

耦合集团展开方法的改进

惠萍¹⁾

(广东教育学院物理系 广州 510303)

摘要 改进了耦合集团展开方法, 计算出的 2+1 维 $SU(2)$ 格点规范场的真空波函数的 μ_0 和 μ_2 比用改进前的方法所得到的结果好, 在弱耦合区表现出良好的标度行为.

关键词 格点规范场 真空波函数 解析方法

1 引言

近二十年来, 微扰量子色动力学(QCD)描述高能强相互作用取得很大成功. 但微扰 QCD 只适用于大动量小距离的情况, 当涉及到能谱、禁闭、拓扑结构等非微扰情况时, 微扰法就无能为力了. 因此发展非微扰 QCD 方法是非常重要的. 目前最成功的非微扰方法是格点规范理论(LGT), 人们对 LGT 的许多认识来自数据模拟, 多年来人们在高精度的数值计算方面已取得不少令人振奋的成果. 但数值计算也存在其局限性, 它没有清晰的物理图象, 波函数的计算结果也不理想, 而且很难深入到更深的弱耦合区. 然而, 只有在弱耦合区(标度区)才能给出准确的物理结果. 为了将 LGT 计算的结果与物理实际进行比较, 发展更多的解析方法将 LGT 的计算推向弱耦合区是十分必要的. 人们提出了很多解析方法, 如: 强耦合展开、弱耦合展开、变分法等, 但都不能令人满意地将强耦合区的结果推到标度区.

文献[1,2]在耦合集团展开方法的基础上发展了一种新的解析方法(保持正确连续极限的截断本征值方程的方法)来研究 LGT 的长波长行为. 这种方法既不同于 Greensite^[3]的截断方式, 也不同于 Smith 和 Watson^[4]的强耦合展开方法. 我们用这种方法已计算出了 2+1 维 $SU(2)$ LGT 的二阶至五阶真空波函数、胶球波函数和胶球质量^[1,2,5-8]. 其中, 三阶真空波函数的 μ_0 和 μ_2 、三阶和四阶 μ_0^F 和 μ_2^F 及胶球质量都表现出较好的标度行为, 但四阶真空波函数不如三阶的结果好, 而二阶和五阶真空波函数及五阶胶球质量更不能令人满意. 以上结果说明用这种方法计算 2+1 维 $SU(2)$ LGT 所得到的结果的标度行为是不稳定的. 而更高阶的近似计算十分困难, 因为计算过程中涉及到的 Wilson 圈图多而复杂, 计算工作量大得惊人. 为了克服这些困难, 我们改进了这种计算方法, 以便推广到更高阶的计算. 考虑到格点规范理论中的质量谱的计算方法与量子力学中的多体系统的能

1999-03-15 收稿, 1999-07-05 收修改稿

1) E-mail: Huiping 519@163.net

谱的变分法十分相似,我们引入无规相近似方法解薛定谔本征值方程来确定真空波函数的 μ_0 和 μ_2 . 本文用改进的方法计算出的四阶和五阶真空波函数的 μ_0 和 μ_2 在弱耦合区都表现出良好的标度行为. 比用改进前的方法所得到的结果好.

2 波函数和本征值方程

设真空波函数的表达式是

$$|\Omega\rangle = e^{R(U)} |0\rangle, \quad (2.1)$$

其中 $R(U)$ 是由规范不变算符 Wilson 圈图 U_l 组成. $R(U)$ 按照图的阶数展开为

$$R(U) = \sum_n R_n, \quad (2.2)$$

R_n 为所有的第 n 阶图. 计算 $R(U)$ 中的每一个图的波长极限可以得到

$$R(U) = -\frac{\mu_0}{e^2} \int \text{Tr} F^2 d^2x - \frac{\mu_2}{e^6} \int \text{Tr} (DF)^2 d^2x, \quad (2.3)$$

