

## 二维形变谐振子系统中的量子经典对应\*

刘芳<sup>1</sup> 李君清<sup>2</sup> 邢永忠<sup>2</sup>

1(西北大学现代物理研究所 西安 710069)

2(中国科学院近代物理研究所 兰州 730000)

**摘要** 通过引入等效普朗克常数,将量子系统中基本动力学变量的期望值和经典系统中基本动力学变量的精确值的时间演化行为相比较,分析了两者产生差异的因素,规则运动主要是和量子效应有关,而混沌运动则是和动力学效应有关,即与系统的动力学对称性破坏相联系.在此基础上,比较了量子相空间测不准度和李雅谱诺夫指数,给出了令人满意的说明.

**关键词** 量子混沌 量子经典对应 等效普朗克常数 量子相空间不均匀度

### 1 引言

近年来人们通过对与经典混沌系统相对应的量子系统的研究,已经对经典混沌在量子系统中的表现有了一定的认识,并试图寻找与经典物理量相对应的、能够描述量子系统混沌行为的物理量,已取得了初步的成果<sup>[1,2]</sup>.按照玻尔的对对应原理,在普朗克常数趋于零时,量子力学的结果应该趋向于经典结果.而在普朗克常数不为零时,量子力学结果既与普朗克常数的大小相关又与该系统本身的动力学性质有关,因此在与经典系统进行对对应时有必要清楚在量子经典对应中哪一种因素起了主导作用,之后才可能与相应的经典物理量进行对应.而这一问题在以往的文献中并没有十分明确指出.

本文通过引入等效普朗克常数<sup>[3]</sup>,在等效普朗克常数取大小不同的数值时,将量子力学的结果与经典力学的结果进行了比较,从而指出了导致它们之间产生差异的因素.并在此基础上,比较了可量度波包在相空间中运动行为的量子相空间不均匀度<sup>[4]</sup>和表征经典混沌运动的李雅谱诺夫指数,结果符合很好.

### 2 量子经典对应中的量子效应和动力学效应

二维形变谐振子系统的哈密顿量可写为

2001-10-19 收稿,2001-12-26 收修改稿

\* 国家自然科学基金(10175082),中国科学院知识创新工程重点方向性项目(KJ9X2-SW-N02),中国科学院百人计划经费和 973 国家重点研究发展规划项目(G20000774001)资助

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \left( x^2 + \frac{z^2}{b^2} + \lambda \frac{2z^3 - 3zx^2}{\sqrt{z^2 + x^2}} \right) = H_0 + \lambda \frac{m\omega^2}{2} \frac{2z^3 - 3zx^2}{\sqrt{z^2 + x^2}}, \quad (1)$$

其中  $p$  是系统的总动量,  $b$  等于 0.5. 该哈密顿系统可认为是由一个二维谐振子系统  $H_0$  附加一个形变项得到, 通过改变形变强度  $\lambda$  的取值, 该系统可以由完全规则变成完全混沌<sup>[5-7]</sup>. 当  $\lambda = 0.1\lambda_c$  时, 系统完全规则; 当  $\lambda = 0.95\lambda_c$  时, 系统完全混沌.  $\lambda_c$  是势场开放至无穷远时形变强度  $\lambda$  的取值,  $\lambda_c \approx 1.64$ .

按照玻尔的对对应原理, 量子力学的经典极限结果应该与经典力学的结果相对应, 但是如何实现这一对应原理, 目前还没有一个被大家所普遍接受的方法. 最近徐躬耦先生通过提出等效普朗克常数对解决该问题进行了探索. 本文引入我们所研究的系统的等效普朗克常数, 在等效普朗克常数取大小不同值时, 选择二维谐振子系统  $H_0$  的相干态为初始态, 计算了基本动力学变量  $P, Q$  的期望值随时间的演化, 并和从相干态波包中心出发的经典粒子的运动行为进行比较, 分析了两产生差异的原因所在.

