第28卷 第2期
2004年2月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.28, No.2
Feb., 2004

二维晶化束的平均场概念和单粒子模型(Ⅱ)

胡西多　邵明珠　罗诗裕[1)]　刘勇生　朱德海

(东莞理工学院　广东　523106)

摘要　利用平均场概念和单粒子模型讨论了储存环中二维晶化束的大尺度运动行为,结果再现了粒子轨道的螺旋运动特征,并用天体物理学方法揭示了螺旋轨道不断进动的新运动形态.

关键词　储存环　束流晶化　带电粒子　平均场

1　引言

储存环中的粒子束是一个复杂的多体系统. 人们把储存环中的晶化束近似地视为单分量等离子体或库仑气体,并利用这种模型对它进行了研究,导出了晶化束的结构相变[1]. 我们也曾开展过这方面的工作[2—10]. 2000年,在德国召开的第六届国际计算加速器物理会议,对束流晶化作了更广泛的研究[11]. 为了简化问题的计算和讨论,同时又不损失问题的基本特征,文献[12]引入了平均场和单粒子概念. 其出发点是,考虑到单个粒子间相互作用的复杂性,我们不再关心个别粒子间作用的具体特征,而把注意力集中在所有粒子的集体运动行为上. 为此,把储存环中的晶化束视为半径为 ρ 的无限长带电圆柱体,单个粒子间的相互作用就转化为用高斯定理所描述的平均场来代替. 值得注意的是,由于粒子沿径向分布造成的边界不确定性,已不再是经典意义上的几何边界,因此,把问题分为圆柱体内部($\rho<\rho_0$)和外部($\rho>\rho_0$)两种情况进行讨论. 文献[12]讨论了小尺度 $\rho<\rho_0$ 情况下粒子的运动行为,结果不仅使问题得到了简化,又保证了方法本身的解析性和完整性,同时也揭示了二维晶化束的主要特征. 本文讨论大尺度 $\rho>\rho_0$ 情况下粒子的运动行为,结果也将表明粒子运动轨道仍然是一条沿 z 轴运动,且绕 z 轴缠绕的螺旋线,不过这条螺旋线还将绕 z 轴进动,其轨道在垂直于 z 轴平面内的投影是一典型的玫瑰花图案. 这就是本文企图揭示的新的运动特征.

2　运动方程

在无限长带点圆柱体电场中运动的带电离子将受到库伦力的作用,由高斯定理可将库伦力表示为(见文献[1]公式(6))[12]

$$f_2=\begin{cases}2q\lambda\rho/\rho_0^2 & \rho<\rho_0\\ 2q\lambda/\rho & \rho>\rho_0\end{cases}, \tag{1}$$

其中 ρ_0 是带点圆柱体的平均半径,λ 是带点圆柱体的线点荷密度,$q=Ze$ 是离子电荷,Z 是离子的原子序数,e 是电子电荷. 注意到,在储存环中运动的带电离子,还将受到磁场的聚焦作用,其大小可表示为

$$f_1=-qk_1\rho, \tag{2}$$

其中 k_1 是磁场聚焦强度. 对于 $\rho>\rho_0$ 的情形,由式(1)和(2)可将作用在离子上的合力表示为

$$f=f_1+f_2. \tag{3}$$

在柱坐标(ρ,θ,z)中,粒子运动方程可表示为

$$\left.\begin{aligned}&m_0\gamma(\ddot{\rho}-\rho\dot{\theta}^2)=-qk_1(\rho-\rho_0^2/\rho)\\&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m_0\gamma\rho^2\dot{\theta})=0\\&\ddot{z}=0\end{aligned}\right\}\rho>\rho_0, \tag{4}$$

其中 $\dot{\rho}=\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t$, $\dot{\theta}=\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$, $\dot{z}=\mathrm{d}z/\mathrm{d}t$, ρ_0 取平衡值,且可表示为

$$\rho_0^2=2\lambda/k_1. \tag{5}$$

2003-05-18 收稿

1) E-mail: oul 901@163.com

考虑到场的柱对称性,粒子的角动量是守恒的(见公式(4)中的第(2)式),

$$l = m_0 \gamma \rho^2 \dot{\theta} = 常数. \tag{6}$$

引入力常数

$$c = -k_1 q, \tag{7}$$

将式(6)和(7)代入公式(4)中的第(1)式,可得

$$\ddot{\rho} - c\rho + \frac{c\rho_0^2}{\rho} - \frac{l^2}{m_0^2 \gamma^2 \rho^3} = 0. \tag{8}$$

