洛伦兹破缺的电动力学模型

吴剑锋　薛迅[1]

(华东师范大学物理系理论物理研究所　上海　200062)

摘要　由于宇宙常数的存在, 时空为渐近de Sitter(dS)的时空. 文中将静态dS度规作为时空的近似刻画, 研究了在此度规下的一个洛伦兹破缺的电动力学模型. 通过张量的标架场分解的方法, 得到了静态dS时空中的电磁场方程. 另外, 分别研究了静态dS时空中点电荷的静电场和圈电流的静磁场, 并且同时讨论了在此模型下的洛伦兹破缺效应.

关键词　宇宙常数　洛伦兹破缺　de Sitter时空　标架场　电磁场

1　引言

历史上, 洛伦兹协变性是物理学最重大的发现之一, 在小尺度内, 它被越来越精确的实验所验证. 然而, 在大尺度的情况下, 许多观测暗示着确实存在一些不同寻常的东西(比如, 暗能量)很可能会破坏洛伦兹对称性. 因此很多研究者从不同的观点讨论了洛伦兹破缺的效应[1—5], 他们指出洛伦兹不变性可以看成是一个低能有效的对称性. 值得注意的是, 在适当的条件下, 普朗克尺度下的量子引力效应仍然能够被足够灵敏的实验所探测到, 这些效应必需要破坏一些既定的低能物理的原理, 比如洛伦兹对称性. 最近, 在弦理论, 圈量子引力理论, 非对易场论以及其他的关于普朗克尺度的理论[6]的讨论中都引入了洛伦兹破缺的效应. 另一方面, 最近的观测特别是对远处超新星的光度的观测[7]表明, 宇宙常数为正的小量, 我们的宇宙是一个加速膨胀的渐近dS的宇宙[8—10].

在关于洛伦兹破缺的研究中, Colladay和Kostelecký发展了一种叫做“标准模型扩展”(Stand Model Extension(SME))的理论[11, 12], 他们把粒子物理标准模型作系统的扩展, 即在标准模型的拉氏量中加上在可重整化的部分所有可能的洛伦兹破缺项. 这个理论提供了一个计算有效场论可观测量的理论框架, 并且可以为许多实验工作提供拉氏量中一些有关洛伦兹破缺的参数的限制.

我们所关注的是在此SME理论框架下闵氏时空中洛伦兹破缺的经典电动力学. 由于正宇宙常数或暗能量的存在, 没有物质的时空不再是闵氏的, 而是渐近dS的. 因此, 洛伦兹协变的理论仅仅只是一个低能的有效理论, 现在它应当表现为在dS时空中的相应的协变形式. 对于闵氏时空中的观测者而言, 洛伦兹对称性是明显破缺的. 在dS流形上可以定义许多不同的度规, 选择不同的度规可以理解为按照不同的设定来破缺洛伦兹对称性, 我们选择的是明显洛伦兹破缺的静态度规, 尽管静态dS度规中的量子场论在弯曲时空量子场论中一个熟知的结果是一个有限温度场论[13], 但现在讨论的是闵氏时空中的洛伦兹破缺的电动力学, 因此这里的场论仍然是零温场论, 并不存在有限温度的问题. 定义闵氏时空中的观测量为相应于dS时空中的相应物理量的标架场分量.

在本文的第二节利用标架场的理论和微分几何的方法得到了静态dS时空中的电磁场方程的标架形式, 从而构建了洛伦兹破缺的电动力学的模型. 第三节重点研究了在此模型下的能量动量守恒的问题. 第四节, 作为洛伦兹破缺的电动力学的一个应用, 分别考虑了点电荷的静电场和圈电流的静磁场问题, 并给出相应的洛伦兹破缺的效应. 在论文的最后, 作了一个总结并讨论了洛伦兹破缺效应在观测方面的意义.

2006 – 02 – 20 收稿

1) E-mail: xxue@phy.ecnu.edu.cn

2　洛伦兹破缺的电动力学

利用局域标架场理论来建立洛伦兹破缺的经典电动力学. 在标架场理论中, 利用标架 ϑ^a_μ 可以在时空流形的任意一点的协变张量场的坐标分量 $T_{\lambda\mu\nu\cdots}$ 和该点局域标架场分量 $T_{abc\cdots}$ 之间建立联系

$$T_{\lambda\mu\nu\cdots}=\vartheta^a{}_\lambda\vartheta^b{}_\mu\vartheta^a{}_\nu\cdots T_{abc\cdots}\,. \tag{1}$$

在坐标基下, 时空的度规为 $g_{\mu\nu}$, 而在局域标架场中, 时空度规为闵氏度规 $\eta_{ab}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$.

