

3 + 1 维格点规范理论 0^{++} 和 0^{--} 胶球质量*

胡连¹ 惠萍² 陈启洲³

1(华南师范大学物理系 广州 510630)

2(广东教育学院物理系 广州 510303)

3(中山大学物理系 广州 510275)

摘要 在哈密顿形式下,把无规相近似方法从(2+1)维 $SU(2)$ 格点规范场推广到 3+1 维 $SU(3)$ 格点规范场,利用这种改进的耦合集团展开方法计算 3+1 维 $SU(3)$ 的真空波函数和 0^{--} 与 0^{++} 胶球质量之比,得到令人满意的结果: $\gamma = \frac{m(0^{--})}{m(0^{++})} = 1.8578 \pm 0.0506$.

关键词 格点规范理论 真空波函数 胶球质量

1 引言

量子色动力学(QCD)被认为是描写基本粒子强相互作用最成功的规范理论. 而 QCD 理论的纯规范场部分具有非平庸的真空结构及其束缚态(即胶球). 1980 年 J. P. Greensite 猜想 $SU(N)$ 群的格点规范理论真空态应是 $\exp[R(U)]^{[1]}$, 利用 Kogut-Susskind 哈密顿量

$$H = \frac{g_H^2}{2a} \left[\sum_l E_l^a E_l^a - \frac{2}{g_H^4} \sum_p \text{Tr}(U_p + \text{h.c.}) \right] \quad (1.1)$$

导出格点规范理论真空波函数的薛定谔本征值方程:

$$\sum_l \{ [E_l^a, [E_l^a, R(U)]] + [E_l^a, R(U)][E_l^a, R(U)] \} - \frac{2}{g_H^4} \sum_p \text{Tr}(U_p + \text{h.c.}) = \frac{2}{g_H^2} \epsilon_0, \quad (1.2)$$

其中 E_l^a 是链 l 上的“色电”场强, $E_l^a |0\rangle = 0$, a 是格距, $R(U)$ 是对 Wilson 圈构成的集团求和. g_H^2 是哈密顿形式的耦合常数, 它和欧勒形式的耦合常数 g_E^2 的关系为

$$\frac{1}{g_H^4} = \frac{1}{g_E^4} + \frac{0.02736}{g_E^2} - 0.02794,$$

直到目前为止, 方程(1.2)还没有找到严格解. 人们对(1.2)式进行了数值模拟(MC 方法)

2001-10-30 收稿

* 国家自然科学基金(10174098)资助

和解析计算, 获得一些有意义的结果^[2-11]. 在解析计算中, 普遍的方法是集团展开. 但进行高阶计算时遇到两个困难: 一个困难是当(强耦合微扰理论)阶数增加时, 集团数目迅速增加. 另一个困难是: 由于规范群元素满足么模条件, 使得相等方块数目所组成的图形不独立, 究竟选取它们中的哪些图形作为计算的基矢, 存在一定任意性(这种情况跟量子力学中的变分波函数的选取具有相似之处). 在展开过程中, 为了克服这些困难, 将凝聚态理论物理中的无规相近似方法应用到集团展开方法中, 使得计算大大简化^[12-14]. 文献[12]指出, 在 2+1 维 $SU(3)$ 格点规范场中, 真空波函数只由相连的 Wilson 圈图组成. 在 (1.2) 式的近似计算过程中, 首先利用么模条件将重叠的相连图变成不相连图, 然后将这些不相连的小 Wilson 圈取平均值, 经过这些简化后得到真空波函数 μ_0 和 μ_2 的值具有良好的标度行为和收敛性. 本文将文献[12]的方案推广到 3+1 维情况.

2 真空波函数的三级近似

设真空波函数为

$$|\Omega\rangle = e^{R(U)} |0\rangle, \quad (2.1)$$

其中

$$R(U) = \sum_i R_i(U). \quad (2.2)$$

一级近似图形为

$$R_1 = C_0 \left(\square + \square + \square \right) / 3 + \text{h.c} \quad (2.3)$$

式中 3 种 Wilson 圈图分别是在 yz 平面, xy 平面及 xz 平面的圈图, 所有的可能性都考虑到了, h.c 是前一项的共轭项, h.c 前面选加号是因为 0^{++} 的波函数是对称波函数. 将 R_1 代入 (1.2) 式. 由于 $[E_i^a, R_1][E_j^a, R_1]$ 产生重叠图和非重叠的二阶图, 利用 $SU(3)$ 群的么模条件

$$A_{i_1 i_1} A_{i_2 i_2} A_{i_3 i_3} \epsilon_{i_1 i_2 i_3} = \epsilon_{i_1 i_2 i_3}$$

