

强流 AVF 型迴旋加速器中的 空间电荷效应和束晕

欧阳华甫

(中国科学院高能物理研究所 北京 100039)

摘要 详细推导了 AVF 型迴旋加速器中束团粒子在曲线坐标系中的动力学方程(考虑和不考虑空间电荷相互作用力两种情况). 在假定动力学方程中各参数值的前提条件下,用 Lunge-Kutta 方法对考虑空间电荷时的动力学方程进行了数值计算. 结果表明,束晕的形成和发展同样也是强流迴旋加速器中束流损失的一个主要原因. 但束晕形成的机制不同于直线加速器的情况,它不是由共振和混沌引起,而是由于粒子的排斥运动和束团内粒子的涡流运动引起的.

关键词 AVF 型迴旋加速器 动力学方程 空间电荷效应 束晕 涡流

1 引言

强流、高能加速器因可用于核废料的处理、氙的生产、钷的嬗变、核物理实验以及作为洁净核能的驱动装置而被普遍关注^[1]. 相对于直线加速器,迴旋加速器因在造价等方面所具有的优势而与直线加速器一样受到人们的重视. AVF(Azimuthally Varying Field)型迴旋加速器的特点是:在满足等时同步的条件下(即平均磁场强度随半径增加而增大),通过改变加速器方位角方向的磁场强度来保证粒子在垂直方向运动的稳定性^[2]. 由于方位角方向磁场强度的变化,即使是平衡粒子的运动也比较复杂. 要从理论上得到粒子的动力学方程,必须对加速器进行一系列的简化. 为此这里假设:1)磁场关于加速器的中心平面严格对称;2)磁场严格遵守 s 重旋转对称并且 $s \geq 3$;3)粒子的能量为常量;4)磁场在方位角方向的变化不大.

首先,在极坐标系里推导出平衡轨道的表达式. 显然,在上述假定条件下,该轨道应位于加速器的中心平面. 然后,以此轨道作为参考轨道建立曲线坐标系,在曲线坐标系里推导出粒子的动力学方程(考虑和不考虑空间电荷相互作用两种情况). 最后,对方程在不同加速器参数值和束流初始条件下进行了数值计算. 结果表明,束晕现象同样也出现在强流迴旋加速器中,并可能成为阻碍迴旋加速器流强进一步提高的主要原因.

2 平衡轨道方程

2.1 磁场

选 θ, r, z 为极坐标且 θ, r, z 遵守右手定则. 根据该定义, 正电荷在磁场方向与 z 轴的正向一致的磁场中沿 θ 的正方向旋转. 让 $z=0$ 的平面为回旋加速器的中心平面, z 轴为回旋加速器的旋转对称轴. 可以把中心平面上的磁场分解成两部分, 即只与半径有关而与方位角无关的平均场部分以及随方位角变化的部分, 而后者因其周期性又可以用 Fourier 级数展开. 这样一来, 中心平面上的磁场可表达为

$$B(r, \theta) = \bar{B}(r) \left\{ 1 + \sum_n [A_n(r) \cos(n\theta) + B_n(r) \sin(n\theta)] \right\}, \quad (1)$$

式中 $\bar{B}(r)$ 是磁场在半径 r 处的平均值. 由于已假定回旋加速器在方位角方向具有 s 重旋转对称性, 所以只有 $n = ks, k = 1, 2, 3 \dots$ 的项出现在表达式中. 因为粒子的轨道不仅与磁场本身有关, 同时还与磁场的变化形式相关. 为方便起见, 通过以下定义引入两个新的变量 x 和 $\mu(x, \theta)$,

$$r = r_0(1 + x), \quad \mu(x, \theta) = \frac{B(r_0 + r_0x, \theta)}{\bar{B}(r_0)}.$$