现在引入dS时空和它的度规. dS时空 S_R 可以看作是一个嵌入在5维闵氏时空中(度规为 $\eta_{AB}=\mathrm{diag}(1,-1,-1,-1,-1)$)的4维超曲面

$$S_R:\ \eta_{AB}\xi^A\xi^B=-R^2\,,\quad \mathrm{d}s^2=\eta_{AB}\mathrm{d}\xi^A\mathrm{d}\xi^B, \tag{2}$$

其中 $A,B=0,\cdots,4$, 显然(2)式在 $SO(1,4)$ 群的作用下是不变的, dS时空的度规能够写成[14]:

$$\mathrm{d}s^2=\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}\xi^\mu\mathrm{d}\xi^\nu-\frac{K(\eta_{\mu\nu}\xi^\mu\mathrm{d}\xi^\nu)^2}{1+K(\eta_{\mu\nu}\xi^\mu\xi^\nu)}, \tag{3}$$

其中 $\mu,\nu=0,\cdots,3$, $K=\dfrac{1}{R^2}=\dfrac{\Lambda}{3}$, Λ是宇宙常数. 此度规在以下两种变换下是不变的(详细可参考文献[14]中的第387页), 其中一种是洛伦兹变换:

$$\xi'^\mu=L^\mu{}_\nu\xi^\nu, \tag{4}$$

另一类变换是“拟平移”,

$$\begin{aligned}\xi'^\mu&=\xi^\mu+a^\mu[(1+K\eta_{\rho\sigma}\xi^\rho\xi^\sigma)^{1/2}+bK\eta_{\rho\sigma}\xi^\rho a^\sigma]\\ b&=\frac{1-(1+K\eta_{\rho\sigma}a^\rho a^\sigma)^{1/2}}{K\eta_{\rho\sigma}a^\rho a^\sigma}\,.\end{aligned} \tag{5}$$

特别地, 这些变换把原点 $\xi^\mu=0$ 变到任意 a^μ. 对于(3)式给出的度规, 能够作一个坐标变换使之变得与“时间无关”:

$$\begin{aligned}x^i&=\xi^i=x'^i\exp(K^{1/2}t')\,,\\ \xi^0&=\frac{1}{\sqrt{K}}\left[\frac{K\boldsymbol{x}'^2}{2}\cosh(K^{1/2}t')+\right.\\ &\qquad\left.\left(1+\frac{K\boldsymbol{x}'^2}{2}\right)\sinh(K^{1/2}t')\right]\,,\\ t&=t'-\frac{1}{2K^{1/2}}\ln[1-K\boldsymbol{x}'^2\exp(2K^{1/2}t')]\,.\end{aligned} \tag{6}$$

于是(3)式变成

$$\mathrm{d}s^2=(1-K\boldsymbol{x}^2)\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}\boldsymbol{x}^2-\frac{K(\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x})^2}{1-K\boldsymbol{x}^2}\,. \tag{7}$$

此度规的时间和空间分离, 因而有好的时间定义, 而且空间部分正好是4维欧氏空间的3维球面, 拓扑等价于 $E^1\times S^3$. 它是明显洛伦兹破缺的, 注意到在变换(5)和(6)式下度规(7)式保持不变, 因此可以用这两个变换把空间原点 $x=0$ 变换为任意的 a. 选择球坐标, 可以把度规(6)写成

$$\mathrm{d}s^2=\sigma\mathrm{d}t^2-\frac{1}{\sigma}\mathrm{d}r^2-r^2\mathrm{d}\theta^2-r^2\sin\theta^2\mathrm{d}\phi^2\,, \tag{8}$$

其中 $\sigma=1-Kr^2$, 因此可以定义局域洛伦兹标架: $\vartheta^a_\mu, a=0,1,2,3$. 其中:

$$\vartheta^a_\mu=\mathrm{diag}\left(\sqrt{\sigma},\frac{1}{\sqrt{\sigma}},r,r\sin\theta\right)\,. \tag{9}$$

在广义相对论中, 可观测量是局域洛伦兹坐标中的矢量和张量分量. 在这里可以类似的定义闵氏时空中的观测量就是dS时空中对应物理量的矢量张量场的局域标架场分量, 这里关注的是电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度 $\boldsymbol{B}$.