将相连的重叠图变成不相连的重叠图, 并将其中一个图用平均值代替, 例如:

$$\square = \square - 2\square \approx \langle \square \rangle - 2\square, \quad (2.4)$$

其中

$$\langle \square \rangle = \langle \square \rangle = \langle \square \rangle = \langle \square \rangle.$$

对于不相连的图形, 也作同样的近似处理, 例如:

$$\square\square = \langle \square \rangle \square.$$

经过这种简化后, 真空波函数的结构简单, 得到的二阶空心图 4 种形状 (36 个图略), 其展开系数为 c_1, c_2, c_3, c_4 . 三阶空心图有 498 个 (略). 二阶以下的方程为

$$8c_1 - 2c_0^2/3 + 2c_0 c_1 \langle \square \rangle + 10c_1 c_3/3 - 2c_0 \langle \square \rangle [3c_1 - c_3 - c_4]/13 = 0,$$

$$8c_2 - 4c_0^2/3 + 2c_0 c_2 \langle \square \rangle + 10c_0 c_4/3 - 2c_0 \langle \square \rangle [(2/19 + 7/39)c_2 - 2c_3/13 - 2(2/39 +$$

$$\begin{aligned}
 & (1 - 3/47)/19]c_4] = 0, \\
 & 31c_3/3 + 2c_0^2/3 + 10c_0c_3\langle \square \rangle/3 + 2c_0c_2 - c_0\langle \square \rangle[(12/23 + 4/45)c_3 + (3/23 + 4/45)c_4] = 0, \quad (2.5) \\
 & 31c_4/3 + 4c_0^2/3 + 10c_0c_4\langle \square \rangle/3 + 2c_0c_2 - 2c_0\langle \square \rangle[(6/23 + 8/45)c_3 + (11/23 + 8/47 + 8/45)c_4] = 0, \\
 & 16c_0/3 - \beta_E^2 + 2c_0^2(\langle \square \rangle - 2)/3 + \langle \square \rangle(c_3 + c_4) - 2c_0(1 + \langle \square \rangle)[c_1 + c_2 + 5(c_3 + c_4)/3] = 0, \\
 & w_0 = -4c_0^2,
 \end{aligned}$$

其中 w_0 被定义为 $w|\Omega\rangle = w_0|\Omega\rangle$, $w = \frac{2a}{g_E}H, \beta_E = \frac{6}{g_E}$. 为了解方程组(2.5), 我们按照文献[12]的方法, 将 w 改为 w'

$$w \longrightarrow w' = w + \frac{1}{3}c_0' \left[\square + \text{diag} + \text{diag} \right] + \text{h.c} \quad (2.6)$$

得到

$$\langle \square \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial w'}{\partial c_0'} = -4c_0 \frac{\partial c_0}{\partial c_0'} \quad (2.7)$$

由(2.5), (2.7)式可以求出 $c_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 和 $\langle \square \rangle$.

3 胶球波函数的薛定谔本征值方程

激发态(即胶球波函数) $|F\rangle$ 满足的薛定谔本征值方程

$$H|F\rangle = \epsilon_F|F\rangle, \quad (3.1)$$

其中

$$|F\rangle = [F(U) - \langle F(U) \rangle]|\Omega\rangle, \quad (3.2)$$

$F(U)$ 是由 Wilson 圈的集团构成. 将(3.2)代入(3.1)式得

$$\sum_i \{ [E_i^a, [E_i^a, F(U)]] + 2[E_i^a, F(U)][E_i^a, R(U)] \} = \Delta\epsilon_F [F(U) - \langle F(U) \rangle], \quad (3.3)$$

其中

$$F(U) = \sum_i F_i(U). \quad (3.4)$$

由于胶球是定域实体, 它们的波函数的详细结构将起重要作用. 除了质量外, 还用其它量子数 J^{PC} 表征. 由于 0^{++} 的这些量子数与真空态相同, 选取它的 $F(U)$ 与 $R(U)$ 具有相同的结构形式, 而在 2+1 维中, 两者稍有一些差别, 这种差别可能与空间维数有关. 至于 0^{--} 的 $F(U)$, 加上了相连重叠图的贡献, 对于这些图的选择带有一定任意性, 由于 $[E_i^a, F(U)][E_i^a, R(U)]$ 产生的高阶图很多, 应用无规近似方法去处理这些图时, 已经进行了近似计算. 因而对 $F(U)$ 的结构(即胶球波函数)可以作一些选择, 事先选取带有变分参数的波函数, 然后由能量极小值的条件决定这些变分参数. 这里是由封闭的代数方程组来决定波函数中所引入的变分参数 f_i .

