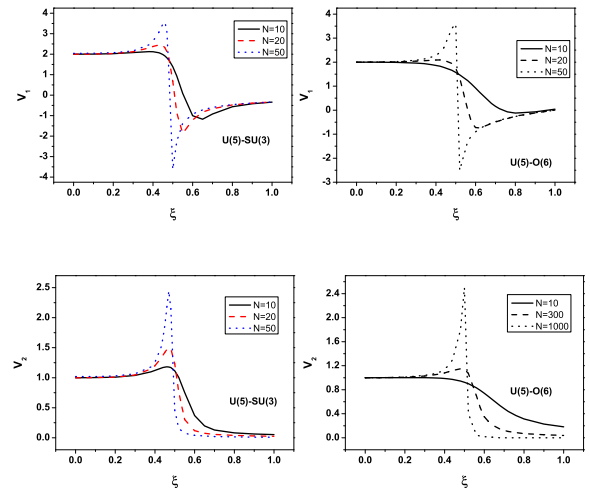


图 3 特征量  $V_1$  和  $V_2$  在不同总玻色子数  $N$  时的临界行为

其中参数  $\alpha_0$  和  $\beta_0$  均取为  $1/N$ .

量子相变应该定义在  $N$  趋于无穷大, 即热力学极限下, 一个有效的序参量在不同级相变的临界区的行为应该是不同的. 为了找到一个临界区行为不明显依赖于总玻色子数  $N$  的特征量作为区分不同级量子相变的有效序参量, 我们还计算了另外两个对相变敏感的特征量  $K_1 = B(E2; 4_1 \rightarrow 2_1)/B(E2; 2_1 \rightarrow 0_1)$  和  $K_2 = B(E2; 0_2 \rightarrow 2_1)/B(E2; 2_1 \rightarrow 0_1)$ , 其中  $T(E2) = q_2[(d^\dagger \times \tilde{s} + s^\dagger \times \tilde{d})^{(2)} + \chi(d^\dagger \tilde{d})^2]$ ,  $q_2$  为有效电荷. 对于两个不同的过渡区的具体计算结果由图4给出.

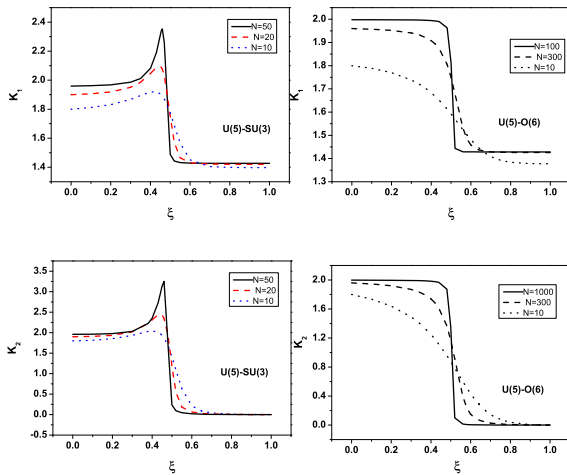


图4  $K_1$  和  $K_2$  在不同总玻色子数  $N$  时的临界行为

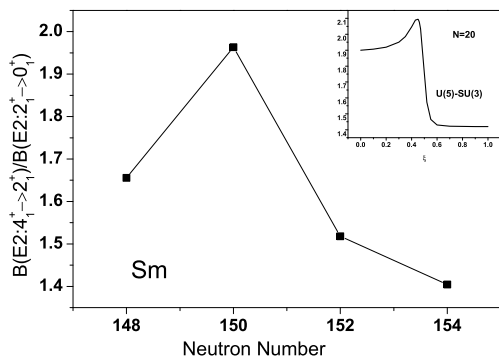


图5 Sm同位素的  $B(E2; 4_1 \rightarrow 2_1)/B(E2; 2_1 \rightarrow 0_1)$  实验值随中子数变化的行为<sup>[14]</sup>  
其中子图为相应比值在  $U(5)-SU(3)$  过渡区的变化行为.

