

3 维 $U(1)$ 改进格点规范理论中 胶球质量和胶球波函数*

江俊勤¹⁾

(广东教育学院物理系 广州 510303)

摘要 用改进的格点规范场哈密顿量和截断本征方程法计算 2+1 维 $U(1)$ 规范场的胶球质量(质量隙)和胶球波函数,结果显示出了较好的标度行为.

关键词 $U(1)$ 格点规范理论 改进哈密顿量 胶球质量 胶球波函数

1 引言

格点规范理论从第一原理出发,是研究规范场非微扰性质的最可靠方法.哈密顿量形式的格点规范理论的优点,在于它既能计算粒子(如:胶球、介子等)的质量又能计算粒子的波函数(这是作用量形式的格点规范理论难以做到的),而粒子波函数可用于计算粒子的产生和衰变,为实验寻找新型粒子提供更多有用的物理信息.

近年来,为了减小有限格距误差,通过在格点哈密顿量中加入近邻或次近邻相互作用项,对格点哈密顿量做了改进^[1,2].对于胶子哈密顿量,改进后有限格距误差由原来的 $O(a^2)$ 减小到 $O(a^4)$.对于 $U(1)$ 规范场改进的格点哈密顿量可写成^[3]

$$H = \frac{g^2}{2a} \sum_{x,i} \left\{ \frac{1 + C'^2}{(1 - C')^2} E_i^\alpha(x) E_i^\alpha(x) - \frac{2C'}{(1 - C')^2} U_i^\dagger E_i^\alpha(x) U_i(x) E_i^\alpha(x + i) \right\} - \frac{1}{g^2 a} \sum_{x,i < j} \left\{ C'_1 \frac{P_{ij} + P_{ji}}{2} + C'_2 (R_{ij} + R_{ji}) \right\}, \quad (1)$$

式中 a 为格距, g 为无量纲的耦合常数,它与不变荷 e 的关系为 $g^2 = e^2 a$, E_i^α 为规范场色电场强,

$$C'_1 = 5/3, C'_2 = -1/12, C' = -5 + \sqrt{6},$$

$$\sum_{x,i < j} P_{ij} = \sum_{x,i < j} P_{ji} = (\text{图} + \text{h.c.})/2, \quad (2)$$

$$\sum_{x,i < j} R_{ij} = \frac{1}{2} (\text{图} + \text{h.c.}),$$

$$\sum_{x,i < j} R_{ji} = \frac{1}{2} (\text{图} + \text{h.c.}). \quad (3)$$

在文献[3]中,用改进的格点哈密顿量计算了 2+1 维 $U(1)$ 规范场的真空波函数,获得了好的结果.本文在此基础上进一步用改进的格点哈密顿量计算 2+1 维 $U(1)$ 规范场的胶球质量(质量隙)和胶球波函数.

2 真空态和胶球态的截断本征方程

2.1 真空态的截断本征方程

为了求胶球质量(质量隙)和胶球波函数,必须先了解真空态.

取真空态为

$$|\Omega\rangle = \exp(R) |0\rangle, \quad (4)$$

式中 $|0\rangle$ 为裸真空,由 $E_i^\alpha(x) |0\rangle = 0$ 确定, R 由 Wilson 圈组成,可按圈图的阶展开

$$R = R_1 + R_2 + \dots \quad (5)$$

2004-03-31 收稿

* 广东省高校自然科学研究项目(Z02083)和广东教育学院教授博士专项基金资助

1) E-mail: jqjiang@gdei.edu.cn

将(1)和(4)式代入本征方程 $H|\Omega\rangle = \epsilon_\Omega|\Omega\rangle$, 并利用

$$e^{-R}He^R = H - [R, H] + \frac{1}{2!}[R, [R, H]] - \frac{1}{3!}[R, [R, [R, H]]] + \dots, \quad (6)$$