3.1 0^{++} 胶球

设:
$$F_1(U) = f_0 \left[\square + \text{diag} + \text{diag} \right] + \text{h.c} \quad (3.5)$$

由于胶球波函数需要归一化,可令 $f_0 = 1$. 将二阶图 $R_2(U)$ 的系数 $c_1 \cdots c_4$ 改变成二阶图 $F_2(U)$ 的系数 $f_1 \cdots f_4$, 由方程式(3.3)得到决定系数 $f_1 \cdots f_4$ 以及 0^{++} 能隙 $\Delta\epsilon_F$ 的代数方程组:

$$\begin{aligned}
 & 8f_1 - \Delta\epsilon_F f_1 - 4c_0/3 + 2\langle \square \rangle (c_0 f_1 + c_1) + 10(c_0 f_3 + c_3)/3 - 2\langle \square \rangle [3c_0 f_1 + 3c_1 - c_0 f_3 - c_3 - \\
 & \quad c_0 f_4 - c_4]/(13 - \Delta\epsilon_F) = 0, \\
 & 8f_2 - \Delta\epsilon_F f_2 - 8c_0/3 + 2\langle \square \rangle (c_0 f_2 + c_2) + 10(c_0 f_4 + c_4)/3 - 2\langle \square \rangle \{ [7/3(13 - \Delta\epsilon_F) + \\
 & \quad 4/3(38/3 - \Delta\epsilon_F)](c_0 f_2 + c_2) - 2(c_0 f_3 + c_3)/(13 - \Delta\epsilon_F) - 4[1/(13 - \Delta\epsilon_F) + \\
 & \quad (1 - 1/(47/3 - \Delta\epsilon_F))/(38/3 - \Delta\epsilon_F)]/3 \} = 0, \\
 & 31f_3/3 - \Delta\epsilon_F f_3 + 4c_0/3 + 10\langle \square \rangle (c_0 f_3 + c_3)/3 + 2(c_0 f_1 + c_1) - \langle \square \rangle \{ (c_0 f_3 + c_3)[8/(46/3 - \\
 & \quad \Delta\epsilon_F) + 4/3(15 - \Delta\epsilon_F)] + (c_0 f_4 + c_4)[2/(46/3 - \Delta\epsilon_F) + 4/3(15 - \Delta\epsilon_F)] \} = 0, \\
 & 31f_4/3 - \Delta\epsilon_F f_4 + 8c_0/3 + 10\langle \square \rangle (c_0 f_4 + c_4)/3 + 2(c_0 f_2 + c_2) - \langle \square \rangle \{ (c_0 f_3 + c_3)[4/(46/3 - \\
 & \quad \Delta\epsilon_F) - 8/3(15 - \Delta\epsilon_F)] + (c_0 f_4 + c_4)[22/3(46/3 - \Delta\epsilon_F) + 8/3(47/3 - \Delta\epsilon_F) - \\
 & \quad 8/3(15 - \Delta\epsilon_F)] \} = 0, \\
 & 16c_0/3 - \Delta\epsilon_F + 4c_0(\langle \square \rangle - 2) + \langle \square \rangle (f_3 + f_4) - 2(1 + \langle \square \rangle)[c_0 f_1 + c_0 f_2 + 5c_0(f_3 + f_4)/3 + \\
 & \quad c_1 + c_2 + 5(c_3 + c_4)/3] = 0. \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

将(2.5), (2.7)式求得的 c_i 和 $\langle \square \rangle$ 代入上式变可以得到 $\Delta\epsilon_F$ (或胶球质量 $m(0^{++}) = g_E^2/2a_F \Delta\epsilon_F$, a_F 和 a_H 的关系由重整化群理论给出).