选择频率为  $\omega_0$ 、质量为  $m$  的谐振子系统为参考系统并进行坐标变换, 取  $\sqrt{m\omega_0\hbar}$ ,  $\frac{\omega_0}{\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}$  和  $\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\frac{1}{\omega_0}$  分别为  $p_i, q_i$  和  $t$  的单位, 则(1)式就可以表示成无量纲的形式

$$\frac{H}{\hbar\omega_0} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{p}{\sqrt{m\omega_0\hbar}} \right)^2 + \left( \frac{1}{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}} \right)^2 \left( x^2 + \frac{z^2}{b^2} + \lambda \frac{2z^3 - 3zx^2}{\sqrt{z^2 + x^2}} \right) \right], \quad (2a)$$

哈密顿方程为

$$i \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) \frac{d \left( \frac{q_j}{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}} \right)}{d(\omega t)} = \left[ \frac{q_j}{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}}, \frac{H}{\hbar\omega_0} \right], \quad (2b)$$

$$i \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right) \frac{d \frac{p_j}{\sqrt{m\omega_0\hbar}}}{d(\omega t)} = \left[ \frac{p_j}{\sqrt{m\omega_0\hbar}}, \frac{H}{\hbar\omega_0} \right], \quad (j = 1, 2), \quad (2c)$$

$$\left[ \frac{q_j}{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}}, \frac{p_j}{\sqrt{m\omega_0\hbar}} \right] = i \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right), \quad (j = 1, 2).$$

为了表述方便, 用  $H, p_j, q_j$  和  $t$  表示  $\frac{H}{\hbar\omega_0}, p_j/\sqrt{m\omega_0\hbar}, q_j/\left(\frac{\omega_0}{\omega}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_0}}\right)$  和  $\omega t$ , 则(2)式为

$$H = \frac{1}{2} \left( p_x^2 + p_z^2 + x^2 + \frac{z^2}{b^2} + \lambda \frac{2z^3 - 3zx^2}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right), \quad (3a)$$

$$\frac{dq_j}{dt} = [q_j, H], \quad \frac{dp_j}{dt} = [p_j, H], \quad (j = 1, 2), \quad (3b)$$

$$[q_j, p_j] = i \frac{\omega}{\omega_0}, \quad (j = 1, 2). \quad (3c)$$

可以看到, 经过坐标变换后, 物理量  $\frac{\omega}{\omega_0}$  扮演了等效普朗克常数的角色. 而且不同  $m$ ,

$\omega$  的系统的特征都归结于等效普朗克常数  $\frac{\omega}{\omega_0}$ , 而不再在哈密顿量中显示. 随着系统角频率  $\omega$  的减小, 等效普朗克常数趋向于 0, 量子系统的结果则趋向于经典结果, 因此通过比较量子力学中动力学变量的期望值和经典力学中动力学变量的确切值可看到哪一种因素导致了它们之间的差异. 下面, 采用  $\frac{1}{\Omega}$  表示等效普朗克常数  $\frac{\omega}{\omega_0}$ .

选取二维谐振子系统  $H_0$  的相干态波包为量子力学初始态, 波包中心位于相空间中一点  $X_1 = (x, p_x; z, p_z) = (0.0, 3.78; 0.0, 0.0)$ , 在  $\lambda/\lambda_c$  等于 0.1 和 0.8 时, 从该点出发的波包的运动分别为规则 and 混沌. 在等效普朗克常数  $\frac{1}{\Omega}$  等于 1.0 和 0.5 时, 计算了量子系统动力学变量的期望值  $\langle Q \rangle_{cl}$  和经典系统中从  $X_1$  出发的经典粒子的动力学变量的确切值  $Q_{\text{class}}$  的差值  $\Delta C_Q = \langle Q \rangle_{cl} - Q_{\text{class}}$  随时间的演化, 差值越小说明波包的运动越接近于经典粒子在相空间中的轨迹.  $Q$  可以是任意的一个基本动力学变量, 这里仅仅给出  $Q$  为  $z$  和  $p_z$  时的结果.

图 1 给出  $\lambda/\lambda_c = 0.1$  时,  $\Delta C_z$  和  $\Delta C_{p_z}$  随时间的演化. 粗实线为等效普朗克常数等于 0.5 时得到的结果, 细实线为等效普朗克常数等于 1.0 时得到的结果. 从图中可以看到, 随着等效普朗克常数的减小,  $\Delta C_Q$  相应地减小. 可以推断对于量子规则运动而言,  $\Delta C_Q$  随时间的演化主要与量子效应有关. 当等效普朗克常数趋于 0 时, 量子效应同时趋于 0,  $\Delta C_Q$  也随着趋于 0, 量子系统中动力学变量的期望值趋向于经典粒子在相空间中的轨迹.

