

# 冷却储存环CSRm中螺线管场耦合效应研究\*

周雪梅<sup>1,2;1)</sup> 夏佳文<sup>1</sup> 原有进<sup>1</sup> 武军霞<sup>1</sup> 杨建成<sup>1</sup>

刘勇<sup>1</sup> 刘伟<sup>1</sup> 冒立军<sup>1,2</sup> 周俊<sup>1,2</sup>

1 (中国科学院近代物理研究所 兰州 730000)

2 (中国科学院研究生院 北京 100049)

**摘要** 介绍了重离子冷却储存环中螺线管场对束流水平方向和垂直方向产生耦合的原理, 由耦合运动方程及耦合系数推导出螺线管场耦合的补偿方法. 结合兰州冷却环主环实际的单元结构, 工作点选在束流稳定的差共振附近, 模拟计算了冷却环主环在电子冷却段没有螺线管、有螺线管和增加补偿螺线管三种情况下的束流发射度及此三种情况下冷却环主环的动力学孔径. 通过模拟计算可知螺线管的存在将引起束流的水平方向和垂直方向严重耦合, 由于耦合效应, 垂直方向的发射度将超出其接受度, 致使束流大量损失. 针对这种情况, 提出了在螺线管两端的合适位置增加一组补偿螺线管的校正方案. 模拟结果表明这种措施行之有效.

**关键词** 横向耦合 发射度 螺线管场 校正

## 1 引言

在储存环中, 束流在水平方向和垂直方向运动的耦合是影响束流品质的一个关键因素. 通常情况下, 束流离子在横向的运动互不相关, 因此可采取分离变量法分别求出束流在水平方向和垂直方向的包络和发射度. 但实际的束流传输中, 由于斜四极铁、螺线管等元件的存在, 使得束流离子的横向运动耦合在一起. 耦合产生的效应使束流在垂直方向发射度增加, Betatron运动频移以及机器动力学孔径减小, 造成束流损失. 所以在加速器的设计中, 为了减少由于耦合造成的束流损失, 就要对束流耦合进行研究, 并采取合适的校正方案. 本文主要分析了螺线管场引起束流横向运动耦合的理论, 给出了用螺线管场补偿螺线管场耦合的方法, 并结合兰州冷却储存环主环(CSRm)的实际参数模拟计算了电子冷却段在没有螺线管, 有螺线管, 及增加补偿螺线管三种情况下的束流发射度和此三种情况下CSRm的动力学孔径.

## 2 螺线管场的研究

### 2.1 螺线管场对束流横向运动的耦合

螺线管的传输矩阵 $M_s$ <sup>[1]</sup>为

$$M_s = \begin{bmatrix} C^2 & \frac{1}{K}SC & SC & \frac{1}{K}S^2 \\ -KSC & C^2 & -KS^2 & SC \\ -SC & -\frac{1}{K}S^2 & C^2 & \frac{1}{K}SC \\ KS^2 & -SC & -KSC & C^2 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中 $K = \frac{qB_0}{2p_s}$ ,  $C = \cos(KL)$ ,  $S = \sin(KL)$ ,  $L$ 为螺线管的有效长度. 定义一个由 $s = s_1$ 到 $s = s_2$ 的传输矩阵 $M_s$ , 满足

$$X(s_2) = M_s(s_2|s_1)X(s_1), \quad (2)$$

其中 $X(s) = [x(s) \quad p_x(s) \quad y(s) \quad p_y(s)]^T$ ,  $s$ 表示沿束流传输方向的路径长. 将(1)式代入(2)式得到

2005 - 07 - 18 收稿

\* 国家杰出青年科学基金(10325522)资助

1) E-mail: zhouxuemei@impcas.ac.cn

$$\begin{pmatrix} x(s_2) \\ p_x(s_2) \\ y(s_2) \\ p_y(s_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2 & \frac{1}{K}SC & SC & \frac{1}{K}S^2 \\ -KSC & C^2 & -KS^2 & SC \\ -SC & -\frac{1}{K}S^2 & C^2 & \frac{1}{K}SC \\ KS^2 & -SC & -KSC & C^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(s_1) \\ p_x(s_1) \\ y(s_1) \\ p_y(s_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^2x(s_1) + \frac{1}{K}SCP_x(s_1) + SCy(s_1) + \frac{1}{K}S^2p_y(s_1) \\ -KSCx(s_1) + C^2p_x(s_1) - KS^2y(s_1) + SCP_y(s_1) \\ -SCx(s_1) - \frac{1}{K}S^2p_x(s_1) + C^2y(s_1) + \frac{1}{K}SCP_y(s_1) \\ KS^2x(s_1) - SCP_x(s_1) - KSCy(s_1) + C^2p_y(s_1) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

由(3)式可看出螺线管本身即为耦合元件, 由于它的存在使得水平方向和垂直方向的运动产生耦合.