3.2 0^{--} 胶球

由于 0^{--} 波函数具有反对称性,一阶图 $F(U)$ 为

$$F_1'(U) = \frac{1}{3} f_0' \left[\square + \square + \square \right] - \text{h.c.} \dots \dots, \tag{3.7}$$

其中 $f_0' = 0$, 由于(3.3)式第 2 个对易子 $[E_1^{\prime\prime}, F_1'(U)][E_1^{\prime\prime}, R_1(U)]$ 产生的二阶图 $F_2'(U)$ 中没有 $[E_1^{\prime\prime}, \square][E_1^{\prime\prime}, \square]$ 部分. 考虑到 P, C 量子数与 0^{--} 相反, 两者的波函数结构可能不同. 在 0^{--} 波函数中保留相连重叠图, 设 $F_2'(U)$ 的图(略)的系数分别为 f_1', f_2', f_3', f_4' . 在第三阶图(略)中, 同样保留连接图. 由(3.3), (3.7)式和 $F_2'(U)$ 式得到待定系数 f_1', f_2', f_3', f_4' 的代数方程组:

$$\begin{aligned}
 & 8f_1' - \Delta\epsilon_F' f_1' - 4c_0/3 + 2\langle \square \rangle (c_0 f_1' + c_1) - 10c_3[1 + 10/(19 - \Delta\epsilon_F')]/9 - 40c_0 f_4'/3(19 - \Delta\epsilon_F') - \\
 & \quad 2\langle \square \rangle (3c_0 f_1' - 3c_1 - c_0 f_3' - c_3 - c_0 f_4' - c_4)/(13 - \Delta\epsilon_F') = 0, \\
 & 8f_2' - \Delta\epsilon_F' f_2' - 4c_0/3 + 2\langle \square \rangle (c_0 f_2' + c_2/2) - 5c_4[1 + 10/(19 - \Delta\epsilon_F')]/9 - 40c_0 f_4'/3(19 - \Delta\epsilon_F') - \\
 & \quad 2\langle \square \rangle \{ c_0 f_2' [7/(13 - \Delta\epsilon_F') + 4/(38/3 - \Delta\epsilon_F')] - 3(c_2/2 + c_3)/(13 - \Delta\epsilon_F') - \\
 & \quad 2(c_0 f_3' + c_4)[1/(13 - \Delta\epsilon_F') + (1 - 1/(47/3 - \Delta\epsilon_F'))/(38/3 - \Delta\epsilon_F')] \} = 0, \\
 & 31f_3'/3 - \Delta\epsilon_F' f_3' + 4c_0/3 + 10\langle \square \rangle (c_0 f_3' + c_4/2)/9 - c_2[1 + 6/(46/3 - \Delta\epsilon_F')]/3 - \\
 & \quad 8c_0 f_4'/(46/3 - \Delta\epsilon_F') - 2\langle \square \rangle \{ c_0 f_3' [9/(46/3 - \Delta\epsilon_F') + 4/(47/3 - \Delta\epsilon_F') + 2/(15 - \Delta\epsilon_F')] + \\
 & \quad c_3[3/(46/3 - \Delta\epsilon_F') + 2/(15 - \Delta\epsilon_F')] + c_4[1/(46/3 - \Delta\epsilon_F') + 1/(47/3 - \Delta\epsilon_F')]/2 \} = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 40f'_4/3 - \Delta\epsilon'_F f'_4 + 8c_0/9 + 8\langle \square \rangle c_0 f'_4 [1 - 6/(19 - \Delta\epsilon'_F)]/9 - 20\langle \square \rangle (c_0 f'_3 + c_4)/(19 - \Delta\epsilon'_F) = 0, \\
& 16/3 - \Delta\epsilon'_F + 4c_0(\langle \square \rangle - 2)/9 + \langle \square \rangle f'_3 - 8f'_4 - 8c_0 f'_4 \langle \square \rangle [1 + 9/(46/3 - \Delta\epsilon'_F) - \\
& \quad 30/(19 - \Delta\epsilon'_F) - 24/(24 - \Delta\epsilon'_F)] + 10\langle \square \rangle (c_4/2 + c_3) [1 + 10/(19 - \Delta\epsilon'_F)]/9 + \\
& \quad c_2 \langle \square \rangle [1 + 6/(46/3 - \Delta\epsilon'_F)]/3 - 10(c_0 f'_3 + c_3)/3 - 2c_0(f'_1 + f'_2) + 2c_1 = 0. \quad (3)
\end{aligned}$$

4 计算结果和讨论

1) 图 1 给出 0^{++} 和 0^{-+} 的能隙 $\Delta\epsilon_F$ 和 $\Delta\epsilon'_F$ 依赖于 β_E 的变化曲线. 随着 β_E 的增加, 它们都以几乎相同的速度下降, 但格距 a_H 与 β_E 的关系还没能显示出重整化群理论预言的指数行为, 必需进行四级以上的计算才可能显示出是否是指数行为, 这种高阶近似包括的图形太多, 无法进行手算.