这里 r_0 是动量为 p_0 的粒子在强度为 $\bar{B}(r)$ 的磁场中其圆形轨道的半径. 即 $p_0 = er_0 \bar{B}(r_0)$. 根据以上定义, 可以把 $\mu(x, \theta)$ 沿径向展开为

$$\begin{aligned} \mu(x, \theta) = & 1 + \bar{\mu}'x + \frac{1}{2}\bar{\mu}''x^2 + \frac{1}{6}\bar{\mu}'''x^3 + \dots + \\ & \sum_n (A_n + A_n'x + \frac{1}{2}A_n''x^2 + \dots) \cos(n\theta) + \\ & (B_n + B_n'x + \frac{1}{2}B_n''x^2 + \dots) \sin \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\mu}' &= \left[\frac{d}{dx} \langle \mu(x, \theta) \rangle \right]_{x=0} = \left[\frac{r}{\bar{B}} \frac{d\bar{B}}{dr} \right]_{r=r_0}, \\ \bar{\mu}'' &= \left[\frac{d^2}{dx^2} \langle \mu(x, \theta) \rangle \right]_{x=0} = \left[\frac{r^2}{\bar{B}} \frac{d^2\bar{B}}{dr^2} \right]_{r=r_0}, \\ A_n &= A_n(r_0), \\ A_n' &= \left[\frac{d}{dx} A_n(r_0 + r_0x) \right]_{x=0} = \left[r \frac{d}{dr} A_n(r) \right]_{r=r_0}, \\ A_n'' &= \left[\frac{d^2}{dx^2} A_n(r_0 + r_0x) \right]_{x=0} = \left[r^2 \frac{d^2}{dr^2} A_n(r) \right]_{r=r_0} \end{aligned}$$

在推导以上两式时, 由 $\bar{B}(r)$ 的展开式和(1)式花括号中包含 $A_n(r)$ 或 $B_n(r)$ 项共同产生的交叉项被忽略掉. 因为这些项是比 $\bar{\mu}', A_n^2$ 和 B_n^2 还小的高级小量. 并且从下面的计算

还将看到,如果要在等时性迴旋加速器的垂直方向得到稳定的运动, $\bar{\mu}'$, A_n^2 和 B_n^2 应具有相同的量级.

2.2 平衡轨道

在仅有磁场的条件下,粒子的总能量 E 可以表达为^[3]

$$E^2 = P^2 c^2 + m_0^2 c^4, \quad (4)$$

$$P^2 = (mv)^2 = (p_\theta/r - eA_\theta)^2 + (p_r - eA_r)^2 + (p_z - eA_z)^2,$$

式中 p 为粒子的动量, $p_\theta = mrv_\theta + erA_\theta$, $p_r = mv_r + eA_r$, $p_z = mv_z + eA_z$, m_0 , m 分别为粒子的静止质量和相对质量, e 是粒子的电量,而 v_θ , v_r , v_z 是粒子在 3 个轴上的速度分量, A_θ , A_r , A_z 则是矢量磁场势的 3 个分量. 选角变量 θ 为独立变量,其共轭量变量 p_θ 为哈密顿 H ^[4] (Hamiltonian). 那么,哈密顿 H 可用其它变量表示为

$$H = -p_\theta = -r(P^2 - (p_r - eA_r)^2 - (p_z - eA_z)^2)^{1/2} - erA_\theta. \quad (5)$$

从粒子的哈密顿 H 出发,可推导出粒子(动量为 $p_0 = er_0 \bar{B}(r_0)$)的平衡轨道^[5],

$$r_c(\theta) = r_0(1 + x_c) = r_0 \left\{ 1 - \sum_n \left[\frac{3n^2 - 2}{4(n^2 - 1)^2} (A_n^2 + B_n^2) + \frac{1}{2(n^2 - 1)} (A_n A_n' + B_n B_n') \right] + \sum_n \left(\frac{A_n}{n^2 - 1} \cos(n\theta) + \frac{B_n}{n^2 - 1} \sin(n\theta) \right) \right\}.$$

另一个与 r_0 相对应且经常用到的量是平衡轨道的有效半径 R_0 ,它由以下方程定义,

$$R_0 \equiv \frac{1}{2\pi} \oint ds = r_0 \left[1 - \sum_n \frac{1}{2(n^2 - 1)} (A_n^2 + B_n^2 + A_n A_n' + B_n B_n') \right]. \quad (7)$$

3 粒子的动力学方程

3.1 粒子的哈密顿 H

以位于中心平面上的平衡轨道为参考曲线,建立曲线坐标系 (x, s, z) . 这里 s 是粒子在参考曲线上的距离, x 是粒子相对于参考曲线的水平坐标,而 z 则是粒子的垂直坐标. (x, s, z) 按左手定则变化,按此定义,带正电的粒子在方向与 z 轴正方向一致的磁场中将沿 s 增加的方向运动. 从这一节开始,所有的研究将在曲线坐标系 (x, s, z) 中进行. 如果考虑空间电荷相互作用力,则粒子的哈密顿 H 应由以下两部分组成