其中 μ_0 和 μ_2 由 $R(U)$ 的展开系数来决定. 2+1 维 $SU(2)$ LGT 的哈密顿量 H 是

$$H = \frac{g^2}{2a} \left[\sum_l E_l^a E_l^a - \frac{4}{g^4} \sum_P \text{Tr} U_P \right], \quad (2.4)$$

其中 $E_l |0\rangle = 0$, a 是格距, g 为无量纲的耦合常数, 它与不变荷 e 的关系为 $g^2 = e^2 a$. 在 $g^2 \rightarrow 0$ 的弱耦合区, $a \rightarrow 0$. H 的本征值方程是

$$H|\Omega\rangle = \epsilon_0 |\Omega\rangle. \quad (2.5)$$

将(2.1)和(2.4)式代入(2.5)式得到

$$\sum_l \{ [E_l^a, [E_l^a, R]] + [E_l^a, R][E_l^a, R] \} - \frac{4}{g^4} \sum_P \text{Tr} U_P = w_0, \quad (2.6)$$

其中 w_0 与真空能量的 ϵ_0 的关系为

$$\epsilon_0 = w_0 g^2 / 2a,$$

将(2.2)式代入(2.6)式并采用文献[1]的方法把方程(2.6)在5阶截断($N=5$)得到

$$\sum_l \{ [E_l^a, [E_l^a, \sum_{n=1}^5 R_n]] + \sum_{n+n' \leq 5} [E_l^a, R_n][E_l^a, R_{n'}] \} - \frac{4}{g^4} \sum_P \text{Tr} U_P = w_0. \quad (2.7)$$

3 计算方法

考虑到格点规范理论中的质量谱的计算方法与量子力学中的多体系统的能谱的变分法十分相似,我们引入无规相近似方法解薛定谔本征值方程来确定真空波函数的 μ_0 和 μ_2 . 因为真空能量主要是由空心图贡献的,所以选择空心图的线性组合作为试探真空波函数. 这并不意味着在计算过程中会将非空心图丢掉,而是采用么模条件 $\text{Tr} U \text{Tr} V = \text{Tr} U + \text{Tr} UV^*$ (其中 U 和 V 是任意一群元)将其转换成空心图和多图组态. 由(2.7)式得到一系列的方程组中将包含由多图组态,使方程组无法求解. 考虑到大图占据大的空间,大图对络函数贡献较大. 为了保持方程组的封闭性,采用无规相近似的方法,对计算过

程中出现的双图组态或多图组态中较小的图(算符)取平均值. 例如:

$$\begin{array}{c} \text{L-shaped} \\ \square \end{array} \approx \begin{array}{c} \text{L-shaped} \\ \langle \square \rangle \end{array}, \quad \begin{array}{c} \text{L-shaped} \\ \square \end{array} \approx \langle \square \rangle \begin{array}{c} \text{L-shaped} \\ \square \end{array}, \quad (3.1)$$

$$[E, \square][E, \square] \approx -\square - 2 \begin{array}{c} \text{L-shaped} \\ \square \end{array} - \begin{array}{c} \text{L-shaped} \\ \square \end{array} - \square + 4 \langle \square \rangle \square - 3 \square, \quad (3.2)$$

这种近似处理方法与固体物理中单粒子格林函数的计算方法类似,它是将运动方程中的多粒子格林函数中的一部分粒子对算符取平均值,而保留相应的单粒子格林函数.使得方程组保持封闭.而且用这种近似方法得到的横向磁化率与实验一致.

在五阶计算中,小图的平均值共有两个: $\langle \square \rangle$ 和 $\langle \square \rangle$.它们分别用符号 x_3 和 x_4 表示.由Feynman定理可得到它们所满足的方程.