为此, 定义4维电磁势

$$A^\mu=e^\mu_aA^a=\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\varphi,\sqrt{\sigma}A_r,\frac{1}{r}A_\theta,\frac{1}{r\sin\theta}A_\phi\right)\,. \tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned}e^\mu_a&=\eta_{ab}g^{\mu\nu}\vartheta^b_\nu=\mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}},\sqrt{\sigma},\frac{1}{r},\frac{1}{r\sin\theta}\right),\\ A^a&=(\varphi,A_r,A_\theta,A_\phi)\,,\end{aligned}$$

这里的 A^a 是4维“普通矢量”的分量[14]. “普通矢量”正是我们所寻找的可观测量. 因此协变1形式能够写成(在此定义 $x^\mu=(t,r,\theta,\phi)$):

$$A=A_\mu\mathrm{d}x^\mu=\sqrt{\sigma}\varphi\mathrm{d}t-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}A_r\mathrm{d}r-rA_\theta\mathrm{d}\theta-r\sin\theta A_\phi\mathrm{d}\phi\,. \tag{11}$$

现在可以引入电磁场强协变2形式: $F=\mathrm{d}A=\dfrac{1}{2}F_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu$. 为此首先定义“普通”电磁场强张量的分量 F_{ab}, 它能够被写成一个矩阵的形式:

$$F_{ab}=\begin{pmatrix}0&-E_r&-E_\theta&-E_\phi\\ E_r&0&B_\phi&-B_\theta\\ E_\theta&-B_\phi&0&B_r\\ E_\phi&B_\theta&-B_r&0\end{pmatrix}, \tag{12}$$

于是 $F_{\mu\nu}$ 就是:

$$F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & -E_r & -r\sqrt{\sigma}E_\theta & -r\sin\theta\sqrt{\sigma}E_\phi \\ E_r & 0 & \dfrac{r}{\sqrt{\sigma}}B_\phi & -\dfrac{r\sin\theta}{\sqrt{\sigma}}B_\theta \\ r\sqrt{\sigma}E_\theta & -\dfrac{r}{\sqrt{\sigma}}B_\phi & 0 & r^2\sin\theta B_r \\ r\sin\theta\sqrt{\sigma}E_\phi & \dfrac{r\sin\theta}{\sqrt{\sigma}}B_\theta & -r^2\sin\theta B_r & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

电磁场的作用量可以写为

$$I_M=\int(-F\wedge *F-A\wedge *j)\,, \tag{14}$$

符号“$*$”是Hodge算子.

另外, 我们注意到度规公式(7)的空间部分构造了一个正交曲线坐标系, 因此可以引入梯度, 散度和旋度的协变定义:

$$\tilde{\nabla}\psi=\mathrm{d}'\psi=\sqrt{\sigma}\psi_{,\,r}\vartheta^1+\frac{1}{r}\psi_{,\,\theta}\vartheta^2+\frac{1}{r\sin\theta}\psi_{,\,\phi}\vartheta^3\,, \tag{15}$$

$$\tilde{\nabla}\cdot\boldsymbol{f}=*'\mathrm{d}'*'f=\frac{2}{r}\sqrt{\sigma}f_r+\sqrt{\sigma}f_{r,\,r}+\frac{\cos\theta}{r\sin\theta}f_\theta+\frac{1}{r}f_{\theta,\,\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}f_{\phi,\,\phi}\,, \tag{16}$$

$$\tilde{\nabla}\times\boldsymbol{f}=*'\mathrm{d}'f=\left(\frac{\cos\theta}{r\sin\theta}f_\phi+\frac{1}{r}f_{\phi,\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}f_{\theta,\phi}\right)\vartheta^1+\left(\frac{1}{r\sin\theta}f_{r,\,\phi}-\sqrt{\sigma}f_{\phi,\,r}-\frac{\sqrt{\sigma}}{r}f_\phi\right)\vartheta^2+\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{r}f_\theta+\sqrt{\sigma}f_{\theta,\,r}-\frac{1}{r}f_{r,\,\theta}\right)\vartheta^3\,, \tag{17}$$

$$\tilde{\nabla}^2\psi=(\mathrm{d}'\delta'+\delta'\mathrm{d}')\psi=\frac{\sqrt{\sigma}}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sqrt{\sigma}\psi_{,\,r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\psi_{,\,\theta})+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\,, \tag{18}$$