令 $x = 1/\rho$,并注意到

$$\left.\begin{aligned} \dot{\rho} &= -\frac{l}{m_0 \gamma} \frac{dx}{d\theta} \\ \ddot{\rho} &= -\frac{l^2}{m_0^2 \gamma^2} x^2 \frac{d^2 x}{d\theta^2} \end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

则方程(8)可改写为

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} + x + \frac{c m_0^2 \gamma^2}{l^2} \frac{1}{x^3} - \frac{c\rho_0^2 m_0^2 \gamma^2}{l^2} \frac{1}{x} = 0. \tag{10}$$

离子的运动行为由式(10)和方程(4)第(3)式描写. 方程(10)是一个非线性微分方程,在天体物理中会经常遇到类似问题.

3 系统的近似解和单粒子轨道

将方程表示为下列一般形式

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \tag{11}$$

其中 $\dot{x} = \frac{dx}{d\theta}$,且

$$f(x) = x - \frac{c\rho_0^2 m_0^2 \gamma^2}{l^2} \frac{1}{x} + \frac{c m_0^2 \gamma^2}{l^2} \frac{1}{x^3}. \tag{12}$$

设 x_0 是 $f(x) = 0$ 的解,并令

$$X = x - x_0, \tag{13}$$

则方程(11)可改写为

$$\ddot{X} + f(X + x_0) = 0. \tag{14}$$

展开函数 $f(X + x_0)$,方程(14)可表示为

$$\ddot{X} + \sum_{n=1}^{N} \alpha_n X^n = 0, \tag{15}$$

其中

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0), \tag{16}$$

$f^{(n)}$是函数 $f(X + x_0)$对 θ 的 n 阶微商.

利用 LP 方法将 X 和振动频率ω 表示为[13]

$$X(\tau, \varepsilon) = \varepsilon X_1(\tau) + \varepsilon^2 X_2(\tau) + \varepsilon^3 X_3(\tau) + \cdots, \tag{17}$$

$$\omega(\varepsilon) = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \cdots, \tag{18}$$

其中 ε 是小参数,且 X_n 与 ε 无关,而

$$\tau = \omega\theta = t + \varepsilon t + \varepsilon^2 t + \cdots, \tag{19}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{m_0 \gamma} f^{(1)}(x_0), \tag{20}$$

代式(17)到方程(15),可得

$$\frac{d^2 X_1}{d\tau^2} + X_1 = 0, \tag{21}$$

$$\omega_0^2 \left(\frac{d^2 X_2}{d\tau^2} + X_2 \right) = -2\omega_0 \omega_1 \frac{d^2 X_1}{d\tau} - \alpha_2 X_1^2, \tag{22}$$

$$\omega_0^2 \left(\frac{d^2 X_3}{d\tau^2} + X_3 \right) = -2\omega_0 \omega_1 \frac{d^2 X_2}{d\tau^2} - 2\alpha_2 X_1 X_2 - (\omega_1^2 + 2\omega_0 \omega_2) \frac{d^2 X_1}{d\tau^2} - \alpha_3 X_1^3. \tag{23}$$

其中 $\alpha_2 = \frac{1}{2m_0 \gamma} f^{(2)}(x_0)$, $\alpha_3 = \frac{1}{6m_0 \gamma} f^{(3)}(x_0)$.

方程(21)的解可表示为

$$X_1 = a\cos\phi, \tag{24}$$

$$\phi = \tau + \beta, \tag{25}$$

其中 a 和β 由初值确定. 将式(24)代入方程(22)消去长期项可得

$$\omega_1 = 0, \tag{26}$$

$$X_2 = -\frac{\alpha_2 a^2}{2\omega_0^2} \left(1 - \frac{1}{3}\cos 2\phi \right). \tag{27}$$

将式(24)和(27)代到方程(23)中,消去长期项可得

$$\omega_2 = \frac{(9\alpha_3 \omega_0^2 - 10\alpha_2^2) a^2}{24\omega_0^2}. \tag{28}$$