可求得 N 阶截断本征方程

$$\begin{aligned} & B_1' \left\{ \sum_{x,i} [E_i^\alpha(x), [E_i^\alpha(x), R]] + \sum_{\substack{x,i \\ n_1+n_2 \leq N}} [E_i^\alpha(x), R_{n_1}][E_i^\alpha(x), R_{n_2}] \right\} + \\ & B_2' \left\{ \sum_{x,i} [E_i^\alpha(x), [E_i^\alpha(x+i), R]] + \sum_{\substack{x,i \\ n_1+n_2 \leq N}} [E_i^\alpha(x+i), R_{n_1}][E_i^\alpha(x), R_{n_2}] \right\} - \\ & C_1' \frac{2}{g^4} \sum_{x,i < j} P_{ij} - C_2' \frac{2}{g^4} \sum_{x,i < j} (R_{ij} + R_{ji}) = \frac{2a}{g^2} \epsilon_\Omega, \quad (7) \end{aligned}$$

$$\text{式中 } B_1' = \frac{1 + C'^2}{(1 - C')^2} = \frac{5}{6}, B_2' = \frac{-2C'}{(1 - C')^2} = \frac{1}{6}.$$

2.2 胶球态的截断本征方程

取胶球态为

$$|\Psi\rangle = (G - \langle G \rangle) |\Omega\rangle = (G - \langle G \rangle) \exp(R) |0\rangle, \quad (8)$$

G 也由 Wilson 圈组成, 按圈图的阶展开

$$G = G_1 + G_2 + \dots. \quad (9)$$

用类似于获得(7)式的步骤, 可求得胶球态的 N 阶截断本征方程

$$\begin{aligned} & \frac{5}{6} \left\{ \sum_{x,i} [E_i^\alpha(x), [E_i^\alpha(x), G]] + 2 \sum_{\substack{x,i \\ n_1+n_2 \leq N}} [E_i^\alpha(x), R_{n_1}][E_i^\alpha(x), G_{n_2}] \right\} + \\ & \frac{1}{6} \left\{ \sum_{x,i} [E_i^\alpha(x+i), [E_i^\alpha(x), G]] + \sum_{\substack{x,i \\ n_1+n_2 \leq N}} [E_i^\alpha(x+i), R_{n_1}][E_i^\alpha(x), G_{n_2}] + \sum_{\substack{x,i \\ n_1+n_2 \leq N}} [E_i^\alpha(x+i), G_{n_1}][E_i^\alpha(x), R_{n_2}] \right\} = \\ & \frac{2aM_S}{g^2} G, \quad (10) \end{aligned}$$

式中 M_S 为对称的最低激发态胶球质量(质量隙).

3 胶球质量和胶球波函数的计算

取一阶圈图为

$$R_1 = C_1 \sum_p (U_p + U_p^+) = C_1 (\square + \text{h.c.}), \quad (11)$$

由 R_1 和(7)式的对易子, 可产生二阶 Wilson 圈图:

$$R_2 = C_2 \square + C_3 \square + C_4 \square + C_5 \square + C_6 \square + \text{h.c.}, \quad (12)$$

再由 R_1, R_2 和(7)式的对易子, 可产生三阶 Wilson 圈图, ...

把(5)式代入(7)式, 可求得 C_1, C_2, C_3, \dots 随 $1/g^2$ 变化的关系; 从而求得 R_1, R_2, \dots 随 $1/g^2$ 变化的关系.

取 G 的各阶图与 R 相同, 即

$$G_1 = B_1 \sum_p (U_p + U_p^+) = B_1 (\square + \text{h.c.}), \quad (13)$$

$$G_2 = B_2 \square + B_3 \square + B_4 \square + B_5 \square + B_6 \square + \text{h.c.} \dots \quad (14)$$

把 R_1, R_2, \dots 和 G_1, G_2, \dots 代入(10)式, 可求得 B_1, B_2, B_3, \dots 和 M_S 随 $1/g^2$ 变化的关系.