## 2.2 螺线管场作用下粒子的耦合运动方程及耦合补偿

仅考虑螺线管场存在时, 粒子在横向的betatron运动方程<sup>[2]</sup>为

$$\frac{d^2x}{ds^2} + K_x(s)x = -\frac{M'_0}{2}y - M_0y', \quad (4)$$

$$\frac{d^2y}{ds^2} + K_y(s)y = \frac{M'_0}{2}x + M_0x', \quad (5)$$

其中

$$K_x(s) = \frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{B\rho} \left[ \frac{\partial B_y}{\partial x} \right]_0,$$

$$K_y(s) = -\frac{1}{B\rho} \left[ \frac{\partial B_x}{\partial y} \right]_0, \quad M_0 = -\frac{1}{B\rho} B_s. \quad (6)$$

式中  $x, y$  分别表示水平方向和垂直方向的轨道偏离;  $K_x(s), K_y(s)$  分别表示水平方向和垂直方向的磁聚焦常数;  $B_s$  为螺线管场,  $B\rho$  为磁刚度.

应用 Lagrange 变换求得运动方程的解为:

$$\begin{cases} x = \left( \int_0^s \frac{i}{2} F_x ds + a_{x0} \right) \beta_x^{1/2} e^{i\phi_x} + c.c., \\ y = \left( \int_0^s \frac{i}{2} F_y ds + a_{y0} \right) \beta_y^{1/2} e^{i\phi_y} + c.c., \end{cases} \quad (7)$$

式中

$$\begin{cases} F_x = -\frac{1}{2} M'_0 y \beta_x^{1/2} e^{-i\phi_x} - M_0 y (\beta_x^{1/2} e^{-i\phi_x})' \\ F_y = -\frac{1}{2} M'_0 x \beta_y^{1/2} e^{-i\phi_y} + M_0 x (\beta_y^{1/2} e^{-i\phi_y})' \end{cases}, \quad (8)$$

$\beta_x, \beta_y$  分别为水平和垂直方向的包络函数;  $a_{x0}, a_{y0}$  分别为水平和垂直方向的振幅系数;  $\phi_x, \phi_y$  分别为水平和垂直方向的相位. 由(7)式可知, 当  $\int_0^s \frac{i}{2} F_{x,y} ds = 0$  时, 线性耦合就被补偿; 当  $F_{x,y} \neq 0$  时, 环上不是所有点的耦合都能被补偿, 但利用元件间耦合效应的相互抵消可以做到全环耦合补偿.

仅考虑由螺线管场引起的横向耦合, 水平方向与垂直方向的均方根(RMS)发射度<sup>[3]</sup>分别为:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - (\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{y0}) \frac{|C|^2/2}{\Delta^2 + |C|^2 + \Delta\sqrt{\Delta^2 + |C|^2}}, \quad (9)$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y0} + (\varepsilon_{x0} - \varepsilon_{y0}) \frac{|C|^2/2}{\Delta^2 + |C|^2 + \Delta\sqrt{\Delta^2 + |C|^2}},$$

其中  $\varepsilon_{x0}, \varepsilon_{y0}$  分别为无耦合时水平方向与垂直方向的初始RMS发射度,  $|C|$  为耦合系数的模,  $\Delta = Q_y + t - Q_x$  ( $Q_x, Q_y$  分别为水平和垂直方向的 tune 值,  $t$  为整数, 当差共振时  $Q_x - Q_y = t$ ).