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = H_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + e\phi(\mathbf{r}, t). \quad (8)$$

式中 H_0 是由外场引起的哈密顿, e 是粒子的电量, ϕ 是束团中其它粒子所产生的势能,它由磁势能和电势能两部分组成. 本文暂不考虑束团之间的电荷相互作用,并且,当束团之间的距离很大时,这也是切实可行的. 当不考虑粒子之间的磁相互作用时,势能函数 ϕ 应满足 Poisson 方程,它在曲线坐标系中的形式为

$$\frac{1}{1 + hx} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 + hx) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{1 + hx} \frac{\partial \phi}{\partial s} \right) + (1 + hx) \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \right\} = -\frac{\rho}{\epsilon_0},$$

式中 $h = h(s)$ 是平衡轨道在 s 处的曲率, ρ 是束团的电荷密度. 当束流的横向尺寸远远

小于其在加速器中的半径时,可以把 \$(1+hx)\$ 近似为 1. 这时,上式退化为 Cartesian 形式.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

如果考虑粒子之间的磁相互作用,上面的公式形式则应作相应的变化,其变化由 Lorentz 变换来决定. 这时,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

并且,由空间电荷产生的 Lorentz 力 \$\mathbf{F} = -e\nabla\phi\$.

由电动力学的知识可知,哈密顿 \$H_0\$ 在曲线坐标系的一般表达式由以下等式给出

$$H_0 = \left[E_0^2 + (p_x - eA_x)^2 c^2 + (p_z - eA_z)^2 c^2 + \left(\frac{p_s}{1+hx} - eA_s \right)^2 c^2 \right]^{1/2},$$

其中 \$E_0 = m_0 c^2\$ 是粒子的静止能量. 从极坐标系里中心平面上磁场强度的表达式出发,可以得到磁场强度在曲线坐标系中其在中心平面上的表达式 \$B(x, s) = B_c(x, s, 0)\$. 利用关系式 \$\mathbf{B}(x, s, z) = \nabla \times \mathbf{A}\$ 及磁场强度 \$\mathbf{B}\$ 关于中心平面对称的性质,可以求得矢量势 \$\mathbf{A}(x, s, z)\$.

$$A_x(x, s, z) = -\frac{z^2}{2(1+hx)} \frac{\partial B}{\partial s} + O(z^4)$$

$$A_s(x, s, z) = \frac{z^2}{2} \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{1}{1+hx} \int_0^x (1+hx') B(x', s) dx' + O(z^4) \quad (12)$$

$$A_z(x, s, z) = 0.$$

为得到 \$A_x, A_s\$ 更为明了的表达式,必须知道磁场强度 \$B(x, s)\$ 及其导数沿平衡轨道的表达式. \$B(0, s)\$ 的表达式为^[6]

$$B(0, s) = \bar{B}(r_0) \left\{ 1 + \bar{\mu}' x_c + \frac{1}{2} \bar{\mu}'' x_c^2 + \dots + \sum_n \left(A_n + A'_n x_c + \frac{1}{2} A''_n x_c^2 + \dots \right) \cos \frac{ns}{R_0} + \sum_n \left(B_n + B'_n x_c + \frac{1}{2} B''_n x_c^2 + \dots \right) \sin \frac{ns}{R_0} \right\}. \quad (13)$$

在推导上式时,已近似地认为 \$\theta = s/R_0\$. 以 (13) 式为基础,从条件 \$p_0 = qr_0 \bar{B}(r_0) = qB(0, s)/h\$ 出发可得

$$\rho_c(s) \equiv 1/h \equiv r_0 \frac{\bar{B}(r_0)}{B(0, s)} = r_0 \left[1 + \sum_n \frac{n^2(A_n^2 + B_n^2) - (A_n A'_n + B_n B'_n)}{2(n^2 - 1)} - \sum_n \left(A_n \cos \frac{ns}{R_0} + B_n \sin \frac{ns}{R_0} \right) \right]. \quad (14)$$