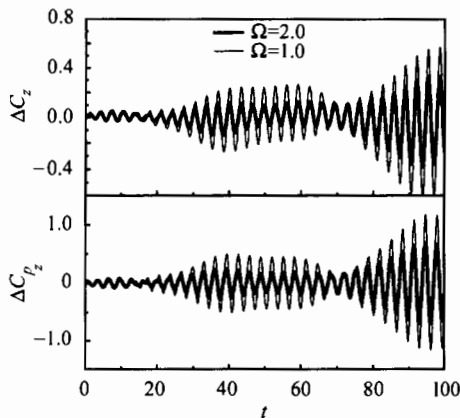


图 1 等效普朗克常数为 0.1 和 0.5,  $\lambda/\lambda_c = 0.1$  时,  $z$  方向上位置和动量的量子力学期望值和经典力学确切值的差值  $\Delta C_z$  和  $\Delta C_{p_z}$  随时间的演化

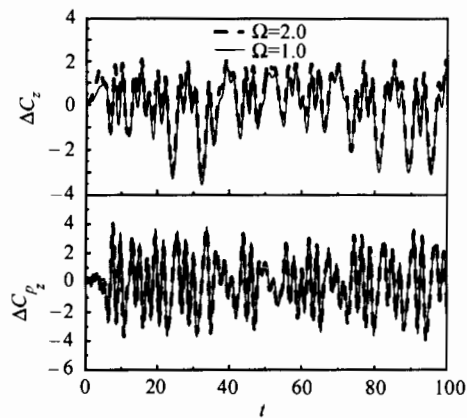


图 2 等效普朗克常数为 0.1 和 0.5,  $\lambda/\lambda_c = 0.95$  时,  $z$  方向上位置和动量的量子力学期望值和经典力学确切值的差值  $\Delta C_z$  和  $\Delta C_{p_z}$  随时间的演化

图 2 给出了  $\lambda/\lambda_c$  等于 0.8 时, 等效普朗克常数取 1.0 和 0.5,  $\Delta C_z$  和  $\Delta C_{p_z}$  随时间的演化. 实线表示等效普朗克常数取 1.0 时的结果, 虚线表示等效普朗克常数取 0.5 时的结果. 可以看到,  $\Delta C_Q$  随时间的演化过程与等效普朗克常数的大小基本无关, 说明此时量子

经典物理量之间的差异不是由于量子效应导致. 我们知道, 当波包起始于相空间中的混沌区域时, 在波包随时间演化的初始阶段, 波包指数型地扩散, 波包的动力学对称性被破坏, 动力学变量的期望值指数型地衰减趋向于一渐进值<sup>[7]</sup>. 因此,  $\Delta C_Q$  主要是由动力学效应产生的, 这样反映波包随时间指数型扩散特征的物理量可与经典系统中反映相空间拓扑结构被破坏, 相邻轨道指数型分离的经典物理量相对应. 在等效普朗克常数趋于零时, 波包的运动应该与相空间中的一束相轨道对应.

顾雁通过对维格纳分布函数<sup>[8]</sup>进行粗粒化从而引入了相空间分布不均匀度<sup>[4]</sup>, 指出量子态的相空间不均匀度与描述经典混沌运动的李雅普诺夫指数之间存在对应关系. 下面给出我们的数值计算结果.

### 3 量子相空间不均匀度和李雅普诺夫指数

为使量子力学能够像经典统计力学描述系综的相空间分布运动那样来描述量子系统的运动, Wigner 引进了描述量子系统状态的相空间分布函数<sup>[8]</sup>. 顾雁基于 Wigner 分布函数推导出了几率密度不均匀度, 并给出了其与李雅普诺夫指数之间的对应关系. 下面, 首先对推导过程作一简单的介绍. 从 Wigner 函数  $W(x)$  的粗粒化函数

$$W_\epsilon(x) = \int \delta_\epsilon(y) W(y-x) dy \quad (4)$$

出发, 将 Wigner 分布的粗粒熵  $S(W_\epsilon)$  按  $\epsilon$  幂级展开

$$S(W_\epsilon) = S(W) + \epsilon^2 h(W) + Q(\epsilon^2), \quad (5)$$

其中  $S(W) = -\ln\left(\int |W(x)|^2 dx\right)$ , 引入了系综分布不均匀度

$$h(W) = \sum_{j=1}^{2N} \int \left| \frac{\partial W(x)}{\partial x_j} \right|^2 dx / \left[ 2 \int |W(x)|^2 dx \right], \quad (6)$$