在以上的式子中用符号“$\sim$”和“$,$”表示这里的梯度, 散度和旋度都是在子流形S^3上的, 而$\boldsymbol{f}$也是子流形S^3上的“普通矢量”, $\boldsymbol{f}=f_r\vartheta^1+f_\theta\vartheta^2+f_\phi\vartheta^3=(f_r,f_\theta,f_\phi)$, 它正好是4维“普通矢量” f^a的空间部分. 而线性独立基$\vartheta^i=\vartheta^i_\mu\mathrm{d}x^\mu$, $i=1,2,3$就给出了此3维“普通矢量”的方向.

注意到由(11)—(13)式, 可以得到$\boldsymbol{E}$和$\boldsymbol{B}$的标架形式. 通过一些基本的运算, 可以得到如下关系式

$$\boldsymbol{E}=-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\tilde{\nabla}(\sqrt{\sigma}\varphi)-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{19}$$

和

$$\boldsymbol{B}=\tilde{\nabla}\times\boldsymbol{A}\,, \tag{20}$$

其中$\boldsymbol{A}=(A_r,A_\theta,A_\phi)$, $\boldsymbol{E}=(E_r,E_\theta,E_\phi)$, $\boldsymbol{B}=(B_r,B_\theta,B_\phi)$.

另外, 注意到$F=\mathrm{d}A$是一个正合2形式,因此立刻可以得到Bianchi恒等式: $\mathrm{d}F=\mathrm{d}^2A\equiv 0$和动力学方程: $\delta F=*\mathrm{d}*F=j=j_\mu\mathrm{d}x^\mu$, 其中定义

$$j^\mu=\vartheta^\mu_a j^a=\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\rho,\sqrt{\sigma}j_r,\frac{1}{r}j_\theta,\frac{1}{r\sin\theta}j_\phi\right), \tag{21}$$

$j_a=(\rho,j_r,j_\theta,j_\phi)$. “普通”电流密度可以像以前一样定义: $\boldsymbol{j}=(j_r,j_\theta,j_\phi)$. 于是静态dS时空中的电磁场方程就可以写成

$$\tilde{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0, \tag{22}$$

$$\tilde{\nabla}\times(\sqrt{\sigma}\boldsymbol{E})+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0, \tag{23}$$

$$\tilde{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\rho, \tag{24}$$

$$\tilde{\nabla}\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\boldsymbol{j}. \tag{25}$$

而静态dS时空中的协变规范条件可以写为: $\delta A=0$写成我们熟悉的形式就是

$$\tilde{\nabla}\cdot(\sqrt{\sigma}\boldsymbol{A})+\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \tag{26}$$

这个dS规范在后面处理静磁场问题的时候特别重要.

3 能量动量张量守恒

现在考虑电磁场和物质的相互作用, 也即和一个静态dS时空中的荷流j^μ相互作用. 系统的拉氏量可以写成

$$\mathscr{L}_{\mathscr{M}}=\mathscr{L}_E+\mathscr{L}'_{\mathscr{M}}=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}-j_\mu A^\mu, \tag{27}$$

其中$\mathscr{L}_E=-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$是纯电磁项, $\mathscr{L}'_{\mathscr{M}}$是相互作用项. 于是电磁力可以通过作用量原理来得到

$$\begin{aligned} f^\mu&=F^\mu_{\ \gamma}j^\gamma=\left(e\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}}{\sqrt{\sigma}},\sqrt{\sigma}f_r,\frac{1}{r}f_\theta,\frac{1}{r\sin\theta}f_\phi\right),\\ \boldsymbol{f}&=(f_r,f_\theta,f_\phi)=e(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\,. \end{aligned} \tag{28}$$

当$K\to 0$, 洛伦兹破缺的电动力学就变成洛伦兹协变的, 电磁力也就同时变为洛伦兹力. 如果像通常那样定义能动张量的纯电磁项:

$$T^{\alpha\beta}_{\mathrm{em}}\equiv F^\alpha_{\ \gamma}F^{\alpha\beta}-\frac{1}{4}g^{\alpha\beta}F_{\lambda\delta}F^{\lambda\delta}\,, \tag{29}$$

