第 29 卷 第 12 期 高 能 物 理 与 核 物 理 Vol. 29, No. 12
2005 年 12 月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS Dec., 2005

't Hooft 黑洞量子态理论的一个推论*

白桦[1)] 闫沐霖[2)]

(中国科学技术大学近代物理系 合肥 230026)

摘要 从't Hooft将黑洞作为高度简并的量子态的理论出发, 考虑黑洞的量子效应, 由于海森堡测不准原理, 导出视界面上的时空坐标是非对易的. 利用非对易场论的办法, 研究了大的远离极端情况的Reissner-Nordström黑洞, 成功的同时推导出黑洞的温度和熵. 而且预言了场的动力学自由度的数目, 该数目支持了最小超对称标准模型.

关键词 海森堡不确定原理 准定域(Quasilocal)能量 Hawking辐射 黑洞熵 't Hooft砖墙模型

1 引言

在文献[1—3]中, 't Hooft将黑洞看成量子态, 利用量子力学的基本原理推导出Schwarzschild黑洞熵的表达式, 这为我们探讨黑洞熵的统计力学起源问题提供了启发. 在本文中, 将推广这一方法, 使之能适用于远离极端情况的大的Reissner-Nordström黑洞, 并将我们提出的黑洞量子视界模型[4, 5]来计算黑洞的温度和熵, 从而更深刻的揭示黑洞量子态的物理. 黑洞的度规为

$$\mathrm{d}s^2 = -B(r)\mathrm{d}t^2 + B(r)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2(\theta)\mathrm{d}\varphi^2)\,, \tag{1}$$

这里的$B(r)=(r-r_+)(r-r_-)/r^2$, $r_\pm = M\pm\sqrt{M^2-Q^2}$. $r=r_+$处为黑洞的事件视界. 远离极端情况的大黑洞条件意味着$r_+\gg l_\mathrm{p}$, 和$r_+-r_-\gg l_\mathrm{p}$, 这里的$l_\mathrm{p}=\sqrt{G}$是Planck长度(在本文中, $\hbar=c=1$). 黑洞的Hawking温度为$T_\mathrm{BH}=(r_+-r_-)/(4\pi r_+^2)$. 对于一个缓慢运动的非相对论性出射粒子, 散射截面σ近似为

$$\sigma = \pi r_+^2\,, \tag{2}$$

对于给定的量子态, 在大的体积$V=L^3$中,此时粒子的发射几率$W\mathrm{d}t$为

$$W\mathrm{d}t = \frac{\sigma(K)v}{V}\mathrm{e}^{(-\omega+V_0q)/T_\mathrm{BH}}\,, \tag{3}$$

这里的K是刻划量子态的波数, v是粒子的速度, q是粒子的电荷, ω是粒子的能量, $V_0=Q/r_+$是在视界面$r=r_+$处的电势.

现在, 假设该过程由薛定鄂方程所描述. 这也意味着存在量子力学的跃迁振幅.

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\mathrm{in} &= {}_\mathrm{BH}\langle M+\omega, Q+q|\ |M,Q\rangle_\mathrm{BH}|\omega,q\rangle_\mathrm{in}\,,\\ \mathcal{T}_\mathrm{out} &= {}_\mathrm{BH}\langle M,Q|_\mathrm{out}\langle\omega,q|\ |M+\omega,Q+q\rangle_\mathrm{BH}\,,\end{aligned} \tag{4}$$

这里的$|M,Q\rangle_\mathrm{BH}$表示具有质量M和电荷Q的黑洞的量子态, $|\omega,q\rangle$表示带有电荷q能量为ω的粒子. 利用费米黄金规则, 截面和发射几率可写为

$$\sigma = |\mathcal{T}_\mathrm{in}|^2\rho(M+\omega,Q+q)/v\,, \tag{5}$$

$$W = |\mathcal{T}_\mathrm{out}|^2\rho(M+\omega)/V\,, \tag{6}$$

这里的$\rho(M,Q)$是具有质量M, 电荷Q的黑洞量子态的能级密度. 显然$\mathcal{T}_\mathrm{in}$和$\mathcal{T}_\mathrm{out}$是CPT反演不变的. 那么利用等式(3), (5)和(6), 有

$$\frac{\rho(M+\omega,Q+q)}{\rho(M,Q)} = \mathrm{e}^{(\omega-V_0q)/T_\mathrm{BH}}\,. \tag{7}$$