$N$  为系统的自由度. 可以证明, 对于任何哈密顿系统, 系综分布不均匀度  $h$  随着时间的增长与系综轨道的李雅普诺夫指数之间存在下面关系:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln h = \max_{x \in \Lambda} \{ LE_1(x) \}, \quad (7)$$

式中  $LE_1(x)$  是过  $x$  点轨道的第一 (即最大) 李雅普诺夫指数,  $\Lambda$  表示相空间中  $|\nabla \rho^0(x)|$  不为 0 的区域,  $\max$  表示在测度意义下对  $x$  求极大. 由于具体计算中等效普朗克常数的存在, 因此时间不可能趋向无限大, 只能限制在对数时障<sup>[9]</sup>内.

图 3 给出了形变强度  $\lambda/\lambda_c$  等于 0.1 和 0.95, 等效普朗克常数  $\frac{1}{\Omega}$  等于 1.0, 波包起始于相空间中一点  $(x, p_x; z, p_z = (0.0, 3.78; 2.0, 0.0))$  时, 量子非均匀度对数值  $\ln h$  随时间  $t$  的演化关系. 可以看到在  $\lambda/\lambda_c$  等于 0.1 时, 此时系统规则, 李雅普诺夫指数为 0,  $\ln h$  随时间振荡型地增大、减小, 虽然没有保持在一稳定值, 但增长极慢. 由图 1 可知, 这种偏差主要是由于量子效应导致, 当等效普朗克常数  $\frac{1}{\Omega}$  趋于 0 时, 两者可保持一致. 在  $\lambda/\lambda_c$

$\lambda_c$  等于0.95时,  $\ln h$  在对数时障内随时间指数型地增长至一极大值, 然后保持在该值附近做小范围振荡, 这是测不准关系的直接结果.

图4中实线给出对数时障内  $\ln h$  随时间的变化曲线, 虚线表示对该曲线进行拟合后得到的结果, 得到量子相空间测不准度随时间的增长率大约等于0.9. 图5给出了经典系统中李雅普诺夫指数随形变强度变化的图形. 图中李雅普诺夫指数随形变强度显示出先增大后减小, 而不是单调增加的这种特征作者还在进一步的研究之中, 但图5的结果与量子结果符合很好, 这里仅给出  $\lambda/\lambda_c$  等于0.95时的结果. 在形变强度  $\lambda/\lambda_c$  等于0.95时, 经典系统的李雅普诺夫指数约为0.4. 比较两者结果, 得到量子相空间测不准度随时间的增长率约为李雅普诺夫指数的2倍, 与式(7)符合很好.

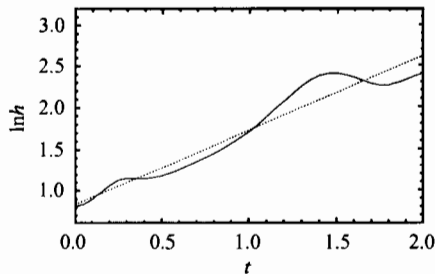


图4 对数时障内  $\ln h$  随时间的变化曲线及拟合后得到的结果

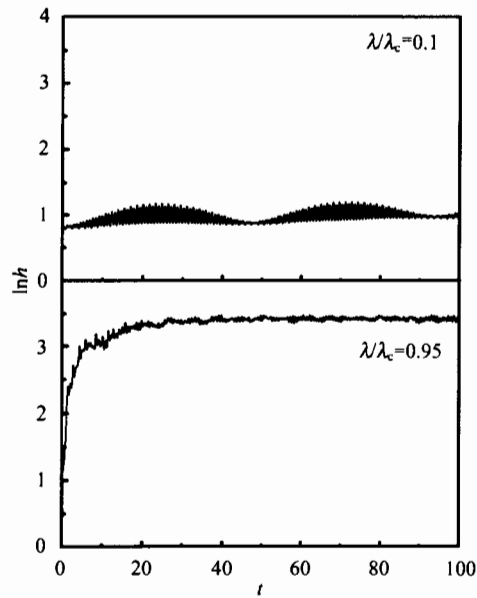


图3  $\lambda/\lambda_c$  等于0.1和0.95, 等效普朗克常数为1.0时, 量子非均匀度对数值  $\ln h$  随时间  $t$  的演化关系