下面具体讨论二阶差共振时螺线管场的耦合系数<sup>[4]</sup>  $C$ :

$$C = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} M \sqrt{\beta_x \beta_y} \left[ \left( \frac{\alpha_x}{\beta_x} - \frac{\alpha_y}{\beta_y} \right) - i \left( \frac{1}{\beta_x} + \frac{1}{\beta_y} \right) \right] \times \exp\{i[(\mu_x - \mu_y) + \Delta\theta]\} d\theta, \quad (10)$$

将  $C$  分为两个部分, 令  $C = C_q + C_b$

$$C_q = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} M \sqrt{\beta_x \beta_y} \left( \frac{\alpha_x}{\beta_x} - \frac{\alpha_y}{\beta_y} \right) \times \exp\{i[(\mu_x - \mu_y) + \Delta\theta]\} d\theta, \quad (11)$$

$$C_b = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{2\pi} M \sqrt{\beta_x \beta_y} \left( \frac{1}{\beta_x} + \frac{1}{\beta_y} \right) \times \exp\{i[(\mu_x - \mu_y) + \Delta\theta]\} d\theta, \quad (12)$$

其中  $M = \frac{R}{|B\rho|} B_s$ ,  $R$  为机器半径,  $\theta$  为方位角,  $\mu_{x,y}$  为 betatron 振荡相位. 由(10), (11) 和(12)式可知:

$$|C| = \sqrt{C_b^2 + C_q^2 + C_q \bar{C}_b + \bar{C}_q C_b}, \quad (13)$$

式中  $\bar{C}_b, \bar{C}_q$  分别表示  $C_b, C_q$  的共轭复数.

为了求得  $C$  的幅值, 可将(10), (11), (12)式的积分形式近似转化为小量相加和的形式. 假定将  $N_e$  个螺线管每个分成  $N_c$  段, 那么每个螺线管每段的耦合系数的振幅与相角如下:

$$|C_q|_{jk} = \left| \frac{l_{jk}}{4\pi R} (\sqrt{\beta_x \beta_y})_{jk} M_{jk} \left( \frac{\alpha_x}{\beta_x} - \frac{\alpha_y}{\beta_y} \right)_{jk} \right|, \quad (14)$$

$$\psi_{qjk} = (\mu_x - \mu_y)_{jk} + \Delta\theta_{jk} (+\pi), \quad (15)$$

$$|C_b|_{jk} = \left| \frac{l_{jk}}{4\pi R} (\sqrt{\beta_x \beta_y})_{jk} M_{jk} \left( \frac{1}{\beta_x} + \frac{1}{\beta_y} \right)_{jk} \right|, \quad (16)$$

$$\psi_{bjk} = \psi_{qjk} \pm \frac{\pi}{2}, \quad (17)$$

$$|C|_{jk} = \sqrt{|C_q|_{jk}^2 + |C_b|_{jk}^2}, \quad (18)$$

$$\psi_{jk} = \psi_{qjk} \pm \arctg\left(\frac{|C_b|_{jk}}{|C_q|_{jk}}\right), \quad (19)$$

(14)–(19) 式中  $j = 1, \dots, N_e$ ,  $k = 1, \dots, N_c$ ,  $l_{jk}$  表示第  $j$  个螺线管第  $k$  段的长. 仅当  $C_q$  为负值时,  $\psi_q$  要加  $\pi$ . 既然各个螺线管的每段耦合系数的幅值和相角已知, (10) 式的积分形式可以转化为小量相加形式:  $C = \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{k=1}^{N_c} |C|_{jk} e^{i\psi_{jk}}$ .  $C$  的模的表示形式如下

$$|C|^2 = \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{k=1}^{N_c} |C|_{jk}^2 + \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{k=1}^{N_c-1} \sum_{n=k+1}^{N_c} 2|C|_{jk}|C|_{jn} \cos(\psi_{jk} - \psi_{jn}) + \sum_{j=1}^{N_e-1} \sum_{m=j+1}^{N_e} \sum_{k=1}^{N_c} \sum_{n=1}^{N_c} 2|C|_{jk}|C|_{mn} \cos(\psi_{jk} - \psi_{mn}), \quad (20)$$

表 1 CSRm 中所有螺线管的参数

	长度/m	$M$	$\beta_x/\text{m}$	$\beta_y/\text{m}$	$\alpha_x$	$\alpha_y$	$\mu_x/(2\pi)$	$\mu_y/(2\pi)$
主螺线管-1	2.0	$-0.15R/(2G)$	10.060	16.799	-0.100	-0.060	0.016	0.009
弯曲螺线管-1	1.6	$-0.0625R/(1.6G)$	10.746	17.208	-0.281	-0.167	0.044	0.026
补偿螺线管-1	0.7	$0.430R/(2 \times 0.7G)$	11.872	17.878	-0.438	-0.261	0.066	0.041
补偿螺线管-2	0.7	$0.430R/(2 \times 0.7G)$	11.872	17.878	-0.438	-0.261	0.066	0.041
弯曲螺线管-2	1.6	$-0.0625R/(1.6G)$	10.746	17.208	-0.281	-0.167	0.044	0.026
主螺线管-2	2.0	$-0.15R/(2G)$	10.060	16.799	-0.100	-0.060	0.016	0.009

分别装有补偿螺线管以达到耦合补偿. CSRm 中所有螺线管的参数如表 1 所示.