那么洛伦兹破缺的电动力学的能量动量守恒律就可以写为

$$T^{\alpha\beta}_{\mathrm{em}\,;\,\beta}=-F^{\alpha}_{\ \beta}j^{\beta}=-f^{\alpha}\,, \tag{30}$$

符号“;”是协变导数的缩写. 把它写成标架形式:

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\,\tilde{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{S}+\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\frac{\partial\omega}{\partial t}=-\boldsymbol{j}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{E}\,, \tag{31}$$

$$\boldsymbol{S}=\sigma(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}),\omega=\frac{1}{2}(E^2+B^2),$$

$$\tilde{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\overleftrightarrow{\mathscr{J}}+\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\frac{\partial\boldsymbol{g}}{\partial t}-K(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E})=-\boldsymbol{f}\,, \tag{32}$$

$$\overleftrightarrow{\mathscr{J}}=-\boldsymbol{E}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}+\frac{1}{2}\overleftrightarrow{\mathscr{I}}(E^2+B^2),\boldsymbol{g}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}\,,$$

其中$\boldsymbol{S}$, ω, $\overleftrightarrow{\mathscr{J}}$和$\boldsymbol{g}$分别是系统的能流密度(坡印亭矢量), 能量密度, 电磁应力张量和动量密度. $\overleftrightarrow{\mathscr{I}}$是$S^3$中的单位张量. 这些方程明显不同于闵氏时空中的守恒方程.

4　静电场和静磁场

作为静态dS时空中电磁场方程的一个应用, 研究了处于$\boldsymbol{r}_0=(r_0,\theta_0,\phi_0)$的一个点电荷(电荷为$q$)的静电场. 但首先必须定义局域标架场上的点电荷, 这个问题涉及到静态dS时空中的电流守恒律, 即$\delta j=0$, 写成标架形式为

$$\tilde{\nabla}\boldsymbol{\cdot}(\sqrt{\sigma}\boldsymbol{j})+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\,. \tag{33}$$

再在参数空间把这个方程写为球坐标的形式:

$$\nabla\boldsymbol{\cdot}\tilde{\boldsymbol{j}}+\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\frac{\partial\rho}{\partial t}=0\,, \tag{34}$$

其中$\tilde{\boldsymbol{j}}=(\sqrt{\sigma}j_r,j_\theta,j_\phi)$. 因此$S^3$上$r_0$处的$\delta$函数就可以写为: $\delta'^{\,3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0})=\sqrt{\sigma}\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0})$, 现在可以设$\rho=q\delta'^{\,3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$. 利用前面得到的场方程, 静电势方程就变成

$$-\tilde{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\tilde{\nabla}(\sqrt{\sigma}\varphi)\right)=q\delta'^{\,3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0})\,. \tag{35}$$

利用球坐标, 把上式写成熟悉的形式, 即

$$-\nabla^2\varphi+K\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+3K\varphi+$$
$$2Kr\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{K^2r^2}{\sigma}=q\delta'^{\,3}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r_0}), \tag{36}$$

注意到这个方程必须是dS协变的, 而我们总可以在静态dS空间中做一个合适的“拟平移”让空间的原点从$x=0$变到任意a, 因此也总可以选择观测点就是空间坐标原点, 即在(36)式中让$r\to0$, 就有

$$-\nabla^2\varphi+3K\varphi=q\delta^3(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\,. \tag{37}$$

如果有合适的边界条件, 这个方程就很容易解. 在闵氏时空中, 选择边界条件是: 当$r_0\to\infty$时, $\varphi\to0$. (在dS时空中r_0不能趋向于无穷, 但由于dS时空的视界半径R非常大, 所以此时仍然可以说这个边界条件近似成立.) 得到

$$\varphi=\frac{q}{4\pi r_0}\mathrm{e}^{-\sqrt{3K}\,r_0}, \tag{38}$$

显然, 这个静电势比在洛伦兹协变的电磁理论中要衰减得快一点. 而观测点处的场强$\boldsymbol{E}$就变成

$$\boldsymbol{E}=-q\frac{\boldsymbol{r}_0}{4\pi r_0^3}\mathrm{e}^{-\sqrt{3K}\,r_0}+q\frac{\sqrt{3K}\boldsymbol{r}_0}{4\pi r_0^2}\mathrm{e}^{-\sqrt{3K}\,r_0}\,, \tag{39}$$