精确到 ε 的二阶小量,方程(15)的解和振动频率可表示为

$$x = x_0 + \varepsilon a\cos(\omega\theta + \beta) - \frac{\varepsilon^2 \alpha_2 a^2}{2\alpha_1} \left[1 - \frac{1}{3}\cos(2\omega\theta + 2\beta) \right] + O(\varepsilon^3), \tag{29}$$

$$\omega = \omega_0 \left[1 + \varepsilon^2 \frac{9\alpha_1 \alpha_3 - 10\alpha_2^2}{24\alpha_1} a^2 \right] + O(\varepsilon^3). \tag{30}$$

略去高阶小量 $O(\varepsilon^3)$,并注意到 $x = \frac{1}{\rho}$,则式(29)和(30)可改写为

$$\frac{\rho_0}{\rho} = 1 + a\rho_0 \cos(\omega\theta + \beta) - \frac{\alpha_2 a^2 \rho_0}{2\alpha_1} \left[1 - \frac{1}{3}\cos(2\omega\theta + 2\beta) \right], \tag{31}$$

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{9\alpha_1 \alpha_3 - 10\alpha_2^2}{24\alpha_1} a^2 \right), \tag{32}$$

$$\alpha_1 = \omega_0^2. \tag{33}$$

4 系统的单粒子轨道

由式(31)和(32)可看出,粒子的轨道是一个椭圆,而且绕主轴运动;考虑到公式(4)的第3个式,可以预期粒子的运动轨道是一条沿 z 轴运动,且绕 z 轴缠绕的螺旋线,这条轨迹还不断绕 z 轴进动. 式(31)所描写的轨道实际上是一条螺旋轨道在与束流垂直平面上的投影. 式(31)所描写的轨道常在天体物理中碰到. 借助天体物理描述方法,引入有效势和有效平衡轨道来进一步讨论.

4.1 系统的有效势 $V_e(\rho)$ 和有效平衡轨道

有效势定义为

$$V_e(\rho) = -\int f(\rho)\mathrm{d}\rho = \int\left(-c\rho + \frac{c\rho_0^2}{\rho} - \frac{l^2}{m_0^2\gamma^2\rho^3}\right)\mathrm{d}\rho = -\frac{c}{2}\rho^2 + c\rho_0^2\ln\rho + \frac{l^2}{2m_0^2\gamma^2\rho^2} + c_0 . \quad (34)$$

系统的有效平衡轨道由 $\frac{\partial V_e(\rho)}{\partial\rho} = 0$ 定义,由式(34)可得有效平衡轨道 ρ_e 为

$$\rho_e = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho_0\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4l^2}{cm_0^2\gamma^2\rho_0^4}}\right)^{1/2} \quad (35)$$

由式(35)可求得粒子的有效临界角动量

$$l_{ec} = \frac{\sqrt{c}}{2}m_0\gamma\rho_0^2, \quad (36)$$

相应的有效半径为

$$\rho_{ec} = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho_0 . \quad (37)$$

4.2 初值条件

设系统(14)的初值条件为 s_0 和 v_0,则 s_0 和 v_0 可表示为

$$s_0 = a_0\cos\beta_0, v_0 = -a_0\omega_0\sin\beta_0, \quad (38)$$

其中 ω_0 由式(20)给出. 方程(29)和(30)的 a 和 β 可改写为

$$\left.\begin{aligned} a &= a_0 + \frac{\alpha_2 a_0^2}{12\alpha_1}(3\cos\beta_0 + \cos3\beta_0) \\ \beta &= \beta_0 - \frac{\alpha_2 a_0}{12\alpha_1}(9\sin\beta_0 + \sin3\beta_0) \end{aligned}\right\}, \quad (39)$$

其中 a_0 和 β_0 由式(38)给出.

4.3 转折点

注意到系统的总能量由式

$$E = \frac{1}{2}m_0\gamma\dot{\rho}^2 + V_e(\rho) \quad (40)$$

给出,将式(34)代入上式,并令 $\dot{\rho} = 0$,可得系统的拐点方程 b 表示为

$$E + \frac{c}{2}\rho^2 - c\rho_0^2\ln\rho - \frac{l^2}{2m_0^2\gamma^2\rho^2} = 0. \quad (41)$$

设 ρ_1 和 ρ_2 是上述方程的两个根,则粒子将运动在半径 $\rho = \rho_1$ 和 $\rho = \rho_2$ 所确定的范围内. 用轨道理论的术语来说,在天体物理中转折点(或拐点)就是所谓的拱点. 粒子在两个拱点之间的夹角 $\Delta\theta$ 由

$$\Delta\theta = \pi/\omega \quad (42)$$

给出,其中 ω 由式(32)确定.