计算方程(2.7)可得到五阶的空心图如图1所示.

$$\begin{aligned} R_1 &= x_1 \square \\ R_2 &= x_2 \square \\ R_3 &= x_5 \begin{array}{c} \text{L-shaped} \\ \square \end{array} + x_6 \square \\ R_4 &= x_9 \begin{array}{c} \text{L-shaped} \\ \square \end{array} + x_{10} \square + x_{11} \begin{array}{c} \text{L-shaped} \\ \square \end{array} + x_{12} \begin{array}{c} \text{L-shaped} \\ \square \end{array} + x_{13} \square + x_{14} \begin{array}{c} \text{L-shaped} \\ \square \end{array} \\ R_5 &= d_1 \begin{array}{c} \text{L-shaped} \\ \square \end{array} + d_2 \begin{array}{c} \text{L-shaped} \\ \square \end{array} + d_3 \begin{array}{c} \text{L-shaped} \\ \square \end{array} + \dots + d_{14} \begin{array}{c} \text{L-shaped} \\ \square \end{array} \end{aligned}$$

图1 $R(U)$ 的一至五阶空心图

图1中的高阶图 R_{i+} 是由方程(2.7)中的 $[E_i, R_j][E_i, R_j]$ 项所产生的.一阶到五阶空心图共24个. $R(U)$ 的所有图的系数分别为 $x_1, x_2, x_5, x_6, x_9, \dots, x_{14}, d_1, d_2, \dots, d_{14}$.将 $R(U)$ 所有的图代入(2.7)式经推演可以得到24个独立方程:

$$\begin{aligned} 3x_1 - 4/g^4 - 6x_1x_2 + 2x_1^2x_3 - 5x_2(x_5 + x_6) - 5x_2^2x_3/2 - x_2x_6x_3^2 \\ - 8x_1x_{14} - x_1x_6x_3 = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} 9x_2/2 + 4x_2^2x_4 - x_1\{2x_1 - 6x_2x_3 + 6(x_5 + x_6)\} - 5x_3x_2(x_5 + x_6) - \\ x_1x_3[x_9 + 2x_{11}] + x_1x_6x_4 = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} 6x_5 + x_1[-4x_2 + 8x_3x_5] + 3x_2x_5 + x_4[11x_2x_5 + x_1x_9] - \\ x_1[3x_9 + 6x_{11} + 6x_{12} + 8x_{13} + 4x_{14}] = 0, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} 6x_6 - 2x_1x_2 + 7x_1x_6x_3 - x_1[3x_9 + 6x_{10} + 3x_{11}] + 11x_2x_6x_4 + \\ x_2^2x_3/2 + 2x_1x_{10}x_4 = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$15x_9/2 - 2x_2^2 + x_3x_2x_5 - 2x_1 - 2x_1[x_5 + 2x_6] - 9x_9x_3 = 0, \quad (3.7)$$

$$15x_{10}/2 - x_2^2/2 + x_3x_2x_6 - x_1[2x_6 - 8x_{10}x_3] = 0, \quad (3.8)$$

$$15x_{11}/2 - x_1[2(x_5 + x_6) - 10x_{11}x_3] = 0, \quad (3.9)$$

$$15x_{12}/2 - 2x_1x_5 - x_2^2 + 10x_1x_{12}x_3 = 0, \quad (3.10)$$

$$6x_{13} - 2x_1x_5 - x_2^2 - x_2x_5x_3 + 8x_1x_{13}x_3 = 0, \quad (3.11)$$

$$6x_{14} - 2x_1x_5 + 2x_2^2 + 2x_2x_6x_3 - x_2x_6x_3 - 2x_2x_5x_3 + 8x_1x_{14}x_3 = 0, \quad (3.12)$$

$$d_1 = [x_2(x_5 + 2x_6) + x_1(x_9 + 4x_{10})]/9, \quad (3.13)$$

$$d_2 = (2x_2x_6 + x_1x_9)/9, \quad (3.14)$$

$$d_3 = [x_2x_5 + x_1(x_9 + 4x_{10} + 2x_{11})]/9, \quad (3.15)$$

$$d_4 = [2x_2(x_5/2 + x_6) + x_1(x_9 + 2x_{12})]/9, \quad (3.16)$$

$$d_5 = 2[4x_2(x_5 + x_6) + 2x_1(x_9 + 2x_{11} + 2x_{12} + 4x_{13})]/15, \quad (3.17)$$