这个形式显然和库仑定律不同. 修正因子的存在使得静电势像一个汤川势, 而这个效应将在远场变得重要, 对很大尺度的宇宙观测也将有一定的影响. 然而, 由于$K=\dfrac{1}{R^2}=\dfrac{\Lambda}{3}$, R是一个非常大的距离参数, 也就是宇宙的“视界半径”, 在现有的实验条件下, 这个指数衰减的效应几乎可以忽略.

接下来考虑了静态dS时空中圈电流的静磁场. 在空间的某处$\boldsymbol{r}_0$放一个小圈电流(电流强度为I, 半径为a, 圆心在$\boldsymbol{r}_0$处), 观测者仍然和前面一样处于空间原点. 但此时和静电场有一点不同, 在考虑静电场的时候不需要考虑规范条件, 但在静磁场情形下, 必须要选择规范条件, 如前所述, (26)式就是我们需要的规范条件, 利用此规范, 可以得到

$$\tilde{\nabla}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{A}=\frac{K}{\sqrt{\sigma}}\boldsymbol{r}\boldsymbol{\cdot}\boldsymbol{A}\,. \tag{40}$$

按照洛伦兹破缺的电磁场方程, 矢势$\boldsymbol{A}$的微分方程就可以写成

$$\tilde{\nabla}\times(\tilde{\nabla}\times\boldsymbol{A})=\tilde{\boldsymbol{j}}\,(\boldsymbol{r}). \tag{41}$$

另一方面, 从(34)式,

$$\tilde{\boldsymbol{j}}\,(\boldsymbol{r})=\sqrt{\sigma}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}),\,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=j_r\vartheta^1+j_\theta\vartheta^2+j_\phi\vartheta^3, \tag{42}$$

就是局域坐标下的守恒电流. 然而必须要把矢势的微分方程写成球坐标的形式才知道如何去解这个微分方程. 为此, 发现S^3上的“普通矢量”$\boldsymbol{f}=f_r\vartheta^1+f_\theta\vartheta^2+f_\phi\vartheta^3$相应于一个3维欧氏空间中的矢量: $\boldsymbol{f}=\dfrac{1}{\sqrt{\sigma}}f_r\boldsymbol{e}_r+f_\theta\boldsymbol{e}_\theta+f_\phi\boldsymbol{e}_\phi$, 利用这个对应关系, 定义$\boldsymbol{A'}(\boldsymbol{r})=\dfrac{1}{\sqrt{\sigma}}A_r\boldsymbol{e}_r+A_\theta\boldsymbol{e}_\theta+A_\phi\boldsymbol{e}_\phi$, 于是规范条

件(40)式写成球坐标的形式就是

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}'=4KrA'_r+Kr^2A'_{r,r}, \tag{43}$$

而矢势的微分方程也就可以写成球坐标分量的形式

$$-(\nabla^2\boldsymbol{A}')_r+4KA'_r+6KrA'_r,r+Kr^2A'_{r,r,r}=\frac{1}{\sqrt{\sigma}}j_r, \tag{44}$$

$$-(\nabla^2\boldsymbol{A}')_\theta+[K(r(rA'_\theta)_{,r})_{,r}+3KA'_{r,\theta}]=j_\theta, \tag{45}$$

$$-(\nabla^2\boldsymbol{A}')_\phi+[K(r(rA'_\phi)_{,r})_{,r}+\frac{3}{\sin\theta}KA'_{r,\phi}]=j_\phi. \tag{46}$$

然而, 在此并没有任何理由说 $\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}j_r,j_\theta,j_\phi\right)$ 就是一个球坐标下的守恒流. 事实上, 静态dS时空中的守恒流只能由(34)式来定义, 由此定义, 得到通过导线截面的电流强度 I 的球坐标表达式

$$I=\int(\sqrt{\sigma}\boldsymbol{j})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}'=\int\sqrt{\sigma}j_r r\mathrm{d}\theta'\wedge r'\sin\theta'\mathrm{d}\phi'+\int j_\theta\mathrm{d}r'\wedge r'\sin\theta'\mathrm{d}\phi'+\int j_\varphi\mathrm{d}r'\wedge r'\mathrm{d}\theta'. \tag{47}$$