注意到$\rho(M,Q)=\exp(S)$, 因此有

$$S(M+\mathrm{d}M,Q+\mathrm{d}Q)-S(M,Q) = \frac{1}{T_\mathrm{BH}}\mathrm{d}M - \frac{V_0}{T_\mathrm{BH}}\mathrm{d}Q\,, \tag{8}$$

那么可推导出

$$\frac{\partial S(M,Q)}{\partial M} = \frac{1}{T_\mathrm{BH}} = 2\pi G\left(2M+\frac{2M^2-Q^2}{\sqrt{M^2-Q^2}}\right)\,, \tag{9}$$

2005 – 04 – 12 收稿

* 国家自然科学基金(90403021)和教育部博士点基金资助

1) E-mail: huabai@mail.ustc.edu.cn

2) E-mail: mlyan@ustc.edu.cn

$$\frac{\partial S(M,Q)}{\partial Q}=-\frac{V_0}{T_{\mathrm{BH}}}=-2\pi GQ\left(\frac{M}{\sqrt{M^2-Q^2}}+1\right). \tag{10}$$

由方程(9)和(10)式解得

$$S(M,Q)=G\pi\left(M+\sqrt{M^2-Q^2}\right)^2+C=\frac{A}{4l_{\mathrm{p}}^2}+C, \tag{11}$$

这里的$A/(4l_{\mathrm{p}}^2)=S_{\mathrm{BH}}$是黑洞的Bekenstein-Hawking熵, $A=4\pi r_+^2$是黑洞视界的面积, C是积分常数, 可令$C=0$. 这样, 't Hooft黑洞是量子态的理论被推广到带电黑洞, 并且黑洞的热力学第一定理被成功的推导出来. 在此理论的基础上, 't Hooft提出了砖墙模型, 计算了在给定度规下标量场的自由度. 由于黑洞视界存在的坐标奇点引起辐射粒子的自由度在该处发散, 't Hooft建议引入一个紫外截断h(或砖墙厚度). 考虑一个标量场在给定度规(1)式中运动, 其作用量为

$$I=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}x^4\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi^{N'}\partial_\nu\phi^{N'},\quad (r_++h<\phi<L), \tag{12}$$

这里的N'为标量场ϕ的多重态数目, 边界条件为当$r>L$或$r<r_++h$时$\phi(r)=0$. 通过对场的变分$\delta I/\delta\phi^{N'}=0$得到弯曲时空中的Klein-Gorden的运动方程

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi^{N'})=0, \tag{13}$$

设$\phi^{N'}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t+\mathrm{i}\int k(r)\mathrm{d}r}Y_{lm}(\theta,\varphi)$, 这里的$\omega$为$\phi$场的能量, $k(r)$为波数. 利用WKB近似, 解得ϕ场的波数$k(\omega,r,l,m)$为

$$k^2=\frac{r^2}{(r-r_+)(r-r_-)}\left(\frac{r^2}{(r-r_+)(r-r_-)}\omega^2-\frac{1}{r^2}l(l+1)\right), \tag{14}$$

能量ω下的态数目$g(\omega)$为

$$g(\omega)=N'\int\mathrm{d}l(2l+1)\int_{r_++h}^{L}\mathrm{d}rk(r)=\frac{2}{3}N'\int_{r_++h}^{L}\mathrm{d}r\frac{r^6\omega^3}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2}, \tag{15}$$

由此可以求得自由能为

$$\pi\beta F=\int\mathrm{d}g(\omega)\ln(1-\mathrm{e}^{-\beta\omega})=-\int_0^\infty\mathrm{d}\omega\frac{\beta g(\omega)}{\mathrm{e}^{\beta\omega}-1}=-\frac{2N'}{3}\int_0^\infty\mathrm{d}\omega\frac{\beta\omega^3}{\mathrm{e}^{\beta\omega}-1}\int_{r_++h}^{L}\mathrm{d}r\frac{r^6}{(r-r_+)^2(r-r_-)^2}, \tag{16}$$