2) 图 1 给出 0^{-+} 和 0^{++} 的质量比 $\gamma =$

$\frac{m(0^{-+})}{m(0^{++})} = \frac{\Delta\epsilon'_F}{\Delta\epsilon_F}$. 从 $\beta_E = 9.6 - 14.4$ 的较大范围内, 比值 γ 几乎是常数 ($\gamma = 1.8578 \pm 0.0506$). 与 Pade' 近似结果^[15] $\gamma = 2.2 \pm 0.2$ 和 Monte-Carlo 模拟结果^[2] $\gamma = 3.43 \pm 1.50$ (误差太大) 有些不同.

3) 现在我们都采用相连空心图作为 0^{++} 真空波函数的基矢, 使计算过程大大简化, 如果加上相连重叠图, 会使 γ 的结果更好.

4) 进一步可以将此方法推广到 0^{-+} 和 2^{++} 的计算.

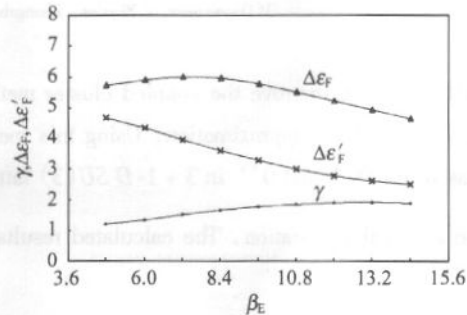


图 1

参考文献 (References)

- Greensite J P. Nucl. Phys., 1980, **B166**: 113—124
- Weingarten D. Nucl. Phys. (Proc. Suppl.), 1993, **B34**: 29
- GUO S H, CHEN Q Z, LI L. Phys. Rev., 1994, **D49**(1): 507—510
- CHEN Q Z, GUO S H, ZHENG W H et al. Phys. Rev., 1994, **D50**(5): 3564—3565
- CHEN Q Z, CAI P F, FANG X Y et al. Commun. Theor. Phys., 1997, **27**: 337—342
- CHEN Q Z, LUO X Q, GUO S H. Phys. Lett., 1995, **B348**: 560—564
- HU L, HUI P, CHEN Q Z. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1997, **21**(11): 995—998 (in Chinese)
(胡连, 惠萍, 陈启洲. 高能物理与核物理, 1997, **21**(11): 995—998)
- HUI P. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1998, **22**(4): 322—325 (in Chinese)
(惠萍. 高能物理与核物理, 1998, **22**(4): 322—325)
- HUI P. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1999, **23**(4): 340—346 (in Chinese)
(惠萍. 高能物理与核物理, 1999, **23**(4): 340—346)
- HUI P. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1999, **23**(12): 1171—1176 (in Chinese)
(惠萍. 高能物理与核物理, 1999, **23**(12): 1171—1176)
- HUI P, CHEN Q Z. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 1995, **19**(9): 820—825 (in Chinese)
(惠萍, 陈启洲. 高能物理与核物理, 1995, **19**(9): 820—825)

- 12 HUI P, FANG X Y, CHEN Q Z. Phys. Rev., 2000, **D62**:034505
- 13 HUI P, CHEN Q Z. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2000, **24**(9):805—809(in Chinese)
(惠萍, 陈启洲. 高能物理与核物理, 2000, **24**(9):805—809)
- 14 HUI P. High Energy Phys. and Nucl. Phys., 2000, **24**(6):490—494(in Chinese)
(惠萍. 高能物理与核物理, 2000, **24**(6):490—494)
- 15 Van den C, Horn D. Phys. Rev., 1987, **D35**:2824

Glueball Masses of the 0^{++} and 0^{--} in 3 + 1-D $SU(3)$ LGT*

HU Lian¹ HUI Ping² CHEN Qi-Zhou³

1(Department of Physics, Huanan Teachers University, Guangzhou 510630, China)

2(Department of Physics, Guangdong Education College, Guangzhou 510303, China)

3(Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275, China)

Abstract We improve the coupled cluster method in lattice gauge theory based on the application of the random phase approximation. Using this method, we study the vacuum wavefunction and glueball mass of the 0^{--} and 0^{++} in 3 + 1-D $SU(3)$ lattice gauge theory by finding the solution of the Hamiltonian eigenvalue equation. The calculated results are satisfying $\left(\gamma = \frac{m(0^{--})}{m(0^{++})} = 1.8578 \pm 0.0506 \right)$.

Key words lattice gauge theory, vacuum wavefunction, glueball masses

Received 30 October 2001

* Supported by NSFC(10174098)