

2 + 1 维 $SU(2)$ 格点规范场胶球质量的 无规相近似计算*

惠萍^{1;1)} 郑泰玉² 王宙飞²

1 (广东教育学院物理系 广州 510303)

2 (东北师范大学理论物理研究所 长春 130024)

摘要 采用无规相近似(RPA)耦合集团展开方法,用空心图作为试探波函数,利用 Feymann-Hellman 定理和截断薛定谔方程本征值方程的方法得到的封闭方程组,计算出三到六阶 2 + 1 维 $SU(2)$ 格点规范场的胶球质量. 结果显示:当计算进行到六阶时,胶球质量已出现标度窗口和收敛趋势,预示七阶结果将在弱耦合区能表现出良好的标度行为和收敛性.

关键词 格点规范理论 胶球质量 无规相近似

1 引言

胶球质量的确定一直受到人们极大的关注,也是人们一直在探索的一个主要课题. 虽然在理论上和实验中,都有一些有意义的努力和尝试,但至今仍然没有肯定的答案. 格点规范理论(LGT)的发展为胶球质量的计算提供了理论基础,它是目前最成功的非微扰方法,已成为人们研究规范场非微扰效应的一种重要途径. 1980年 J. P. GREENSITE^[1] 导出格点规范理论真空态的薛定谔本征值方程,但此方程无法严格求解,于是人们引入了各种近似方法. 1993年 SMITH^[2] 等人提出了一种截断近似方法,但计算出的 2 + 1 维 $SU(2)$ 群的胶球质量没有好的标度性. 1994年文献[3,4]在耦合集团展开方法的基础上发展了保持连续极限截断本征值方程的方法,用这种方法已计算出了 2 + 1 维 $SU(2)$ LGT 的三阶至四阶真空波函数和胶球质量^[3-5] 出现了较好的标度行为,但更高阶结果的收敛行为不能令人满意^[6,7],对于 2 + 1 维 $SU(3)$ LGT,计算结果也不够理想. 人们试图在找一种方法,这种方法得到的结果应该是:计算阶数越高收敛性越好,并且可以推广到

3 + 1 维 $SU(3)$ LGT 实际计算中. 文献[8,9]提出了将无规相近似(RPA)方法应用到耦合集团展开方法中,成功地用于 2 + 1 维 $SU(3)$ 格点规范理论(LGT)的真空波函数和胶球质量的计算,并把 2 + 1 维 $SU(3)$ 格点规范理论的计算从原来的三阶提高到四阶,真空波函数出现了空前的收敛结果,胶球质量^[9] 也比较早的结果有所改善,随着阶数的增高,显示出收敛的趋势. 最近将上述方法运用于六阶 2 + 1 维 $SU(2)$ 格点规范场的真空波函数的计算,也得到令人满意的结果^[10],本文将上述方法运用于六阶 2 + 1 维 $SU(2)$ 格点规范场的胶球波质量 (m/e^2) 的计算中.

2 近似集团展开和胶球质量

2 + 1 维 $SU(2)$ LGT 的哈密顿量 H 是

$$H = \frac{g^2}{2a} \left[\sum_l E_l^a E_l^a - \frac{4}{g^4} \sum_p \text{Tr} U_p \right], \quad (2.1)$$

其中 a 是格距, g 为无量纲的耦合常数,它与不变荷 e 的关系为 $g^2 = e^2 a$. 在 $g^2 \rightarrow 0$ 的弱耦合区, $a \rightarrow 0$.

2003 - 10 - 16 收稿

* 广东省自然科学基金(33446),广东教育学院教授博士专项经费项目,国家自然科学基金(10347104)资助

1) E-mail: Huiping519@tom.com

真空波函数和胶球波函数分别是:

$$|\Omega\rangle = e^{R(U)} |0\rangle,$$

$$|F\rangle = \left[F(U) - \frac{\langle \Omega | F(U) | \Omega \rangle}{\langle \Omega | \Omega \rangle} \right] |\Omega\rangle, \quad (2.2)$$

其中 $E_i^\alpha |0\rangle = |0\rangle$, $R(U)$ 和 $F(U)$ 是由 Wilson 圈图 U 组成. $R(U)$ 和 $F(U)$ 按照空心图的阶数展开为

$$R(U) = \sum_i R_i(U), \quad (2.3)$$

$$F(U) = \sum_i F_i(U),$$

$R(U)$ 和 $F(U)$ 所满足的本征值方程分别是

$$H|\Omega\rangle = \epsilon_0 |\Omega\rangle, \quad H|F\rangle = \epsilon_f |F\rangle. \quad (2.4)$$