这里的$\beta=T_{\mathrm{BH}}^{-1}$为黑洞的逆温度. 黑洞视界对自由能的主导贡献为

$$F\approx-N'\frac{2\pi^4}{45}\frac{r_+^6}{(r_+-r_-)^2\beta^4h}, \tag{17}$$

由此容易得到黑洞的熵为

$$S=\beta^2\frac{\partial F}{\partial\beta}=\frac{N'(r_+-r_-)}{360h}. \tag{18}$$

根据黑洞热力学, 黑洞的Bekenstein-Hawking熵为$S_{\mathrm{BH}}=A/4$. 将计算的结果和标准Bekenstein-Hawking熵相比较, 发现当

$$h=\frac{N'(r_+-r_-)}{360\pi r_+^2}l_{\mathrm{p}}^2 \tag{19}$$

时, $S=S_{\mathrm{BH}}$. 看到砖墙厚度h不仅依赖于标量场多重态的数目N',而且还与黑洞的参数相关.

2 视界面上非对易坐标的导出

对't Hooft的砖墙模型有两点评论. 首先, 由于视界面存在的坐标奇点将导致计算的结果将是发散的(即$h\to0$的情况), 因此't Hooft的砖墙模型中引入了砖墙厚度, 但是该砖墙厚度不能由理论本身所给出, 而是通过正规化到黑洞的Bekenstein-Hawking熵而得到的. 而且从上面的推导过程看出, 如果不通过正规化过程, 其计算结果并不能揭示黑洞熵与面积成正比这一重要结果. 其次, 模型计算中的利用到的黑洞温度不能由模型给出. 因为存在黑洞的砖墙, 无法得知视界上的波函数的性质, 因而无法计算黑洞温度. 下面把't Hooft将黑洞作为量子态理论进行推广, 希望能够解决原砖墙模型所带有的困难, 与此相关的研究工作可参考文献[4,5].

如引言所述, 黑洞应被看成是具有高度简并的量子态而不是经典的客体. 依据这一理论和量子力学的基本原理, 应当认为黑洞的能量和它所对应的共厄时间不能被同时测量准确(海森堡测不准原理). 这意味着当E和t被看成是算符时, 有$[t,E]=i$. 另一方面, 人们普遍相信量子态主要集中在视界面上, 在视界外的态密度将变的很小. 因而, 黑洞量子态的能量E应近似的等于定域在视界附近的黑洞的引力能而不是在无穷远的. 很久以前大家就认识到在广义相对论中能量是准定域的. 在本文中, 按照Brown-York的准定域能量(QLE)的定义(见文献[6]), 并且黑洞的能量E_{QLE}是依赖坐标的. 那么, 量子态的能量E便成为$E=E_{\mathrm{QLE}}(r=r_+)$.

按照Brown-York的准定域能量的定义[6], 黑洞所对应的能量为

$$E(r)_{\mathrm{QLE}}=r\left(1-\sqrt{B(r)}\right)/G. \tag{20}$$

当处在视界面上, 即$r=r_+$时, 等式$B=0$此时$E(r_+)_{\mathrm{QLE}}=r_+/G$成立, 那么黑洞在视界处的能量

为$E=E_{\mathrm{QLE}}(r=r_+)=r_+/G$. 依据这一等式, 把不确定关系中的能量$E$替换为视界处所在的坐标$r_+$, 那有如下对易关系:

$$[t,r]|_{r=r_+}=\mathrm{i}l_{\mathrm{p}}^2. \tag{21}$$

上式意味着在视界面上径向坐标和时间坐标式非对易的. 它们之间的不确定关系是$(\Delta t)(\Delta r)|_{r\sim r_+}\sim l_{\mathrm{p}}^2$. 类似这样的时空不确定关系并非在我们的理论中首次出现, 在弦理论当中也出现了相似的关系[7]. 另一方面, 对应于量子力学中的观测效应, r_+会有一个弥散的区域$\{r_+-\Delta, r_++\Delta\}$, 在这里为了简单起见, 标记如下关系: $\Delta r=\Delta$, 弥散的区域为$\mathscr{R}_{\mathrm{I}}$, 在弥散区域之外为$\mathscr{R}_{\mathrm{II}}$. 如此, 先前的经典视界就弥散成为量子视界, 并且等式(21)可被扩展为$[t,r]|_{r\in\mathscr{R}_{\mathrm{I}}}=\mathrm{i}l_{\mathrm{p}}^2$. 在$\mathscr{R}_{\mathrm{I}}$中的量子场论是非对易的. 在非对易区间$\mathscr{R}_{\mathrm{I}}$的外部, 将采取最保守的态度, 即认为量子场又退回到通常的对易情况$[t,r]|_{r\in\mathscr{R}_{\mathrm{II}}}=0$.