5 讨论

人们曾用OCP近似讨论了一维晶化束的非线性动力学[1—6],并同实验进行了比较. 2000年,在德国召开的第六届国际计算加速器物理会议,对束流晶化作了更广泛的研究. 我们引入平均场概念和单粒子模型讨论了大尺度情况下的粒子运动行为,并用天体物理学方法对系统进行了分析. 结果表明,粒子的运动组态出现了新的特征,这就是离子绕 z 轴作螺旋运动的同时,单离子轨道还将绕 z 轴作整体进动,在垂直于 z 轴平面上的投影呈现出典型的玫瑰花图案. 这正是本文企图揭示的新的运动特征. 考虑到在储存环中运动的带电粒子将向外辐射电磁波. 可以预期由于相对论效应,束流在储存环中被电子冷却的同时,还将不断向外辐射能量,从而进一步加速束流冷却. 关于这一问题,我们将另外讨论.

参考文献(References)

1 Habs D, et al. MPI 1987-v3, MPI, Heidelberg, 1987

2 Hofmann I, Luo S Y. GSI Report, 1989,**89**:1

3 LUO S Y, Hofmann I. GSI Report, 1989,**89**:21

4 SHAO M Z, Hofmann I, LUO S Y. Acta Physica Sinica, 1990,**39**(8):1189—1190(in Chinese)
(邵明珠,Hofmann I,罗诗裕. 物理学报,1990,**39**(8):1189—1190)

5 SHAO M Z, Hofmann I, LUO S Y. Acta Physica Sinica, 1990,**39**(8):1200—1206(in Chinese)
(邵明珠,Hofmann I,罗诗裕. 物理学报,1990,**39**(8):1200—1206)

6 SHAO M Z, Hofmann I, LUO S Y. Acta Physica Sinica, 1990,**39**(8):1207—1213(in Chinese)
(邵明珠,Hofmann I,罗诗裕. 物理学报,1990,**39**(8):1207—1213)

7 LUO S Y, LIU Z R, SHAO M Z. Acta Physica Sinica, 1987, **36**(5):547(in Chinese)
(罗诗裕,刘曾荣,邵明珠. 物理学报,1987,**36**(5):547)

8 LUO S Y, SHAO M Z, LIU Z R, et al. Acta Physica Sinica, 1988,**37**(8):1394(in Chinese)
(罗诗裕,邵明珠,刘曾荣等. 物理学报,1988,**37**(8):1394)

9 SHAO M Z. Acta Physica Sinica, 1992, **41**(11):1825(in Chinese)
(邵明珠. 物理学报,1992,**41**(11):1825)

10 LUO S Y, SHAO M Z. Acta Mathematica Scientia, 1993,**13**(1):391(in Chinese)
(罗诗裕,邵明珠. 数学物理学报,1993,**13**(1):391)

11 Schemoller T et al. Nucl. Instr. and Meth., 2000,**A441**:50—53

12 LUO S Y et al. HEP&NP,2004,28(1):96(in Chinese)
(罗诗裕等. 高能物理与核物理,2004,28(1):96)

13 Nayten A H. Perturbation Methods. Printed in the United States of America, 1973. 75—135

Average Field Idea and Single Particle Model for 2 Dimension Crystallization Beams(Ⅱ)

HU Xi-Duo SHAO Ming-Zhu LUO Shi-Yu[1] LIU Yong-Sheng ZHU De-Hai

(Dongguan University of Technology, Guangdong 523106, China)

Abstract The average field idea and the single particle model have been introduced, and the motion behaviours in large scale of beam particles have been disscussed for 2 Dimension crystallization beams in storage rings. It is shown that a particle orbit is the spiral line moved along z axis, and new configuration has been disclosed in the plane vertical to z axis.

Key words storage ring, crystallization beam, charged particles, average field

Received 18 May 2003

1) E-mail: oul 901@163.com