由于低能谱主要起源于长波激发, 因此用格点方法研究规范场胶球态的长波行为. 对于 $2+1$ 维 $U(1)$ 规范场, 在连续极限下, 长波行为胶球波函数可写成

$$|\Psi\rangle = N \exp \left\{ -\mu_{f0} \iint F_{12}^2(x, y) dx dy - \mu_{f2} \iint F_{12}(x, y) (D_1^2 + D_2^2) F_{12}(x, y) dx dy + \text{高阶项} \right\}, \quad (15)$$

式中 $F_{12}(x, y)$ 为场强张量, D_1, D_2 为协变导数, 展开系数 μ_{f0} 和 μ_{f2} 的表达式可以通过研究 Wilson 圈图的连续极限行为求得

$$\mu_{f0} = g^2 a \sum_n B_n (N_1 - N_2)^2,$$

$$\mu_{f2} = g^2 a^3 \sum_n B_n \left\{ \frac{1}{12} (N_1 - N_2)^2 - \frac{1}{2} \left[\left(\sum_{l=1}^{N_1} x_l - \sum_{m=1}^{N_2} \tilde{x}_m \right)^2 + \left(\sum_{l=1}^{N_1} y_l - \sum_{m=1}^{N_2} \tilde{y}_m \right)^2 \right] + \frac{1}{2} (N_1 - N_2) \left[\sum_{l=1}^{N_1} (x_l^2 + y_l^2) - \sum_{m=1}^{N_2} (\tilde{x}_m^2 + \tilde{y}_m^2) \right] \right\}, \quad (16)$$

式中 $N_1 (N_2)$ 为圈图所含 $U_p (U_p^+)$ 的数目, (x_l, y_l)

为第 l 个 U_p 的中心坐标, $(\tilde{x}_m, \tilde{y}_m)$ 为第 m 个 U_p^+ 的中心坐标.

把 B_1, B_2, B_3, \dots 代入(16)式, 可求得 μ_{f0} 和 μ_{f2} 随 $1/g^2$ 变化的关系.

4 数值结果与讨论

因为 $2+1$ 维 $U(1)$ 规范场的胶球质量(质量隙)的标度行为被预期用指数描写^[4-9]

$$M^2 a^2 \sim \frac{k_1}{g^2} \exp\left(-\frac{k_2}{g^2}\right) a s a \rightarrow 0, \quad (17)$$

所以在标度区间内, $\ln(M^2 a^2 g^2)$ 的标度行为被期望为斜率等于 $-k_2$ 的直线:

$$\ln(M^2 a^2 g^2) \sim \ln k_1 - k_2 \frac{1}{g^2}. \quad (18)$$

如果仅取至一阶截断, 则计算结果没有正确的标度行为, 这是由于只取到一阶截断时, 波函数过于简单了. 因此, 和文献[3]一样, 本文也计算到二阶截断, 图 1 给出了 $\ln(M_S^2 a^2 g^2)$ 与 $1/g^2$ 的依赖关系.

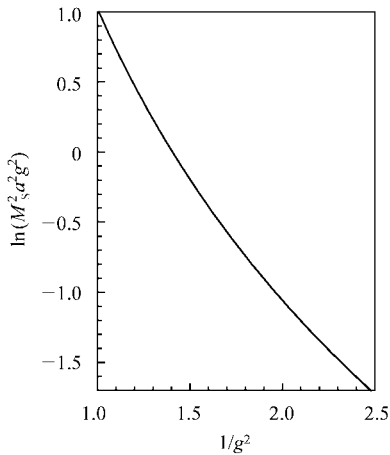


图 1 $\ln(M_S^2 a^2 g^2)$ 与 $1/g^2$ 的关系

从(16)和(17)式可知, 如果定义

$$\mu'_{f0} = 2\ln\left(\frac{\mu_{f0}}{g a}\right), \mu'_{f2} = \frac{2}{3}\ln\left(\frac{\mu_{f2}}{g^3 a^3}\right), \quad (19)$$

则预期 μ'_{f0} 和 μ'_{f2} 的标度行为是斜率等于 k_2 的直线:

$$\mu'_{f0} \sim 2\ln\left(\frac{\mu_{f0} M}{\sqrt{k_1}}\right) + k_2 \frac{1}{g^2}, \mu'_{f2} \sim \frac{2}{3}\ln\left(\frac{\mu_{f2} M}{\sqrt{k^3}}\right) + k_2 \frac{1}{g^2}. \quad (20)$$

图 2 和图 3 分别给出了 μ'_{f0} 和 μ'_{f2} 与 $1/g^2$ 的依赖关系.