3 作用量和运动方程

按照如上的讨论, 将构造一个弯曲时空中的量子场论模型, 其中的外场ϕ在$\mathscr{R}_{\mathrm{I}}$区中是非对易的, 在$\mathscr{R}_{\mathrm{II}}$区中是对易的. 如何确定该$\mathscr{R}_{\mathrm{I}}$区和$\mathscr{R}_{\mathrm{II}}$区的边界是该模型成立的关键. 我们发现$\mathscr{R}_{\mathrm{I}}$区和$\mathscr{R}_{\mathrm{II}}$区的边界将由模型的动力学所确定, 是模型内在的属性. 在非对易背景下的ϕ场的运动方程不同于通常的弯曲时空中的Klein-Gorden方程. 将$\mathscr{R}_{\mathrm{I}}$区中的运动方程和后者相比较, 得到一个等效的度规$\widetilde{g}_{\mu\nu}$. 值得注意的是, 将会看到等效度规$\widetilde{g}_{tt}$存在两个新的奇点, 也就是说在奇点上$\widetilde{g}_{tt}(r_{\mathrm{H}}\pm\Delta_0(\omega))=0$. 这意味着对具有能量$\omega$的场$\phi(\omega,r)$, 红移在$(r_{\mathrm{H}}\pm\Delta_0(\omega))$面上是无限的. 如文献[4]中所讨论的, 这两个无限红移面就是$\mathscr{R}_{\mathrm{I}}$区和$\mathscr{R}_{\mathrm{II}}$区的边界, 因此有$\Delta=\Delta_0(\omega)$.

现在考虑一个探测场运动在具有非对易时空背景的$\mathscr{R}_{\mathrm{I}}$区. 重写时空坐标非对易关系如下:

$$\begin{aligned}&[x^i,x^j]=\mathrm{i}\Theta\varepsilon^{ij}, \quad (i,j=0,1), (x^0=t, x^1=r),\\ &[x^k,x^\mu]=0, \qquad (k=2,3;\mu=0,1,2,3),\end{aligned} \tag{22}$$

这里$\Theta=l_{\mathrm{p}}^2$并且ε^{ij}是全反对称的($\varepsilon^{01}=1$). 两个函数$f(x)$和$g(x)$的星乘积由Moyal形式所给出[8, 9]:

$$(f\star g)(x)=\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{2}\Theta\varepsilon^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}\right]f(x)g(y)\big|_{y=x}. \tag{23}$$

按照以上所定义的符号, 在具有量子视界的弯曲时空中的量子场论作用量如下:

$$I=I_{\mathscr{R}_{\mathrm{I}}}+I_{\mathscr{R}_{\mathrm{II}}}, \tag{24}$$

这里

$$I_{\mathscr{R}_{\mathrm{I}}}=-\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^4x\sqrt{-g^\star}\star g^{\mu\nu}\star(\partial_\mu\phi^n\star\partial_\nu\phi^n), \quad r\in\mathscr{R}_{\mathrm{I}}, \tag{25}$$

$$I_{\mathscr{R}_{\mathrm{II}}}=-\frac{1}{2}\int\mathrm{d}^4x\sqrt{-g}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi^n\partial_\nu\phi^n), \quad r\in\mathscr{R}_{\mathrm{II}}, \tag{26}$$

这里的$g^\star$表示度规行列式的计算中应使用星乘积, n表示标量场ϕ的多重态的数目, $n=1,\cdots,N$. 利用星乘积的规则(23)式计算作用量(24)式, 并将作用量转化为普通乘积. 这样, 非对易效应将被吸收到等效度规中. 换句话说, 首先考虑半经典量子效应. 这一效应通过非对易几何得以实现. 然后, 这一效应进一步反映在通常几何的等效度规当中.