$$d_6 = (x_2x_5 + x_1x_9)/9, \quad (3.18)$$

$$d_7 = (x_2x_5 + x_1x_9)/9, \quad (3.19)$$

$$d_8 = [x_2x_5 + x_1(x_9 + 2x_{11} + 2x_{12})]/9, \quad (3.20)$$

$$d_9 = [x_2x_6 + x_1(x_9 + x_{11})]/9, \quad (3.21)$$

$$d_{10} = [x_2x_5 + 2x_1x_{12}]/9, \quad (3.22)$$

$$d_{11} = [x_2x_6 + 2x_1x_{10}]/9, \quad (3.23)$$

$$d_{12} = x_2x_{11}/9, \quad (3.24)$$

$$d_{13} = 2\{2x_2[-2x_6 - x_5] + 2x_1[x_9 + 2x_{12} + 2x_{14}]\}/15, \quad (3.25)$$

$$d_{14} = [x_2[x_6 - x_5] + 2x_1x_{11}]/9. \quad (3.26)$$

真空能量为 $w_0 = -4x_1^2 - 3x_2^2.$ (3.27)

为了避免群积分,采用文献[4]的方法计算平均值 x_3 和 x_4 .将哈密顿量改为

$$H' = H + x'_1 \square + x'_2 \square,$$

这时设真空能量为 w'_0 ,由 H' 的本征值方程得到

$$w'_0 = w_0 = -4x_1^2 - 3x_2^2 \quad (3.28)$$

及另外关于 x'_1 和 x'_2 的两条方程:

$$3x_1 - 4/g^4 - 6x_1x_2 + 2x_1^2x_3 - 5x_2(x_5 + x_6) - 5x_2^2x_3/2 - x_2x_6x_3^2 - 8x_1x_{14} - x_1x_6x_3 + x'_1 = 0, \quad (3.29)$$

$$9x_2/2 + 4x_2^2x_4 - x_1\{2x_1 - 6x_2x_3 + 6(x_5 + x_6)\} - 5x_3x_2(x_5 + x_6) - x_1x_3[x_9 + 2x_{11}] + x_1x_6x_4 + x'_2 = 0. \quad (3.30)$$

由 Feynman 定理可得到 x_3 和 x_4 所满足的微分方程:

$$x_3 = \left. \frac{\partial w'_0}{\partial x'_1} \right|_{x'_2=0} = - \left[8x_1 + 6x_2 \frac{\partial x_2}{\partial x_1} \right] \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} \Big|_{x'_2=0} \quad (3.31)$$

$$x_4 = \left. \frac{\partial w'_0}{\partial x'_2} \right|_{x'_1=0} = - \left[8x_1 \frac{\partial x_1}{\partial x_2} + 6x_2 \right] \frac{\partial x_2}{\partial x'_2} \Big|_{x'_1=0}, \quad (3.32)$$

将公式(3.29)和(3.30)代入(3.31)和(3.32)式,可得到 x_3 和 x_4 所满足的两个方程.解(3.31)–(3.32)式封闭的方程组得到 $R(U)$ 的 24 个系数、 x_3, x_4 和真空波函数的 μ_0 和 μ_2 .