和

$$A_x(x, s, z) = -\frac{z^2}{2(1+hx)} \frac{\partial B(x, s)}{\partial s} \approx -\frac{z^2}{2(1+hx)} \frac{\partial B(0, s)}{\partial s} \approx \frac{z^2}{2(1+hx)} \bar{B}(r_0) \left[\sum_n \left(\frac{n}{R_0} A_n \sin \frac{ns}{R_0} - \frac{n}{R_0} B_n \cos \frac{ns}{R_0} \right) \right] \approx r_0 \bar{B}(r_0) \left[\frac{1}{2} \frac{z^2}{r_0^2} \sum_n \left(n A_n \sin \frac{ns}{R_0} - n B_n \cos \frac{ns}{R_0} \right) \right]. \quad (15)$$

要得到 $A_z(x, s, z)$ 的表达式则相对复杂且困难得多. 为此, 首先计算等式(12)中关于 A_z 的方程中的 $\partial B/\partial x$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial x} &= \frac{\partial B}{\partial r_0} \frac{\partial r_0}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \cos\alpha \frac{\partial B}{\partial r_0} + \frac{\sin\alpha}{r_0} \frac{\partial B}{\partial \theta} \approx \\ &(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/2} \frac{\partial B}{\partial r_0} + \frac{\operatorname{tg}\alpha}{r_0} \frac{\partial B}{\partial \theta} \approx -\frac{\bar{B}(r_0)}{r_0} Q_z(s). \end{aligned} \quad (16)$$

式中 α 是单位矢量 \hat{r}_0 和单位矢量 \hat{x} 之间的夹角, 而且其正向与单位矢量 $\hat{\theta}$ 一致. $Q_z(s)$ 满足

$$\begin{aligned} Q_z(s) &= -\left[\bar{\mu}' + \sum_n \frac{-n^2(A_n^2 + B_n^2) + A_n A_n' + B_n B_n' + A_n A_n'' + B_n B_n''}{2(n^2 - 1)} + \right. \\ &\left. \sum_n \left(A_n' \cos \frac{ns}{R_0} + B_n' \sin \frac{ns}{R_0} \right) \right]. \end{aligned} \quad (17)$$

正如将在后面要看到的那样, $Q_z(s)$ 是不考虑空间电荷相互作用力时, 粒子在 z 方向的振动频率. 等式(12)中关于 A_z 的方程的第二项

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + hx} \int_0^x (1 + hx') B(x', s) dx' &\approx \frac{1}{1 + hx} \int_0^x (1 + hx') \left[B(0, s) + \frac{\partial B}{\partial x'} \right] dx' \approx \\ &\bar{B}(r_0) r_0 hx - \frac{1}{2} \bar{B}(r_0) h^2 x^2 - \frac{1}{2} \bar{B}(r_0) r_0 Q_z \frac{x^2}{r_0^2}. \end{aligned} \quad (18)$$

再推导(18)式, 已假定 $\partial B/\partial x$ 不依赖于 x . 综合(12), (16)和(18)可得

$$A_z(x, s, z) = -\bar{B}(r_0) r_0 \left(hx - \frac{1}{2} h^2 x^2 - \frac{Q_z}{2} \frac{x^2}{r_0^2} + \frac{Q_z}{2} \frac{z^2}{r_0^2} \right). \quad (19)$$

在哈密顿 H_0 的表达式(11)中, 变量 x, p_x 和 z, p_z 相对于 r_0, p_0 可以认为是小量, 但变量 s, p_s 不能这样认为. 如果仅考察粒子相对于参考粒子(其速度为 $v_0 = p_0/\gamma m_0$) 的运动, 那么也就可以把在 s 方向的各个变量与在 x 和 z 方向的各个变量一样当作小量对待. 这样一来, 就可以把哈密顿 H_0 的表达式(11)中的所有变量都看作小量来处理, 并对哈密顿 H_0 进行展开. 为此, 作以下正则变换

$$s = v_0 t + \bar{s}; \quad p_s = p_0 + \bar{p}_s.$$

以上变换的产生函数为

$$G(p_s, \bar{s}, t) = \bar{s}(p_0 - p_s) - v_0 p_s t; \quad \frac{\partial G}{\partial t} = -v_0 p_s. \quad (20)$$