通过$\delta I/\delta\phi^n=0$推导出运动方程. 在$\mathscr{R}_{\mathrm{II}}$区中, (此时$r\in\mathscr{R}_{\mathrm{II}}$), $\delta I/\delta\phi^n=\delta I_{\mathscr{R}_{\mathrm{II}}}/\delta\phi^n=0$, 这时的运动方程就是通常的弯曲时空中的Klein-Gorden方程如(13)式.

在$\mathscr{R}_{\mathrm{I}}$区中(此时$r\in\mathscr{R}_{\mathrm{I}}$), 通过$\delta I/\delta\phi^n=\delta I_{\mathscr{R}_{\mathrm{I}}}/\delta\phi^n=0$得到运动方程, 直接的计算结果如下

$$\begin{aligned}&\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\phi^n)+\\ &\partial_r\left[\frac{1}{2!}\left(\frac{\mathrm{i}\Theta}{2}\right)^2(\sqrt{-g}g^{rr})_{,rr}\partial_t^2\partial_r\phi^n\right]+\\ &\partial_t\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n!}\left(\frac{\mathrm{i}\Theta}{2}\right)^{2n}(\sqrt{-g}g^{tt})_{,\underbrace{r\cdots r}_{2n}}\underbrace{\partial_t\cdots\partial_t}_{2n}\partial_t\phi^n\right]=0,\end{aligned} \tag{27}$$

这里的$(\sqrt{-g}g^{tt})_{,\underbrace{r\cdots r}_{n}}$表示$\underbrace{\partial_r\cdots\partial_r}_{n}(\sqrt{-g}g^{tt})$. 注意到式(27)包含了Moyal乘积展开中的所有项, 因此该等式是严格的. 如上讨论, 弥散区域$\mathscr{R}_{\mathrm{I}}$应在普朗克长度的范围, 因此在以下的计算中将使用近视界近似. 利用远离极端情况的大黑洞条件将度规中的$B(r)$近似为$B(r)\approx(r-r_+)(r_+-r_-)/r_+^2$. 后面的计算所给出确实区域$\mathscr{R}_{\mathrm{I}}$不大于普朗克长度, 因此该近似是合理的. 将标量场的星乘积展开从而得到WKB近似波函数:

$$\begin{aligned}&-\frac{\sin\theta r_+^4}{(r_+-r_-)(r-r_+)}\left(1-\frac{\widetilde{\Delta}(\omega)^2}{(r-r_+)^2}\right)^{-1}\phi^n{}_{,tt}+\\ &\sin\theta(r_+-r_-)(r-r_+)\left(1+\frac{2\widetilde{\Delta}(\omega)^2}{r_+(r-r_+)}\right)\phi^n{}_{,rr}+\\ &\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\phi^n)+\frac{1}{\sin\theta}\phi^n{}_{,\varphi\varphi}=0,\end{aligned} \tag{28}$$

这里的$\widetilde{\Delta}(\omega)\equiv\Theta\omega/2$, 上面的计算中, 使用了如下形

式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\widetilde{\Delta}(\omega)}{r-r_+}\right)^{2n}=\left(1-\frac{\widetilde{\Delta}(\omega)^2}{(r-r_+)^2}\right)^{-1}. \tag{29}$$

在非对易$\mathscr{R}_{\rm I}$区中, 定义等效作用量为

$$I_{\rm eff}=-\frac{1}{2}\int{\rm d}^4x\sqrt{-\widetilde{g}}\widetilde{g}^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi^n\partial_\nu\phi^n),\ \ r\in\mathscr{R}_{\rm I}. \tag{30}$$

通过该等效作用量, 可导出ϕ场的运动方程为

$$\partial_\mu(\sqrt{-\widetilde{g}}\widetilde{g}^{\mu\nu}\partial_\nu\phi^n)=0, \tag{31}$$