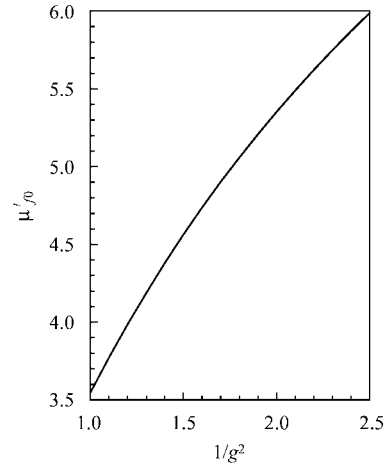


图 2 μ'_{f0} 与 $1/g^2$ 的关系

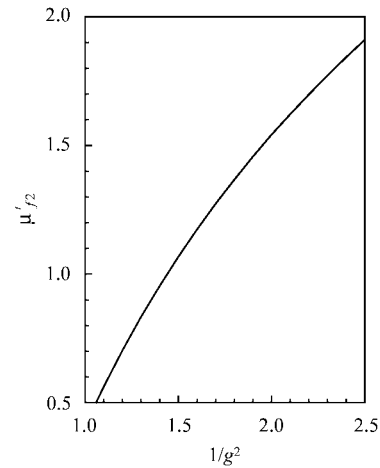


图 3 μ'_{f2} 与 $1/g^2$ 的关系

据笔者所知, $2+1$ 维 $U(1)$ 规范场胶球波函数的计算, 在以前的相关文献中尚没有报道过. 本文使用改进的格点哈密顿量, 不但计算了 $2+1$ 维 $U(1)$ 规范场中对称的最低激发态胶球质量(质量隙) M_S , 还首次对其胶球波函数进行了计算. 从图 1—3 可见, 二阶结果已经显示出较好的标度行为, 当然, 由于 $2+1$ 维 $U(1)$ 规范场的胶球质量和胶球波函数都是指数标度行为, 理论所预期的斜率(按文献[6], $k_2 = 4.1$)是不容易到达的, 本文所得到的结果还未能达到预期的斜率, 特别是 μ'_{f2} 的斜率还比较低, 相信高阶计算可以进一步改善标度行为.

参考文献 (References)

- (江俊勤, 罗向前, 郭硕鸿等. 高能物理与核物理, 1999, **23**(12): 1152)
- 1 LUO X Q, CHEN Qi-Zhou, XU Guo-Cai et al. Phys. Rev., 1994, **D50**: 501;
 - 2 LUO X Q, GUO S H, Kröger H et al. Phys. Rev., 1999, **D59**: 034503
 - 3 JIANG Jun-Qin, LUO Xiang-Qian, GUO Shuo-Hong et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1999, **23**(12): 1152(in Chinese)
 - 4 Cöpfung M, Mack G. Commun. Math. Phys. 1982, **82**: 545
 - 5 Hamer C J, Irving A C. Z. Phys. 1985, **C27**: 145
 - 6 Lana C. Phys. Rev., 1988, **D38**: 1954
 - 7 Dabringhaus A, Ristig M L, Clark J W. Phys. Rev., 1991, **D43**: 1978
 - 8 Hamer C J, Oitmaa J, ZHENG Wei-Hong. Phys. Rev., 1992, **D45**: 4652
 - 9 FANG Xi-Yan, LIU Jin-Ming, GUO Shuo-Hong. Phys. Rev., 1996, **D53**: 1523

Mass Gap and Glueball Wave Function for $U(1)$ Improved Lattice Gauge Theory in Three-Dimensions *

JIANG Jun-Qin¹⁾

(Department of Physics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou 510303, China)

Abstract Using the improved Hamiltonian of lattice gauge field and the truncated eigenvalue equation, we compute the glueball mass (mass gap) and glueball wave function of three-dimensional $U(1)$ lattice gauge field. The result shows a good scaling behavior.

Key words lattice gauge theory, improved Hamiltonian, glueball mass, glueball wave function

Received 31 March 2004

* Supported by Natural Science Foundation of the Education Department of Guangdong Province of China (Z02083) and Professor Foundation of Guangdong Education Institute

1) E-mail: jqjiang@gdei.edu.cn