这时, 哈密顿 H_0 函数变为

$$\begin{aligned} \bar{H} \quad H_0 + \frac{\partial G}{\partial t} &= H_0 - v_0 p_s = \\ &v_0 p_0 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{p_x}{p_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{p_z}{p_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{p}_s}{p_0} \right)^2 + \frac{1}{2} Q_z(s) \left(\frac{x}{R_0} \right)^2 + \right. \\ &\left. \frac{1}{2} Q_z(s) \left(\frac{z}{R_0} \right)^2 + \frac{1}{2} Q_z(s) \left(\frac{z}{R_0} \right)^2 - \eta(s) \frac{x}{R_0} \frac{\bar{p}_s}{p_0} \right] + E - v_0 p_0. \end{aligned}$$

式中

$$Q_x(s) = \left(h^2 - \frac{Q_z}{r_0^2} \right) R_0^2 = 1 + \frac{\mu'}{\mu} \sum_n \frac{-(A_n^2 + B_n^2) + A_n A_n' + B_n B_n' + A_n A_n'' + B_n B_n''}{2(n^2 - 1)} + \sum_n (2A_n + A_n') \cos \frac{ns}{R_0} + (2B_n + B_n') \sin \frac{ns}{R_0}, \quad (22)$$

$$\eta(s) = hR_0 = 1 + \sum_n A_n \cos \frac{ns}{R_0} + B_n \sin \frac{ns}{R_0}, \quad (23)$$

E 为粒子的能量.

3.2 不考虑空间电荷力时粒子的动力学方程

从(21)式出发,利用哈密顿方程可得到粒子的动力学方程

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_x} = \frac{v_0}{p_0} p_x, \quad \frac{dp_x}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -v_0 p_0 \left(\frac{Q_x}{R_0^2} x - \eta \frac{1}{R_0 p_0} \bar{p}_x \right),$$

和

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{Q_x v_0^2}{R_0^2} x = \eta \frac{v_0^2}{R_0 p_0} \bar{p}_x,$$

如果把 $s_0 (s_0 = v_0 t)$ 作为独立变量,那么以上等式变为

$$\frac{dx}{ds_0} = \frac{1}{p_0} p_x,$$

$$\frac{dp_x}{ds_0} = -p_0 \left(\frac{Q_x}{R_0^2} x - \eta \frac{1}{R_0 p_0} \bar{p}_x \right),$$

$$\frac{d^2 x}{ds_0^2} + \frac{Q_x}{R_0^2} x = \eta \frac{1}{R_0 p_0} \bar{p}_x.$$

同理可得

$$\frac{dz}{ds_0} = \frac{1}{p_0} p_z, \quad \frac{dp_z}{ds_0} = -\frac{Q_z p_0}{R_0^2} z, \quad \frac{d^2 z}{ds_0^2} + \frac{Q_z}{R_0^2} z = 0.$$

和

$$\frac{d\bar{s}}{ds_0} = \frac{1}{\gamma^2 p_0} \bar{p}_s - \frac{\eta}{R_0} x, \quad \frac{d\bar{p}_s}{ds_0} = 0.$$

3.3 考虑空间电荷相互作用力时的运动方程

由哈密顿 $\bar{H} = \bar{H}_0 + e\phi$,

可得粒子的运动方程为

$$\frac{dx}{ds_0} = \frac{1}{p_0} p_x,$$

$$\frac{dp_x}{ds_0} = -p_0 \left(\frac{Q_x}{R_0^2} x - \eta \frac{1}{R_0 p_0} \bar{p}_x \right) - \frac{e}{v_0} \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

$$\frac{d^2 x}{ds_0^2} + \frac{Q_x}{R_0^2} x = \eta \frac{1}{R_0 p_0} \bar{p}_x - \frac{e}{p_0 v_0} \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

$$\frac{dz}{ds_0} = \frac{1}{p_0} p_z, \quad \frac{dp_z}{ds_0} = -\frac{Q_z p_0}{R_0^2} z - \frac{e}{v_0} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \frac{d^2 z}{ds_0^2} + \frac{Q_z}{R_0^2} z = -\frac{e}{p_0 v_0} \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

$$\text{和} \quad \frac{d\bar{s}}{ds_0} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{\bar{p}_s}{p_0} - \frac{\eta}{R_0} x, \quad \frac{d\bar{p}_s}{ds_0} = -\frac{e}{v_0} \frac{\partial \phi}{\partial s}, \quad (29)$$

$$\text{其中} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial s^2} = -\frac{1}{\gamma^2} \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (30)$$