设 $w = \frac{2a}{g^2} H$, 则 $w|\Omega\rangle = w_0 |\Omega\rangle$, 真空能量 ϵ_0 与 w_0 的关系为 $\epsilon_0 = w_0 g^2 / 2a$. 将 (2.1) — (2.3) 代入上式导出

$$\sum_l \{ [E_l^\alpha, [E_l^\alpha, R]] + [E_l^\alpha, R][E_l^\alpha, R] \} - \frac{4}{g^4} \sum_p \text{Tr} U_p = w_0, \quad (2.5)$$

$$\sum_l \{ [E_l^\alpha, [E_l^\alpha, F(U)]] + 2[E_l^\alpha, F(U)][E_l^\alpha, R(U)] \} - \Delta w F(U) = \text{const}, \quad (2.6)$$

其中 Δw 为胶球质量隙: $\Delta w = \epsilon_f - w_0$, 胶球质量 $m = \Delta w \frac{g^2}{2a} = \Delta w e^2 / 2$.

把本征值方程 (2.5) 和 (2.6) 在 N 阶截断得到

$$\sum_l \left[E_l^\alpha, \left[E_l^\alpha, \sum_{n=1}^N R_n \right] \right] + \sum_{n+n' \leq N} [E_l^\alpha, R_n][E_l^\alpha, R_{n'}] - \frac{4}{g^4} \sum_p \text{Tr} U_p = w_0, \quad (2.7)$$

$$\sum_l \left[E_l^\alpha, \left[E_l^\alpha, \sum_{n=1}^N F_n \right] \right] + \sum_{n+n' \leq N} [E_l^\alpha, F_n][E_l^\alpha, R_{n'}] - \Delta w \sum_n F_n = \text{const}. \quad (2.8)$$

当 $N = 6$ 时, $R(U)$ 由一至六阶 68 个空心图形构成^[11], 组合系数分别为 $c_0, c_1, b_1, b_2, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 等 68 个. $F(U)$ 也由一至六阶 68 个同样的空心图形构成, 组合系数分别为 $c'_0, c'_1, b'_1, b'_2, a'_1, a'_2, a'_3, a'_4, a'_5, a'_6$ 等 68 个. 将 $R(U)$ 所有的图和 $F(U)$ 所有的图代入 (2.7) 和 (2.8) 式, 经推演可以得到有关的封闭方程组 (略), 由方程组解出胶球质量. 下面以四阶的计算过程为例来展示计算过程. F_1 至 F_4 表达如下 (R_1 至 R_4 略):

$$F_1 = c'_0 \square,$$

$$F_2 = c'_1 \square,$$

$$F_3 = b'_1 \square + b'_2 \square,$$

$$F_4 = a'_1 \square + a'_2 \square + a'_3 \square + a'_4 \square + a'_5 \square + a'_6 \square.$$

按照文献 [11] 对 2 + 1 维 SU(2) LGT 所采用的 RPA 方法, 对计算过程中的双图组态、重叠图或多图组态中较小的图取平均值, 而保留较大的图, 并利用么模条件: $\text{Tr} U \text{Tr} V = \text{Tr} UV + \text{Tr} UV^*$ (U 和 V 是任意 Wilson 圈图) 把连接图变成空心图, 把不独立的相关图之间的关系利用么模条件表示出来, 例如:

$$\square \square = [\square \square - \square \square + \square \square] = \langle \square \rangle \square + \langle \square \rangle \square + \langle \square \rangle \square.$$