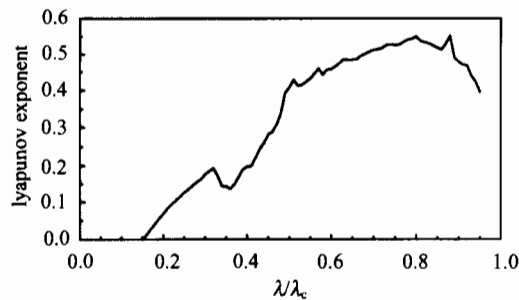


图5 经典系统中李雅普诺夫指数随形变强度的变化

## 4 结论

通过引入了形变二维谐振子系统的等效普朗克常数, 在等效普朗克常数取大小不同的值时, 比较了量子系统中基本动力学变量的期望值和经典系统中动力学变量的精确值的时间演化行为. 指出在规则系统中, 它们的差别主要是由于量子效应所导致, 当等效普朗克常数趋于0时, 量子效应也随之趋于0, 动力学变量的期望值随时间的演化对应于同一点出发的经典粒子的相空间轨迹. 并指出正是由于量子效应导致了规则系统中量子相空间不均匀度和经典李雅普诺夫指数间出现的偏差. 在混沌系统中, 波包在

相空间指数型扩散则反映了系统动力学对称性的破坏,描述量子波包在相空间中指数型扩散行为的物理量可与描述经典系统动力学对称性被破坏,相空间轨道指数型分离的物理量相对应. 等效普朗克常数趋于 0 时,波包的时间演化行为与相空间中的一束相轨道相对应,描述波包指数型扩散的相空间不均匀度数值与李雅普诺夫指数符合很好.

作者感谢徐躬耦先生在本工作中所给予的指导.

### 参考文献 (References)

- 1 Gutzwiller M C. Chaos in Classical and Quantum Mechanics, Springer New York, 1990
- 2 GU Yan. Quantum Chaos, Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House, Shanghai, 1996
- 3 XU Gong-Ou. Report in the 4th National Nuclear Reaction Conference, April, 1999
- 4 GU Yan. Physics Lett., 1990, **A149**(2,3):95—100
- 5 Heiss W D et al. Phys. Rev. Lett., 1994, **72**(15):2351—2354
- 6 LI Jun-Qing. J. Phys., 1998, **G24**:1021—1028
- 7 LIU Fang et al. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2000, **24**(4):331—336 (in Chinese)  
(刘芳等. 高能物理与核物理, 2000, **24**(4):331—336)
- 8 Wigner E P. Phys. Rev., 1932, **40**: 749
- 9 Berry M V, Balazs N L. J. Phys., 1979, **A12**:625

## Quantum Classical Correspondence in a 2-Dimensional Deformed Harmonic Oscillator System \*

LIU Fang<sup>1</sup> LI Jun-Qing<sup>2</sup> XING Yong-Zhong<sup>2</sup>

1(Institute of Modern Physics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

2(Institute of Modern Physics, The Chinese Academy of Sciences, Lanzhou 730000, China)

**Abstract** The time evolution of expectation values of the basic dynamic variables in a quantum system under different effective Planck constant were compared with the exact values of the basic dynamic variables in classical system. It is found, for the regular motion, the difference comes from the quantum effect; for the chaotic motion, it comes from the dynamical effect and the destruction of the dynamical system. With these results, a correspondence between the quantum heterogeneity of the phase space and the Lyapunov exponent is made satisfactorily.

**Key words** quantum chaos, quantum classical correspondence, effective Planck constant, quantum heterogeneity

---

Received 19 October 2001, Revised 26 December 2001

\* Supported by National Natural Science Foundation of China (10175082), CAS Knowledge Innovation Project (KJX2-SW-N02), 100 Talents Programme of CAS and Major State Basic Research Development Program (G20000774001)