比较方程(28)和方程(31), 可以得到

$$\sin^2\theta\widetilde{g}_{\theta\theta}=\widetilde{g}_{\varphi\varphi},\qquad \widetilde{g}_{tt}\widetilde{g}_{rr}=-1, \tag{32}$$

$$\widetilde{g}_{tt}=-\frac{(r_+-r_-)(r-r_+)}{r_+^2}\times\sqrt{\left(1-\frac{\widetilde{\Delta}^2}{(r-r_+)^2}\right)\left(1+\frac{2\widetilde{\Delta}^2}{r_+(r-r_+)}\right)}, \tag{33}$$

$$\widetilde{g}_{\theta\theta}=r^2\sqrt{\frac{1+\dfrac{2\widetilde{\Delta}^2}{r_+(r-r_+)}}{1-\dfrac{\widetilde{\Delta}^2}{(r-r_+)^2}}}. \tag{34}$$

通过解方程$\widetilde{g}_{tt}(r)=0$, 发现有两个新的奇点在$r=r_+\pm\widetilde{\Delta}(\omega)$处, 那么, 有$\Delta=\Delta_0(\omega)=\widetilde{\Delta}(\omega)$. 这样量子视界的弥散区域就被确定下来了. 另外值得注意的是$\widetilde{g}_{\theta\theta}$在这两个点上胀大, 这意味着曲率标量在此处消失为零. 因此该奇点仅是坐标奇点. 在文献[2]的讨论中, 标量场ϕ的能量ω应不会太大, 因此$\Delta(\omega)=\Theta\omega/2=l_{\rm p}(l_{\rm p}\omega/2)$将不会大于Planck长度$l_{\rm p}$.

4 黑洞温度和黑洞熵的推导

利用WKB和S波近似, 也就是$Y_{l,m}=Y_{0,0}$, 将运动方程(27)和由对易区中的作用量(26)式所导出的色散关系, 得到在非对易区中的给定能量ω的波数$k(r)$

$$k(r)_{\mathscr{R}_{\rm I}}=\pm\frac{{\rm i}\omega r_+^2}{(r_+-r_-)}\left(\frac{\Delta(\omega)^2}{(r-r_+)^4}-\frac{1}{(r-r_+)^2}\right)^{-1/2}. \tag{35}$$

注意到在$\mathcal{R}_{\rm I}$区中的波数k是虚数. 这表明量子隧穿过程发生在非对易区域. 在黑洞视界内外ϕ场的出射波函数的振幅之比为$\exp(2{\rm i}\int_{r_++\Delta}^{r_+-\Delta}k(r){\rm d}r)$, 这一比值描述了$\phi$场穿过非对易区域的量子隧穿效应. 使用(35)式计算如下积分

$$\mathrm{Im}\left(2\int k(r){\rm d}r\right)=\pm\frac{2\omega r_+^2}{(r_+-r_-)}\int_{-1}^{+1}\frac{{\rm d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\pm\frac{2\omega r_+^2}{(r_+-r_-)}\arcsin(x)\big|_{-1}^{1}=\pm\frac{2\pi\omega r_+^2}{(r_+-r_-)}. \tag{36}$$

这里的$x=(r-r_+)/\Delta(\omega)$是一无量纲参数, 并且(36)式的计算结果与非对易参数Θ无关. 根据Dammur-Ruffini[10]和Sannan[11]的理论, 黑洞的温度可以通过黑洞内外的出射波函数的振幅比推导出来, 也就是$\exp(|2{\rm i}\int_{r_++\Delta}^{r_+-\Delta}k(r){\rm d}r|)=\exp(\omega/(2T_{\rm BH}))$. 这样, 通过(36)式, 得到了我们期望的结果如下

$$T_{\rm BH}=\frac{r_+-r_-}{4\pi r_+^2}, \tag{37}$$

黑洞的Hawking温度被成功的推导出来. 在此指出, 对黑洞温度$T_{\rm BH}$推导的方法比一般文献中[10, 12]提到的更加自然.