4 不考虑空间电荷力时粒子的运动

从不考虑空间电荷力时粒子的动力学方程(24),(25)和(26)及方程中各参数的表达式可以看出,粒子在三个方向的运动几乎都是简谐振动. 粒子在纵向(即方位角方向)的 β 振荡和径向(即半径方向)的 β 振荡具有相同的振荡频率 Q_r ,但两者之间有 90° 相位差. 尽管粒子在垂直方向的运动独立于纵向和径向的运动,可纵向的运动与径向的运动相互耦合. 而且,粒子在水平面上的运动轨迹基本上是一个圆. 当然,由于各个粒子的初始条件不同,各粒子的运动轨迹(圆)的圆心和半径也不同. 综合粒子在垂直方向的 β 振荡运动,那么粒子则是在一个个圆柱的表面上作快速运动. 在等时性迴旋加速器中,因为粒子在纵向和径向的 β 振荡的振荡频率 Q_r 绝对大于1,即,在一个迴旋周期内,粒子所完成的 β 振荡大于1. 所以,在一个迴旋周期内,粒子水平面上所经历的轨迹应大于一个圆的周长. 这样,在束流的传输过程中,粒子在束团中的分布在不同圈内会稍有不同. 不过,由于所有粒子的运动都由相同的动力学方程决定,束团内粒子分布的拓扑性质不会发生变化.

5 考虑空间电荷力时粒子的运动

原则上,借助公式(30),对动力学方程(27),(28)和(29)进行数值计算可得到粒子的运动方程. 但是,对某一任意的粒子分布,要通过求解(30)式得到由粒子产生的势能函数 ϕ 并不是一件容易的事. 另一方面,当束团的纵向尺寸远远大于其横向尺寸时,可以忽略由粒子产生的纵向磁场力. 而且,由于束流的损失主要发生在粒子的能量比较低的情况下,这时粒子之间的磁相互作用力并不明显. 在本文的数值计算中,首先利用库仑定理计算出粒子所产生的电场势,然后用以下等式近似地计算出粒子之间的电磁相互作用力.

$$F_x = -\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \phi_r}{\partial x}, F_z = -\frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial \phi_r}{\partial z}, F_s = -\frac{\partial \phi_r}{\partial s}. \quad (31)$$

有了上式后,就可以利用 Lunge-Kutta 方法对动力学方程(27),(28)和(29)进行数值计算了. 虽然以上推导是在粒子的能量为常数的情况下进行的,但在数值计算时,可以通过引入高频电场把上述情况推广到粒子能量变化时的情况.

在以下的模型计算中,动力学方程(27),(28)和(29)中各参数被预先假定(尽量使各参数的值切合实际). 粒子的初始能量选为 1MeV,高频电场的峰值电压为 0.5MeV,加速相位为 0. 粒子每圈只加速一次,并且忽略 D 形电极之间的宽度. 初始时,500 个动量散度为 0 的粒子随机的分布在一个长方体内. 图 1 显示的是束团在前几十圈的演变过程. 图中只给出了束团在水平面上变化的情况,因为在束流的引出时,只有束团径向的尺寸和束流的引出效率紧密相关. 图中一个明显的特点是:由于束团的丝化,束团在水平面上的

形状由初始的长方形发展成银河系形,最终形成一个半径比束核大得多的束晕. 尽管绝大部分束团粒子集中在半径很小的束核内,但束晕因其比束核大得多的半径而很容易损失. 也正是束晕的形成和损失阻碍强流加速器束流的进一步提高. 在模拟计算中还发现,束团的粒子密度越大,束团的丝化变形和束晕的形成就越快. 不过,束团最后大小似乎与束团的密度无关而只决定于束团的粒子数. 这一结果可以从束团内粒子的涡流运动^[7]以及粒子向外的排斥运动得到很好的解释. 同时,这一结果也与文献[8,9]所得到的一致.