对于四阶计算, 小图的平均值共两个, 分别用 x_1 和 x_2 表示:

$$x_1 = \langle \square \rangle, \quad x_2 = \langle \square \rangle.$$

由方程 (2.5) 和 (2.6) 得到 14 条方程:

$$\frac{15}{2} a_1 - 2c_0(b_1 + 2b_2) - 2c_1^2 = 0,$$

$$\frac{15}{2} a_2 - 2c_0 b_2 - \frac{1}{2} c_1^2 = 0,$$

$$\frac{15}{2} a_3 - 2c_0(b_1 + b_2) = 0,$$

$$\frac{15}{2} a_4 - 2c_0 b_1 - c_1^2 = 0,$$

$$6a_5 - 2c_0 b_1 - c_1^2 = 0,$$

$$6a_6 - 2c_0 b_1 + 2c_1^2 = 0,$$

$$6b_1 - 4c_0 c_1 + 8c_0 b_1 x_1 = 0,$$

$$6b_2 - 2c_0 c_1 + 7x_1 c_0 b_2 + \frac{1}{2} c_1^2 x_1 = 0,$$

$$\frac{9}{2} c_1 - 2c_0^2 + 6c_0 c_1 x_1 + 4c_1^2 x_2 - 6c_0(b_1 + b_2) + c_0 b_2 x_2 = 0,$$

$$3c_0 - \frac{4}{g^4} + 2c_0^2 x_1 - 6c_0 c_1 - c_0 b_2 x_1 - \frac{5}{2} c_1^2 x_1 = 0,$$

$$6b'_1 - \Delta w b'_1 - 4(c_0 c'_1 + c'_0 c_1) + 8x_1(c_0 b'_1 + c'_0 b_1) = 0,$$

$$6b'_2 - \Delta w b'_2 - 2(c_0 c'_1 + c_1 c'_0) + 7x_1(c_0 b'_2 + c'_0 b_2) + c_1 c'_1 x_1 = 0,$$

$$\frac{9}{2} - \Delta w c'_1 - 4c_0 c'_0 + 6x_1(c_0 c'_1 + c'_0 c_1) + 8c_1 c'_1 x_2 - 6(c_0 b'_1 + c'_0 b_1 + c_0 b'_2 + c'_0 b_2) + x_1(c_0 b'_2 + c'_0 b_2) = 0,$$

$$3 - \Delta w + 4c_0 x_1 - 6(c_0 c'_1 + c'_0 c_1) - x_1(c_0 b'_2 + c'_0 b_2) - 5c_1 c'_1 x_1 = 0.$$

设 $c'_0 = 1$, 有关 x_1 和 x_2 所满足的两个方程按文献 [11] 的方法由 Feymann-Hellman 定理可以得到(略). 这样由上面的封闭方程组可以解出四阶胶球质量 $m/e^2 = \Delta w^2/2$ 随着 $1/g^2$ 的变化.

对于六阶计算解法相同, 小图的平均值还有两个, 他们分别用 x_3 和 x_4 来表示:

$$x_3 = \langle \square \rangle, \quad x_4 = \langle \square \rangle.$$

由 Feymann-Hellman 定理同样可得到 x_3 到 x_4 所满足的方程, 得到封闭方程组, 解出六阶胶球质量 m/e^2 随着 $1/g^2$ 的变化.

3 计算结果

文献 [11] 展示六阶胶球波函数的 μ_0^F 和 μ_2^F 、真空波函数的相关参数 $\zeta_0 = |\mu_2|/\mu_0$ 和胶球波函数的相关参数 $\zeta = |\mu_2^F|/\mu_0^F$ 随着 $1/g^2$ 的变化曲线, 在 $1/g^2 > 1.2$ 时, μ_0^F 和 μ_2^F , ζ_0 和 ζ 都表现出较好的标度行为. 在胶球波函数计算的基础上, 本文得到的三阶到六阶胶球质量 m/e^2 随着 $1/g^2$ 的变化曲线如图 1 所示. 在弱耦合区 ($1/g^2 > 1$), 随着阶数的增加, 曲线斜率逐渐减小, 六阶结果已经出现标度窗口, 从图 1 可以肯定地判断: 七阶结果将显示出良好的标度行为, 结果很可能趋于收敛, 这种变化趋势与文献 [9] 的 2+1 维 $SU(3)$ LGT 胶球质量的三阶和四阶变化趋势很相似(见图 2). 从文献 [8, 9] 和本文结果看到: (1) 由于采用空心图大大简化了计算过程, 使 RPA 方法更容易被推广到 2+1 维 $SU(3)$ LGT 和

3+1 维 $SU(3)$ LGT 实际物理中的高阶计算中. (2) RPA 方法的真空能量相对非 RPA 方法真空能量低, 收敛行为较非 RPA 方法要好, 说明把 RPA 方法推广到高阶是可行的. 进一步的工作是将此工作推广到 2+1 维 $SU(3)$ LGT 五阶计算中.