前面讨论到ϕ场在$r=r_++\Delta(\omega)$处无限红移. 因此, 由于出现了新的视界, 观测者不能测量在区域$r\leqslant r_++\Delta(\omega)$中的$\phi$场, 因此只有在$\mathscr{R}_{\rm II}$区中的$\phi$场才对上有贡献. 现在按照类似引言中论述的't Hooft提出的方法用我们的模型去计算黑洞熵. 但再次强调现在在我们的模型中已没有手放的砖墙厚度h出现, $\Delta(\omega)$是由模型本身的动力学推导出来的. 显然在对易区$\mathscr{R}_{\rm II}$中的WKB波函数形式与(14)式相同. 在能量ω下的态数目为

$$g(\omega)=N\int{\rm d}l(2l+1)\int_{r_++\Delta(\omega)}^{L}{\rm d}r\sqrt{k^2(r)_{\mathscr{R}_{\rm II}}}, \tag{38}$$

容易得到由视界给出的对自由能F的主导贡献为

$$F\approx-\frac{8N\zeta(3)r_+^4}{3\pi(r_+-r_-)^2l_{\rm p}^2\beta^3}, \tag{39}$$

这里的$\zeta(3)$是黎曼ζ函数, $\zeta(3)=\sum_{n=1}^{\infty}1/n^3\approx1.202$. 现在, 计算所得的黑洞熵为

$$S=\beta^2\frac{\partial F}{\partial\beta}=\frac{N\zeta(3)A}{8\pi^4l_{\rm p}^2}. \tag{40}$$

5 讨论

下面将对黑洞熵的计算结果进行讨论. 首先, 对照(18)式和(40)式, 我们的结果只与ϕ场多重态的数目N这一个参数相关, 而我们知道ϕ场多重态的数目N是独立于黑洞参数的, 因此所得到的黑洞熵(40)式显然是正比于黑洞面积的. 在我们的模型中ϕ场在视界面附近的截断$\Delta(\omega)$是依赖于场的能量的, 而't Hooft所使用的截断h却同场的能量无关. 下面来计算截断

$\Delta(\omega)$的热力学统计平均值

$$\overline{\Delta(\omega)}=\frac{l_{\mathrm{p}}^2}{2}\frac{\int_0^\infty \mathrm{d}g(\omega)\omega/(\mathrm{e}^{\beta\omega}-1)}{\int_0^\infty \mathrm{d}g(\omega)/(\mathrm{e}^{\beta\omega}-1)}\approx\frac{3\zeta(3)(r_+-r_-)}{2\pi^3 r_+^2}l_{\mathrm{p}}^2. \tag{41}$$

这里的$g(\omega)$由(38)式所给出, 我们看到, $\Delta(\omega)$的统计平均值确实与(19)式所给出的h的值成正比. 因此砖墙厚度h有可能是$\Delta(\omega)$的热力学平均效应.

已经计算了黑洞的温度和熵, 推导出正确的Hawking温度和黑洞熵与面积成正比这一重要性质, 最后, 将讨论黑洞熵的正规化问题. 黑洞热力学要求黑洞熵必须正规化到Bekenstein-Hawking形式, 即$S=S_{\mathrm{BH}}=A/(4l_{\mathrm{p}}^2)$. 这样, 从(40)式出发, 得到场类型的数目如下:

$$N=2\pi^4/\zeta(3)\approx 162. \tag{42}$$

所有从视界面附近的真空中发射的场都与引力场耦合, 因此, 它们的动力学自由度都将会对黑洞的熵作出贡献. 做一个简单的考虑, 二分量旋量场对熵的贡献应是单分量标量场的两倍. 因此近似的认为数目N应是真空中激发的场的动力学自由度的数目. 因为推导过程中使用了一些近似方法(比如WKB近似等), 这里的N没能是一个整数, 但这一误差应当比较小. 等式(42)是对模型中ϕ场数目的一个很好的估计. 注意到由于其他类似的砖墙模型中存在额外的参数, 因而不能给出场数目的值. 众所周知, 在视界附近强引力背景下物理真空中的正反(具有负能量)粒子对产生效应导致了Hawking辐射. 由于在黑洞视界附近的引力作用如此之强以至于通常粒子之间的相互作用可以忽略, 因此在黑洞附近引力背景场下的物质的量子动量学可以简化为如(25), (26)式那样的无质量自由标量场作用量, 但是场的数目应保持不变, 该数目应当与没有极端强的引力背景时的情况相同. 接着, 在我们的模型中通过计算黑洞熵并将结果正规化到S_{BH}, 得到场的数目N, 并且该数目是由基本动力学所决定的. 这里值得关注的是在理论上这两个数目必须相等, 因为真空中所有的正反粒子对产生必然属于基本的物质场理论, 也就是说, 在理论中出现的所有粒子都将与极端强的引力相互作用而被激发产生. 这样, 场数目N应当独立于黑洞的参数, 即N刻划了真空的内在属性. 所计算得出的场的数目N确实是与黑洞的参数无关的. 这一黑洞物理的结果也许将会有助于寻找超越标准模型的新物理.