因此球坐标下守恒电流的表达式就是: $\boldsymbol{j}''(r)=\sqrt{\sigma}j_r\boldsymbol{e}_r+j_\theta\boldsymbol{e}_\theta+j_\phi\boldsymbol{e}_\phi$. 在此定义下, (44)式需要乘上一个 σ 因子. 在 $r\to0$ 时, 可以如下证明(44)—(46)式的对称解就是一个矢量方程的解. 容易看出当 K 趋于0时, 可以利用毕奥–萨伐尔定理得到中心在原点的圈电流的矢势, 然后将源放回到 $\boldsymbol{r}_0$, 就可以得到原点在场点处的矢势 A'_r,A'_θ,A'_ϕ. 于是假设在原点位于圈电流中心的球坐标中的解是 $A'_{r'},A'_{\theta'},A'_{\phi'}$, 容易证明唯一存在的矢势分量是 $A'_{\phi'}$ 且 $\boldsymbol{A}'(0)=A'_{\phi'}\boldsymbol{e}_{\phi'}=-A'_{\phi'}\sin\theta\sin(\phi-\phi_0)\boldsymbol{e}_r-A'_{\phi'}\cos\theta\sin(\phi-\phi_0)\boldsymbol{e}_\theta-A'_{\phi'}\cos(\phi-\phi_0)\boldsymbol{e}_\phi$, 其中 (r_0,θ_0,ϕ_0) 是在 $\boldsymbol{r_0}$ 处的球坐标, 把这个解代入到(44)—(46)式中的含 K 的项中, 并注意到当 $r\to0$ 时 $\sigma\to1$, 就可以得到矢量微分方程:

$$-\nabla^2\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r})+4K\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{j}'(\boldsymbol{r}), \tag{48}$$

此方程在参数空间的变换下是不变的, 为求解此方程可以在 r_0 处建立一个以 r_0 为原点的球坐标 (r',θ',ϕ'). 同样在此坐标下, 矢势中唯一存在的非零分量也只有 $A'_{\phi'}$, 且球坐标之间的变换关系式 $\boldsymbol{A}'(0)=A'_{\phi'}\boldsymbol{e}_{\phi'}=-A'_{\phi'}\sin\theta\sin(\phi-\phi_0)\boldsymbol{e}_r-A'_{\phi'}\cos\theta\sin(\phi-\phi_0)\boldsymbol{e}_\theta-A'_{\phi'}\cos(\phi-\phi_0)\boldsymbol{e}_\phi$ 仍然保持不变, 其中

$$\boldsymbol{A}'=A'_{\phi'}\boldsymbol{e}_{\phi'}=\frac{Ia}{4\pi}\oint_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{r_0^2+a^2-2r_0a\sin\theta'\cos\varphi}}\times\mathrm{e}^{-\sqrt{4K}\sqrt{r_0^2+a^2-2r_0a\sin\theta'\cos\varphi}}\,\boldsymbol{e}_{\phi'}, \tag{49}$$

当 $2r_0a\sin\theta'\ll r_0^2+a^2$ 时, 即在远场($r_0\gg a$)和近轴场($r_0\sin\theta'\ll a$)区域, 上面的积分能够做近似展开到三级:

$$A'_{\phi'}=\frac{Ia}{4\pi}\int\mathrm{d}\varphi\cos\varphi\left[\mathscr{P}\frac{r_0a\sin\theta'\cos\varphi}{(r_0^2+a^2)^{3/2}}+\mathscr{N}\frac{r_0^3a^3\sin^3\theta'\cos^3\varphi}{(r_0^2+a^2)^{7/2}}\right]=\frac{Ia}{4\pi}\left[\mathscr{P}\frac{r_0a\sin\theta'}{(r_0^2+a^2)^{3/2}}+\frac{3}{4}\mathscr{N}\frac{r_0^3a^3\sin^3\theta'}{(r_0^2+a^2)^{7/2}}\right], \tag{50}$$

其中

$$\mathscr{P}=\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{4K(r_0^2+a^2)}}}{2}\left(1+\sqrt{4K(r_0^2+a^2)}\right),$$

$$\mathscr{N}=\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{4K(r_0^2+a^2)}}}{48}\{15+15\sqrt{4K(r_0^2+a^2)}+24K(r_0^2+a^2)+[\sqrt{4K(r_0^2+a^2)}]^3\},$$