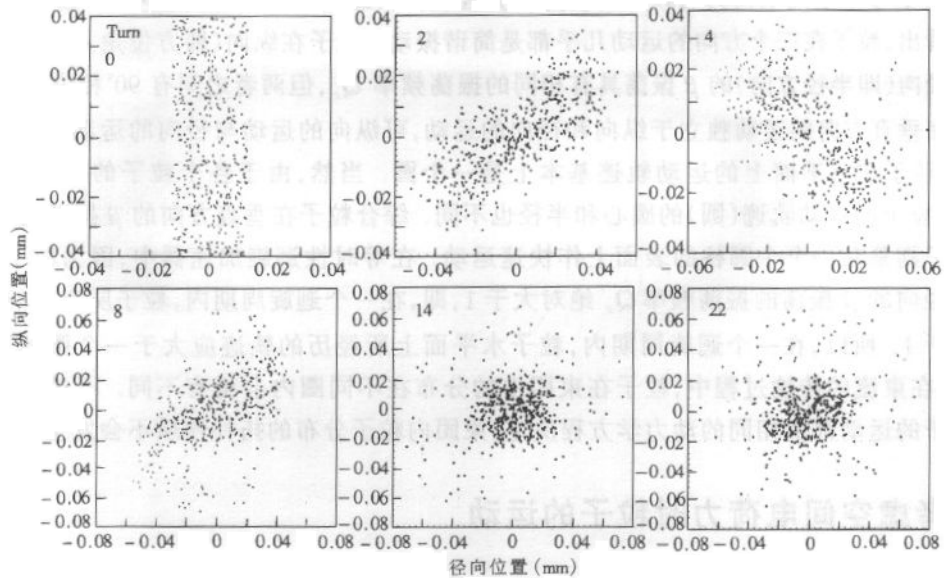


图 1 电荷密度为 $10^7/\text{mm}^3$ 的束团在加速器中前几十圈的演变

尽管在回旋加速器中空间电荷力的横向分量只起到弱化聚焦的效果,空间电荷力的纵向分量对束团的作用则具有累积效果,这是因为在等时性回旋加速器中在纵向不存在聚焦. 而粒子的纵向运动可以通过纵向和径向之间的强耦合影响粒子的径向运动. 因此,相对于空间电荷力的横向分量,空间电荷力的纵向分量在束流更小的情况下就对束流的传输性质产生影响. 由文献[7]中公式(1)可知,由于空间电荷产生的电场和高频加速电场的存在,粒子将在束团内作涡流运动,并且粒子涡流运动的速度与该粒子所在位置的电场成正比. 另一方面,由于粒子之间的相互排斥作用,一些粒子(因为粒子初始分布的不均匀性,这些粒子不一定来自束团的外层)有可能获得足够的能量而从束团的主体逃离出来. 一旦成功,这些粒子所受到的空间电荷力将变小,这样一来,这些粒子的涡流运动也将减慢. 正是粒子涡流运动速度的差异与粒子之间的排斥运动导致了束晕的形成.

为进一步说明束团在加速器中的演变过程,在图 2(a),(b)中,给出了被跟踪的两个典型粒子(不同的初始条件)的运动轨迹. 图 2(a),(b)只记录了粒子每一圈的初始位置. 为便于比较,图中也给出了粒子在相同初始条件下,但不考虑空间电荷力时的轨迹. 从图中可以看出,图 2(a)中粒子的运动几乎是无规的而且局限于束核. 显然,粒子在束核的运动由空间电荷力主宰,这是因为束核粒子的密度比较大的缘故. 图 2(b)中的粒子,虽然其在水

平面的初始位置也接近于束核中心,但它逃离出束核并最终成为束晕粒子.从图中可以看出,粒子一旦成为束晕粒子,它便不再回到束核,这时可用平均场来近似束核粒子对该粒子的作用,该粒子的运动则由这种平均场和外场共同决定.迴旋加速器中束晕这一特点不同于强流直线加速器中的情况.在强流直线加速器中,束晕粒子并不是总处于束晕,而是可以回到束核.基于迴旋加速器中束晕这一性质,可以得到迴旋加速器中束晕的形成既非由共振引起也非由混沌或不稳定性引起.文献[9]的作者把迴旋加速器中束晕形成的原因归结为束流的不匹配,这种匹配应包括束团形状的不匹配和电荷密度分布的不均匀性.