4 计算结果

如图 2 和图 3 所示,用改进的方法所得到的 μ_0 和 μ_2 随着 $\beta = 1/g^2$ 的变化曲线表现出良好的标度行为,在弱耦合区趋于平稳,四阶和五阶结果远比用改进前的方法所得到的结果^[2,7]好.以上结果表明这种改进的方法是有效的.我们这种方法与以前方法的不同之处是(1)采用无规相近似的方法引入小图算符的平均值.(2)由 Feynman 定理导出小图算

符的平均值所满足的方程,进而得到封闭的可解的方程组.这种方法的优点是它可以用于高阶计算,更重要的是它可以推广到2+1维 $SU(3)$ LGT 及3+1维 $SU(3)$ LGT 的实际物理的计算,以便对LGT进行更深入的研究.

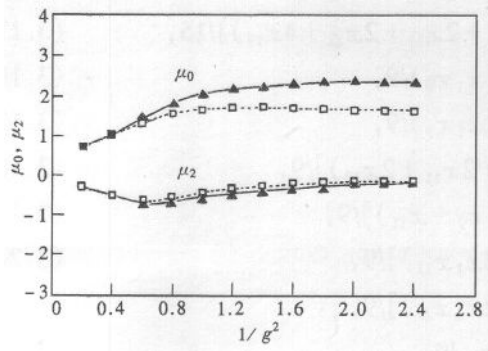


图2 改进方法后所得真空波函数

μ_0 和 μ_2 随着 $1/g^2$ 的变化曲线

.....□.....四阶,

——▲——五阶.

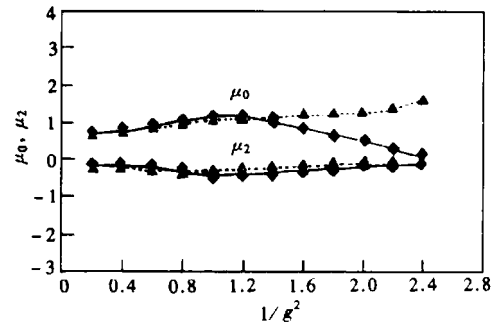


图3 改进方法前所得真空波函数

μ_0 和 μ_2 随着 $1/g^2$ 的变化曲线

.....▲.....四阶,

——◆——五阶.

作者感谢中山大学陈启洲教授的有益讨论

参考文献(References)

- 1 GUO S H, CHEN Q Z, LI L. Phys. Rev., 1994, **D49** (1): 507—510
- 2 CHEN Q Z, GUO S H, ZHENG W H et al. Phys. Rev., 1994, **D50**(5): 3564—3565
- 3 Greensite J P. Nucl. Phys., 1980, **B166**: 113—124
- 4 Llewellyn Smith, Watson N J. Phys. Lett., 1993, **B302**: 463—471
- 5 CHEN QiZhou, CAI PengFei, FANG XiYan et al. Commun. Theor. Phys., 1995, **27**: 337—342
- 6 HUI Ping, CHEN QiZhou. High Energy Physics and Nuclear Physics(in Chinese), 1995, **19**(9): 820—825
(惠萍, 陈启洲, 高能物理与核物理, 1995, **19**(9): 820—825)
- 7 HUI Ping. High Energy Physics and Nuclear Physics(in Chinese), 1998, **22**(4): 322—325
(惠萍. 高能物理与核物理, 1998, **22**(4): 322—325)
- 8 HUI Ping, CAI PengFei, CHEN QiZhou. High Energy Phys. and Nucl. Phys. (in Chinese), 1996, **20**(1): 55—60.
(惠萍, 蔡鹏飞, 陈启洲, 高能物理与核物理, 1996, **20**(1): 55—60)

Improvement of the Coupled Cluster Method

HUI Ping¹⁾

(Department of Physics, Guangdong Education College, Guangzhou 510303, China)

Abstract The coupling cluster method is improved to calculate μ_0, μ_2 of vacuum wave function in 2+1-D $SU(2)$ lattice gauge theory. The calculated results of μ_0, μ_2 show better scaling behaviors than the results obtained by original method at weak coupling region.

Key words lattice gauge theory, vacuum wave function, analytic method

Received 15 March 1999, Revised 5 July 1999

1) E-mail: Huiping 519@163.net