把原点变回到在观测点处, 令 $\theta'=\pi-\theta_0,\phi'=\phi_0-\pi$, 于是观测点处的圈电流的矢势 $\boldsymbol{A}$ 就是

$$\boldsymbol{A}(0)=\boldsymbol{A}'(0)=A'_r\boldsymbol{e}_r+A'_\theta\boldsymbol{e}_\theta+A'_\phi\boldsymbol{e}_\phi=-A'_{\phi'}\sin\theta\sin(\phi-\phi_0)\boldsymbol{e}_r-A'_{\phi'}\cos\theta\sin(\phi-\phi_0)\boldsymbol{e}_\theta-A'_{\phi'}\cos(\phi-\phi_0)\boldsymbol{e}_\phi. \tag{51}$$

这个解表明矢势中同样有一个指数衰减因子, 因而磁场强度肯定也带有同样的指数衰减因子. 这个效应和静电场的效应都可以看作是洛伦兹破缺的效应, 在很大尺度的观测中, 这个洛伦兹破缺的效应就变得重要.

5 总结和讨论

总括全文, 将静态dS时空中协变的电动力学看作是在闵氏时空中的一个低能洛伦兹破缺的经典电动力学模型. 另外, 把物理的张量场的标架场分量定义为可观测量, 在标架场形式下, 得到了电磁场方程并研究了在此洛伦兹破缺的模型下的能量动量守恒律. 最后作为洛伦兹破缺的电磁场理论的应用并且赋予该理论实验意义, 我们分别研究了两个基本的问题: 点电荷的静电场和圈电流的静磁场. 我们发现在两种情况下都有一个类似的指数衰减因子, 这个效应可以看作是一个典型的洛伦兹破缺的效应, 对很大尺度上的观测将有重要的影响.

参考文献(References)

1 Kostelecky V A, Mewes Matthew. Phys. Rev., 2002, **D66**: 056005

2 Jackiw R, Kostelecky V A. Phys. Rev. Lett., 1999, **82**: 3572

3 Coleman S, Glashow S L. hep-ph/9812418

4 Lehmert R, Potting R. hep-ph/0408285

5 Bluhm R, Kostelecky V A. Phys. Rev., 2005, **D71**: 065008

6 Jacobson Ted, Liberati Stefano, Mattingly David. Lorentz Violation at High Energy: Concepts, Phenomena and Astrophysical Constraints. Astro-ph/0505267

7 Perlmutter S et al. Astrophys. J., 1999, **517**: 565. astro-ph/9812133

8 Riess A G et al. Astro. J., 1998, **116**: 1009

9 Slusher R E, Eggleton B J(Eds.). Nonlinear Photonic Crystals. Berlin: Springer-Verlag, 2003. and References Therein

10 Benett C L et al. Astrophys. J., 2003, **148**(Suppl.): 1

11 Colladay D, Kostelecky V A. Phys. Rev., 1998, **D58**: 116002

12 Kostelecky V A. Proceedings of the Second Meeting on CPT and Lorentz Symmetry. Bloomington, USA, 15—18 August 2001, Singapore, World Scientific, 2002

13 Spradlin Marcus, Strominger Andrew, Volovich Auastasia. Les Houches Lectures on de Sitter Space. arXiv:hep-th/0110007

14 Weinberg S. Gravity and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. John Wiley, 1971

Lorentz-Violating Electrodynamics Model

WU Jian-Feng　XUE Xun[1)]

(Department of Physics and Institute of Theoretical Physics East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract We propose an effective Lorentz-violating electrodynamics model via static de Sitter metric which is deviated from Minkowski metric by a minuscule amount depending on the cosmological constant. We obtain electromagnetic field equations via the vierbein decomposition of tensors. In addition, as an application of the electromagnetic field equations obtained, we get the solutions of electrostatic field and magnetostatic field due to a point charge and a circular current loop respectively. We also make some discussion on the implication of the Lorentz violation effect in our electromagnetic theory.

Key words cosmological constant, Lorentz-violation, de Sitter space-time, vierbein, electromagnetic field

Received 20 February 2006

1) E-mail: xxue@phy.ecnu.edu.cn