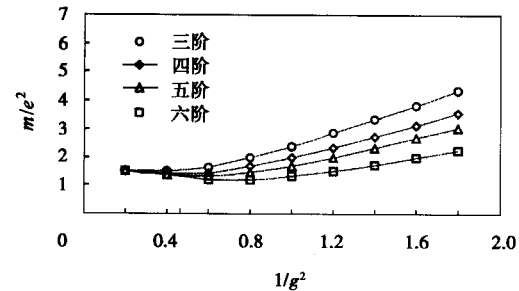


图 1 采用 RPA 方法得到的三阶到六阶 2+1 维 $SU(2)$ LGT 的胶球质量

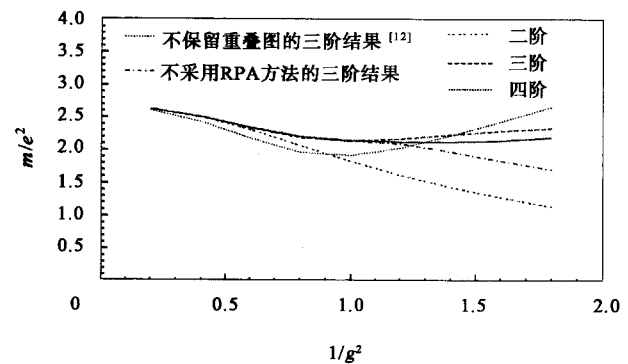


图 2 文献 [9] 的 2+1 维 $SU(3)$ LGT 的胶球质量 二阶、三阶和四阶结果是采用 RPA 方法得到的

参考文献 (References)

- Greensite J P. Nucl. Phys., 1980, **B166**:113—124
- Llewellyn Smith C H, Watson N J. Phys. Letter., 1993, **B302**:463—471
- GUO S H, CHEN Q Z, LI L. Phys. Rev., 1994, **D49**(1):507—510
- CHEN Q Z, GUO S H, ZHENG W H et al. Phys. Rev., 1994, **D50**(5):3564—3565
- HUI P, CHEN Q Z. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1995, **19**(9):820—825 (in Chinese)
(惠萍, 陈启洲. 高能物理与核物理, 1995, **19**(9):820—825)
- HUI P. High Energy Phys. and Nucl. Phys. 1998, **22**(4):322—325 (in Chinese)
(惠萍. 高能物理与核物理, 1998, **22**(4):322—325)
- HUI P. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1999, **23**(12):1171—1176 (in Chinese)
(惠萍. 高能物理与核物理, 1999, **23**(12):1171—1176)
- HUI P, FANG X Y, CHEN Q Z. Phys. Rev., 2000, **D62**:034505—1—5
- FANG X Y et al. Phys. Rev., 2002, **D65**:114505—1—3
- HUI P. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2004, **28**(5):487—490 (in Chinese)
(惠萍. 高能物理与核物理, 2004, **28**(5):487—490)
- HUI P. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2000, **24**(7):636—641 (in Chinese)
(惠萍. 高能物理与核物理, 2000, **24**(7):636—641)
- CHEN Q Z, LUO X Q, GUO S H et al. Phys. Lett., 1995, **B348**:560—564

Approximated Calculation of the Glueball Mass in the 2 + 1-D $SU(2)$ LGT with the RPA Method *

HUI Ping^{1;1)} ZHENG Tai-Yu² WANG Zhou-Fei²

1 (Department of Physics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou 510303, China)

2 (Institute of Theoretical Physics, Northeast Normal University, Changchun 130024, China)

Abstract The coupled cluster method is improved with the random phase approximation (RPA) to calculate the glueball mass in the 2 + 1-D $SU(2)$ lattice gauge theory. In this calculating, the trial wave function consists of single-hollow graphs, the Feymann-Hellman theorem is used to obtain a set of closed equations. When the calculation proceeds up to the sixth order, the calculated results of glueball mass show scaling window and a sign of converges at weak coupling region $1/g^2 > 1.0$. The results of this paper indicate that the seventh order glueball mass will show good scaling behavior and the converges.

Key words lattice gauge theory, glueball mass, random phase approximation

Received 16 October 2003

* Supported by the Guangdong Provincial Natural Science Foundation (33446), and by the Professorial and Doctoral Program Foundation of Guangdong Institute of Education, and the National Natural Science Foundation of China (10347104)

1) E-mail:Huiping519@tom.com