根据实际注入环中的粒子为  $C_{12}^{6+}$ , 能量为  $7\text{MeV/u}$ ,  $R = 7.6\text{m}$  可知表 1 中磁刚度  $G = 0.764349\text{T}\cdot\text{m}$ .

由 (9) 式可知, 水平方向与垂直方向的 RMS 发射度之和不受耦合效应的影响. 再根据 CSRm 的实际结构<sup>[5]</sup>, 电子冷却部分不加螺线管场时, 工作点选在束流稳定的差共振 ( $Q_x = 3.64$ ,  $Q_y = 2.61$ ) 附近, 此时  $B_s = 0$ , 即  $|C| = 0$ , 由 (9) 式知:  $\varepsilon_x = \varepsilon_{x0}$ ,  $\varepsilon_y = \varepsilon_{y0}$ . 当电子冷却部分加了螺线管场后, 工作点移到  $Q_x = 3.650805$ ,  $Q_y = 2.624828$ ; 当加入补偿螺线管场后, 工作点移到  $Q_x = 3.698245$ ,  $Q_y = 2.686822$ , 可知螺线管场的引入没有使工作点移到共振线上. 将表 1 中的参数及补偿后的工作点代入 (20) 式的右边, 可得补偿后的耦合系数约等于零, 从理论上证明了 CSRm 耦合补偿的有效性. 注入粒子束的水平方向和垂直方向初始发射度分别为  $150$  和  $20\pi\cdot\text{mm}\cdot\text{mrad}$ . CSRm 理想 lattice 只由 16 块二极铁、30 块四极铁及螺线管组

成. 当全环的耦合系数为零时, 也就做到全环的耦合补偿了. (20) 式提供一种计算耦合及耦合补偿的方法.

### 3 模拟 CSRm 中螺线管场对多粒子多圈发射度的耦合效应及不同情况下的动力学孔径

CSRm 中冷却段主螺线管主要为冷却段提供纵向磁场, 用来将电子的横向运动转化成绕磁力线的回旋运动. 主螺线管由 68 个独立的线圈组成, 这些线圈串接在一起. 冷却段另外的两个弯曲螺线管, 即电子枪区弯曲螺线管和收集器区弯曲螺线管, 主要作用在于使电子束偏转到粒子轨道和偏出粒子轨道. 螺线管的纵向场对储存环中储存的粒子束产生影响, 引起束流的横向耦合, 这种耦合作用引起束流垂直方向发射度增长, 束包络增大, 造成储存环中束流损失. 为了校正螺线管场对粒子束造成的耦合, 在电子冷却器两边,

用 MAD 程序<sup>[6]</sup> 模拟跟踪在无螺线管、有螺线管和加补偿螺线管三种情况下 5000 个粒子的水平方向和垂直方向的位移及动量在 100 圈内的变化.

由 RMS 发射度公式, 可求出无螺线管、有螺线管和加补偿螺线管三种情况下发射度在 100 圈内的变化如图 1 所示.

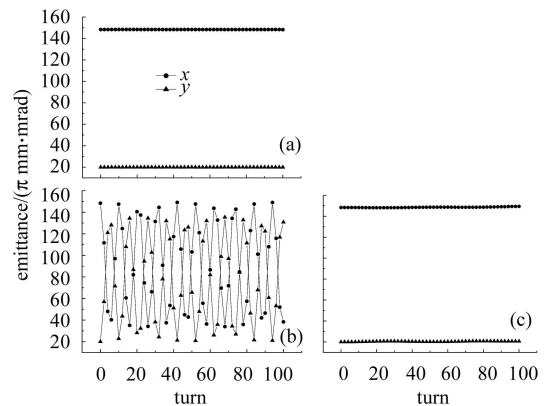


图 1 加螺线管前后的横向发射度情况

图 1 中  $x$ ,  $y$  在图 (a), (b), (c) 中分别表示没有螺线管、有螺线管及增加补偿螺线管后的水平和垂直方向

的发射度. 由图(a)可知: 无螺线管场时的横向发射度与初始值相等, 模拟的结果与(9)式一致. 比较图(a), (b)可知: 无螺线管时的水平方向和垂直方向发射度稳定, 螺线管的引入使得水平方向和垂直方向的发射度发生耦合. 比较图(a), (c)可知: 补偿后的水平方向和垂直方向发射度与无螺线管时的情况相同, 说明补偿有效. 由图1可知: 水平方向与垂直方向 RMS 发射度之和在上述3种情况下保持不变, 验证了(9)式横向发射度之和的保守性.