由图4可知: (a) 在小  $N$  时,  $K_1$  和  $K_2$  在  $U(5)-SU(3)$  过渡区中有一个小的凸起, 而在  $U(5)-O(6)$  过渡区中表现为一个光滑的斜坡状; (b) 随着  $N$  增大,  $K_1$  和  $K_2$  在  $U(5)-SU(3)$  过渡区中的凸起演化成一个峰; (c)  $K_1$  和  $K_2$  在  $U(5)-O(6)$  过渡区中随着  $N$  增加, 表现为斜坡越来越陡, 但并没有峰出现, 且  $K_1$  和  $K_2$  的最大值一直在  $\xi = 0$  处. 由此知,  $K_1$  和  $K_2$  在两个不

同过渡区中的临界行为不仅完全不同, 而且这种不同的特征不象  $V_1$  和  $V_2$  那样随着  $N$  的增大而被抹平, 而是表现越来越明显. 以上分析表明,  $K_1$  和  $K_2$  可以作为一个序参量来区分一级和二级量子相变, 且这种区分能力独立于总玻色子数. 在实验上已经发现许多原子核可以作为相变的临界区的代表核<sup>[11-13]</sup>, 例如  $^{152}\text{Sm}$  就是一个典型的具有临界区特征的原子核, 为此, 在图5中给出一些 Sm 核的同位素对应的  $B(E2)$  比值的实验值和理论值的比较. 从图5我们看到,  $^{150}\text{Sm}$  也是与临界区很接近的原子核, 而  $^{150}\text{Sm}$  具有的软核特征<sup>[15, 16]</sup> 正是处于  $U(5)-SU(3)$  相变的临界区核所具有的普遍特征<sup>[17]</sup>.

### 3 结论

通过上述计算和分析, 我们发现, 可以按照各种特征量在  $U(5)-SU(3)$  过渡区和  $U(5)-O(6)$  过渡区的临界行为, 将其分为3类: (1) 以基态波函数重叠为代表, 在玻色子数  $N$  不大时其临界行为在两个过渡区中是相似的, 而随着总玻色子数增大, 这种临界行为在两个过渡区中都变得越来越明显, 但总体变化趋势是相似的. 唯一一点差别是这类特征量的临界行为在  $U(5)-SU(3)$  过渡区中随总玻色子数  $N$  增加比在  $U(5)-O(6)$  过渡区变化的变化似乎要快一点. 这类特征量还包括  $d$  玻色子占有率  $n_d$  以及电四级跃迁  $B(E2; 2_1 \rightarrow 0_1)$ ; (2) 第二类特征量主要包括  $V_1$  和  $V_2$ . 它们的特点是, 在小  $N$  时,  $V_1$  和  $V_2$  在两个过渡区中的临界行为完全不同, 但随着  $N$  增大, 其临界行为越来越相似. 但在  $N$  一定时,  $V_1$  和  $V_2$  在  $U(5)-SU(3)$  过渡区临界行为的奇异性要比在  $U(5)-O(6)$  过渡区更突出, 即在  $U(5)-SU(3)$  过渡区这类特征量的临界行为随  $N$  的变化要比在  $U(5)-O(6)$  过渡区中快的多; (3) 这类特征量主要以  $K_1$  和  $K_2$  为代表, 其特点是在两个不同的过渡区中临界行为在小  $N$  时是不同的, 随着  $N$  增加这种差别始终保持且越来越明显. 这类特征量还包括类似  $B(E2; L+2 \rightarrow L)/B(E2; 2_1 \rightarrow 0_1)$  这样的电四级跃迁的比值. 在相互作用玻色子模型中, 总玻色子数  $N$  是唯象的, 且与价核子对数相联系的. 一个有效的序参量对不同级相变的区分能力在任何玻色子数下都应保持, 通过以上分析我们知道, 只有第3类特征量具有这种特性, 故这类特征量可以作为有效序参量来区分一级和二级相变. 找到一个好的有效序参量有助于从实验现象中探寻量子相变的证据, 但有效序参量本身不能定义相变的级数. 如何在不同的系统中找到一个

有效序参量仍然是一个需要进一步研究的问题, 本文基于相互作用玻色子模型的分析给出了一个例子, 该

方法还可以推广到分子的振子模型<sup>[18]</sup>及其他量子相变系统中.