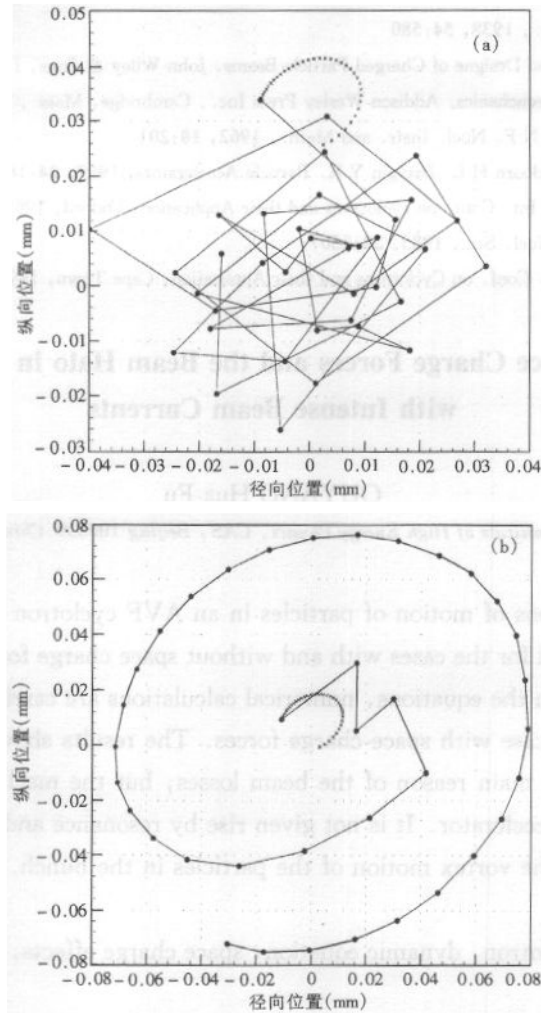


图 2 (a)一束核粒子的运动轨迹;(b)一束晕粒子的运动轨迹
×表示在不考虑空间电荷力时该粒子的运动.

6 结论

数值计算表明,束晕现象同样也出现在强流迴旋加速器中.但其产生的机制不同于直线加速器,它不是由共振和混沌引起,而是由于粒子的排斥运动和束团内粒子的涡流运

动引起的. 数值计算中只对 500 个粒子进行了跟踪, 要得到束团在传输加速过程中更为真实更为全面的图像, 就必须对更多的粒子进行模拟计算. 由于动力学方程中的各参数的值都可以通过对实际加速器的测量得到, 因此可以对实际加速器进行束流动力学的模拟计算. 事实上, 对真实加速器的束流模拟计算也已进行, 并得到较好的结果.

参考文献 (References)

- 1 Prome M. Proc. of the XVIII Int. Linear Accel. Conf, 26—30 August, 1996, Geneva, Switlerland, CERN 96-07, 9
- 2 Thomas L H. Phys. Rev., 1938, 54:580
- 3 Martin Reiser. Theory and Designe of Charged Particle Beams, John Wiley & Sons, INC., 1994
- 4 Goldstein H. Classical Mechcanics, Addison-Wesley Press Inc., Cambridge, Mass., 1950
- 5 Hagedoorn H L, Verster N F. Nucl. Instr. and Meth., 1962, 18:201
- 6 Kleeven W J G M, Hagedoorn H L. Batygin Y K. Particle Accelerators, 1989, 24:187
- 7 Gordon M M. Proc. 5th Int. Conf. on cyclotrons and their Application, Oxford, 1969, 305
- 8 Adam S. IEEE Trans. Nucl. Sci., 1985, 32:2507
- 9 Adam S. Proc. 14th Int. Conf. on Cyclotrons and their Application, Cape Town, 1995, 466

Effects of the Space Charge Forces and the Beam Halo in an AVF Cyclotron with Intense Beam Currents

OUYANG Hua-Fu

(*Institute of High Energy Physics, CAS, Beijing 100039, China*)

Abstract The equations of motion of particles in an AVF cyclotron in a curvilinear coordinate system are derived for the cases with and without space charge forces. Assuming a set of the parameter values in the equations, numerical calculations are carried out by using Lunge-Kutta methods in the case with space-charge forces. The results show that the formation of the beam halo is also a main reason of the beam losses, but the mechanism here is different from that in a linear accelerator. It is not given rise by resonance and chaos but the outward repellent motion and the vortex motion of the particles in the bunch.

Key words AVF cyclotron, dynamic equation, space charge effects, beam halo, vortex motion