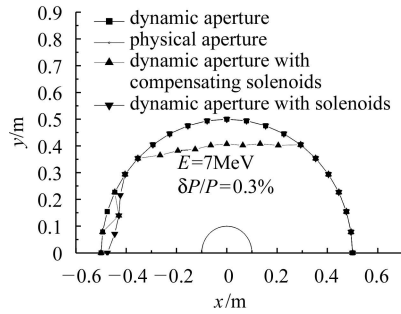


图2 加螺线管场及补偿前后的 CSR<sub>m</sub> 的动力学孔径

由图2可以看出 CSR<sub>m</sub> 中若不考虑六极场等非线性场, 螺线管场的存在对动力学孔径的影响仅有很小的影响, 加了补偿螺线管场, 虽然动力学孔径有所减少, 但还是远远大于物理孔径.

## 4 结论

本文计算了螺线管场所引起的水平方向和垂直方向耦合, 并且由螺线管场作用下粒子的耦合运动方程及耦合系数导出用螺线管场补偿耦合的方法. 螺线管场的引入使得水平方向和垂直方向发射度发生耦合, 考虑到兰州重离子加速器冷却储存环 HIRFL-CSR<sub>m</sub> 在水平方向进行束流累积, 水平方向的接受度为  $200\pi\cdot\text{mm}\cdot\text{mrad}$ , 垂直方向的接受度为  $40\pi\cdot\text{mm}\cdot\text{mrad}$ , 由于耦合效应, 垂直方向的发射度将超过  $40\pi\cdot\text{mm}\cdot\text{mrad}$ , 因此必须对螺线管场所带来的耦合进行补偿, 以减少耦合所引起的束流损失. 由发射度和动力学孔径的模拟结果可知, 在 CSR<sub>m</sub> 电子冷却装置两端的合适位置增加一组补偿螺线管的校正方案是有效的.

## 参考文献(References)

- 1 Christoph Iselin F. The MAD Program Physical Methods Manual. 8.13. Switzerland: European Organization for Nuclear Research, 1994. 28
- 2 Guignard G. Betatron Coupling and Related Impact of Radiation. Geneva: CERN European Organization for Nuclear Research, 1995. 43
- 3 Métral E. CERN/PS, 2001, 066(AE): 1
- 4 Guignard G. The General Theory of all Sum and Difference Resonances in a Three-Dimensional Magnetic Field in a Synchrotron. Geneva: CERN, 1976. 6
- 5 XIA J W, ZHAN W L, WEI B W et al. Nuclear Instruments and Methods in Physics Research, 2002, A488: 1
- 6 Hans Grote, Christoph Iselin F. The MAD Program (Methodical Accelerator Design). Switzerland: European Organization for Nuclear Research, 1996. 115

## Coupling Effect of Solenoid in CSR<sub>m</sub>\*

ZHOU Xue-Mei<sup>1,2,1)</sup> XIA Jia-Wen<sup>1</sup> YUAN You-Jin<sup>1</sup> WU Jun-Xia<sup>1</sup> YANG Jian-Cheng<sup>1</sup>

LIU Yong<sup>1</sup> LIU Wei<sup>1</sup> MAO Li-Jun<sup>1,2</sup> ZHOU Jun<sup>1,2</sup>

1 (Institute of Modern Physics, the Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China)

2 (Graduate School, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

**Abstract** The principle of particle coupling between horizontal and vertical directions in solenoid is presented. Furthermore, the method of decoupling can be obtained by using the coupling dynamic equations. 5000 particles are tracked under three conditions: CSR<sub>m</sub> doesn't contain solenoids, contains main solenoid and toroids, contains compensating solenoids. The results of the particle trace calculations show that the particles coupling between horizontal and vertical is very serious because of the existence of solenoids, and lots of particles are lost. Another two solenoids which locate in the fit place can be used to decrease the coupling intensation. The method is proved to be useful by the trace calculations.

**Key words** transverse coupling, emittance, field of solenoid, compensating

Received 18 July 2005

\*Supported by National Natural Science Funds for Distinguished Young Scholar (10325522)

1) E-mail: zhouxuemei@impcas.ac.cn