### 参考文献(References)

- 1 Arima A, Iachello F. *Ann. Phys.*, 1976, **99**: 253; *Ann. Phys.*, 1978, **111**: 201; Scholten O, Iachello F, Arima A. *Ann. Phys.*, 1978, **115**: 325; Iachello F, Arima A. *The Interacting Boson Model*. Cambridge: Cambridge University Press, 1978
- 2 FENG D H, Gilmore R, Dean S R. *Phys. Rev.*, 1981, **C23**: 1254
- 3 Jolie J, Cejnar P, Casten R F et al. *Phys. Rev. Lett.*, 2002, **89**: 182502
- 4 Iachello F, Zamfir N V. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, **92**: 212501
- 5 Rowe D J. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, **93**: 122502
- 6 Rowe D J, Turner P S, Rosensteel G. *Phys. Rev. Lett.*, 2004, **93**: 232502
- 7 Warner D D, Casten R F. *Phys. Rev.*, 1983, **C28**: 1978
- 8 Iachello F. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **87**: 052502
- 9 Iachello F. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, **85**: 3580
- 10 PAN F, ZHANG Y, Draayer J P. *J. Phys.*, 2005, **G31**: 1039
- 11 Casten R F, Zamfir N V. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, **85**: 3584
- 12 Casten R F, Zamfir N V. *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **87**: 052503
- 13 Tonev D, Dewald A, Klug T et al. *Phys. Rev.*, 2004, **C69**: 034334
- 14 Scholten O, Iachello F, Arima A. *Ann. Phys.*, 1978, **115**: 325
- 15 arXiv:nucl-th/0312055 v1 16 Dec 2003
- 16 Casten R F, Kusnezov Dimitri, Zamfir N V. *Phys. Rev. Lett.*, 1999, **82**: 5000
- 17 PAN Feng, Draayer J P, LUO Yan-An. *Phys. Lett.*, 2003, **B576**: 297—302
- 18 Iachello F, Levine R D. *Algebraic Theory of Molecules*. Oxford: Oxford University, 1995

## Boson Number Dependence of the Quantities Sensitive to Phase Transition in the Interacting Bosons Model\*

ZHANG Yu<sup>1</sup> HOU Zhan-Feng<sup>1</sup> LIU Yu-Xin<sup>1,2;1)</sup>

<sup>1</sup>(Department of Physics, Peking University, Beijing 100871, China)

<sup>2</sup>(The Key Laboratory of Heavy Ion Physics, Ministry of Education, Beijing 100871, China)

**Abstract** We study the features of nuclear shape phase transition in the framework of interacting boson model(IBM). By comparing the critical behaviors in the  $U(5)$ - $O(6)$  and  $U(5)$ - $SU(3)$  transitional regions with the increasing of the total boson number, we find out that the  $B(E2)$  ratios  $B(E2; 4_1 \rightarrow 2_1)/B(E2; 2_1 \rightarrow 0_1)$ ,  $B(E2; 0_2 \rightarrow 2_1)/B(E2; 2_1 \rightarrow 0_1)$  and so on can be taken as the effective order parameters to distinguish between the first and second phase transition.

**Key words** phase transition, order parameter, critical region, interacting boson model

\* Supported by National Natural Science Foundation of China (10425521, 10575004), Major State Basic Research Development Program (G2000077400), Key Grant Project of Chinese Ministry of Education (305001) and Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (20040001010)

1) E-mail: liuyx@phy.pku.edu.cn