回到计算结果(42)式. 显然, $N\simeq 162$大大超过了标准模型中场的动力学自由度的数目, 在标准模型中该数目为82(见表1). 然而, 在Planck尺度的物理中, 标准模型是不适用的, 应当有超越标准模型的新物理理论. 对于最小超对称标准模型, 场的动力学自由度数目为164(见表1), 这非常接近我们的预言$N=162$. 因此. 我们的模型更倾向于支持最小超对称标准模型是作为超越标准模型的新物理理论.

表 1 最小超对称标准模型中动力学自由度的数目[13]

标准模型粒子	名称	数目	超对称粒子	名称	数目
q=u, d, s,	quark		$\tilde{q}_L$, $\tilde{q}_R$	scalar-quark	
c, b, t	(×3color)	36		(×3color)	36
l=e,μ,τ	lepton	6	$\tilde{l}_L$, $\tilde{l}_R$	scalar-lepton	6
$\nu=\nu_e,\nu_\mu,\nu_\tau$	neutrino	6	$\tilde{\nu}$	scalar-neutrino	6
g	gluon	16	$\tilde{g}$	gluino	16
$W^\pm$		4	$\widetilde{W}^\pm$	wino	4
Z^0		2	$\widetilde{Z}^0$	zino	2
γ	photon	2	$\tilde{\gamma}$	photino	2
H_1^+ H_1^0			$\widetilde{H}_1^+$ $\widetilde{H}_1^0$		
H_1^+ H_1^0	higgs	8	$\widetilde{H}_1^+$ $\widetilde{H}_1^0$	higgsino	8
$g_{\mu\nu}$	graviton	2	$\tilde{g}_{\mu\nu}$	gravitino	2

参考文献(References)

1 't Hooft G. Nucl. Phys., 1985, **B256**: 727
2 't Hooft G. Int. J. Mod. Phys., 1996, **A11**: 4623—4688
3 't Hooft G. Horizons, gr-qc/0401027
4 BAI H, YAN M L. JHEP. 2003, **0307**: 058
5 BAI H, YAN M L. Quantum Horizons, gr-qc/0403064
6 Brown J D, York J W. Phys. Rev., 1993, **D47**: 1407
7 LI M, Yoneya T. Phys. Rev. Lett., 1997, **78**: 1219
8 Seigerg N, Witten E. JHEP, 1999, **9909**: 032
9 Minwalla S, Raamsdonk M V, Seiberg N. JHEP, 2000, **0002**: 020
10 Damour T, Ruffini R. Phys. Rev., 1976, **D14**: 332
11 Sannan S. Gen. Rel. Grav., 1988, **20**: 239
12 Parikh M K, Wilczek F. Phys. Rev. Lett., 2000, **85**: 5042
13 Haber H E, Kane G L. Physics Reports, 1985, **117**: 75

Generalize 't Hooft's Quantum State of the Black Hole Theory *

BAI Hua[1)]   YAN Mu-Lin[2)]

(Department of the Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

Abstract Stating from 't Hooft's theory in which the black hole is treated as quantum states with high degeneracy with considerations of the quantum effect of the black hole and the Heisenberg uncertainty principle, we find out that the coordinations near horizon are noncommutative. Using the noncommutative field method, we study the non-extreme Reissner-Nordström macro-black hole, and successfully calculate the black hole entropy and the Hawking temperature. We also predict the number of the dynamical freedom of the field and our quantum horizon model supports the Minimal Super-symmetric Standard Model.

Key words Heisenberg uncertainty principle, quasilocal energy, Hawking radiation, black hole entropy, 't Hooft's brick wall model

Received 12 April 2005

*Supported by NSFC(90403021) and Doctoral Found of Ministry of Education of China

1) E-mail: huabai@mail.ustc.edu.cn

2) E-mail: mlyan@ustc.edu.cn