包含胶子自耦合的QGP本征激发的非线性频移*

陈继胜 李家荣[1)]
(华中师范大学粒子物理研究所 武汉 430079)

摘要 用在电磁等离子体中广泛证明有效的导数展开法求解夸克胶子等离子体动力论方程,发现场方程的自作用项对夸克胶子等离子体的非Abelian激发的非线性频移具有非常重要的影响. 求解到第三阶,得到了包含胶子自耦合作用的非线性频移的解析表达式,并给出了 $k=0$ 模式的纯胶子气的非线性频移的数值解.

关键词 夸克胶子等离子体 导数展开法 非线性本征频移

在高能重离子碰撞过程中产生的夸克胶子等离子体(QGP),由于存在时间尺度极短(fm/c),非平衡效应一定会起非常重要的作用,而动力论为此提供了一个良好的架构体系. U. Heinz 等人建立了QGP的动力论方程[1]. 基于此动力论方程组,人们讨论了QGP中的非Abelian本征激发及其有关特性,得到了一些非常重要的结果,如从动力论可导出硬热圈的生成泛函[2],给出了非线性朗道阻尼[3,4].

从电磁等离子体理论可以知道,关于等离子体的许多重要物理量都和非线性频移密切相关. 文献[5]首次计算了QGP中的非Abelian激发的非线性频移,但应指出的是,为了计算的简单,文献[5]忽略了场方程中的自作用项,尽管在其运算中保持了 $SU(N_c)$ 代数. 非线性自作用反映了QGP区别于电磁等离子体的本质特征,场方程中的自作用项会对QGP的非线性频移产生非常重要的作用.

导数展开法在电磁等离体中被证明是求解非线性动力论方程有效的方法. 本文用导数展开法迭代求解QGP动力论方程. 在展开过程中,不仅对场量及分布函数作展开,而且要对时间导数作展开,即在动量空间看,就是要对频率 ω 等也要作相应的展开. 在线性近似下,可以得到类Aelian的色散关系,此色散关系表明在线性阶,本征波总是类时的,不可能存在阻尼和频移. 但到非线性阶,本征波的非线性作用产生的次级色波可以是类空的,因而存在QGP本征激发的非线性频移. 本文给出了QGP中包含自作用项的非线

1999-11-15 收稿
* 国家自然科学基金资助
1) E-mail: ljr@iopp.ccnu.edu.cn

性本征频移的一般表达式,发现自作用项对QGP中的本征激发的非线性频移起着十分重要的作用,并计算了纯胶子气的 $\boldsymbol{k}=0$ 模式的非线性频移的数值解.

1 QGP动力论方程和导数展开法

选择自然单位 $c=\hbar=k_B=1$,度规矩阵取为 $\mathrm{diag}(g_{\mu\nu})=\mathrm{diag}(g^{\mu\nu})=(1,-1,-1,-1)$.如果忽略自旋,夸克分布函数 $f_{\mathrm{q}}(x,p)$、反夸克分布函数 $f_{\bar{\mathrm{q}}}(x,p)$ 和胶子分布函数 $G(x,p)$ 分别满足的方程是[1,3]

$$p^{\mu}D_{\mu}f_{\mathrm{q}}(x,p)+\frac{g}{2}\frac{\partial}{\partial p_{\nu}}\{F_{\mu\nu}(x),f_{\mathrm{q}}(x,p)\}=0,$$

$$p^{\mu}D_{\mu}f_{\bar{\mathrm{q}}}(x,p)-\frac{g}{2}\frac{\partial}{\partial p_{\nu}}\{F_{\mu\nu}(x),f_{\bar{\mathrm{q}}}(x,p)\}=0,$$

$$p^{\mu}\mathscr{D}_{\mu}G(x,p)+\frac{g}{2}\frac{\partial}{\partial p_{\nu}}\{\mathscr{F}_{\mu\nu}(x),G(x,p)\}=0,$$

D_{μ} 和 $\mathscr{D}_{\mu}$ 是协变导数,定义为

$$D_{\mu}=\partial_{\mu}-\mathrm{i}g[A_{\mu},\cdots],\quad \mathscr{D}_{\mu}=\partial_{\mu}-\mathrm{i}g[\mathscr{A}_{\mu},\cdots],\tag{2}$$

A_{μ} 和 $\mathscr{A}_{\mu}$ 是色场四度势,$A_{\mu}(x)=A_{\mu}^{a}(x)I^{a}$,$\mathscr{A}_{ab}^{\mu}(x)=-\mathrm{i}f_{abc}A_{c}^{\mu}(x)\equiv F_{c}^{ab}A_{c}^{\mu}(x)$,其中 f_{abc} 是 $SU(N_{\mathrm{c}})$ 群的反对称结构常数,$[I^{a},I^{b}]=\mathrm{i}f^{abc}I^{c}$.而 $F_{\mu\nu}$,$\mathscr{F}_{\mu\nu}$ 分别代表 $SU(N_{\mathrm{c}})$ 基础表示和伴随表示中的平均场张量,即 $F_{\mu\nu}=F_{\mu\nu}^{a}I^{a}$,$\mathscr{F}_{\mu\nu}=\mathscr{F}_{\mu\nu}^{a}F^{a}$;$I^{a}$ 和 F^{a} 是相应的群生成元.其中:$F_{\mu\nu}^{a}=\partial_{\mu}A_{\nu}^{a}(x)-\partial_{\nu}A_{\mu}^{a}(x)+gf_{abc}A_{\mu}^{b}A_{\nu}^{c}(x)$.

和输运方程相耦合的平均场场方程是[1,3]

$$D_{\mu}F^{\mu\nu}(x)=j^{\nu}(x),$$

其中 $j^{\nu}(x)$ 是色流

$$j^{\nu}(x)=-\frac{g}{2}\int\frac{\mathrm{d}p^{3}}{(2\pi)^{3}p^{0}}[(f_{\mathrm{q}}(x,p)-f_{\bar{\mathrm{q}}}(x,p))+2\mathrm{i}I_{a}f_{abc}f_{gbc}(x,p)].\tag{4}$$

为了方便求解色场的本征激发的非线性频移,可在动量空间迭代求解动力论方程及与其相耦合的自洽平均场方程.如对 $A^{i}(x)$,其傅里叶变换方式定义如下:

$$A^{i}(x)=\int\frac{\mathrm{d}^{4}k}{(2\pi)^{4}}A^{i}(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x}\tag{5}$$

$f_{\mathrm{q}}(x,p)$,$f_{\mathrm{q}}(x,p)$,$G(x,p)$ 也可作同样的变换.如果选取瞬时规范:$A_{a}^{0}=0$,即色电场和色势之间存在着这样的简单关系:$E_{a}^{i}=-\dfrac{\partial A_{a}^{i}}{\partial t}$.

在数学物理方法中,曾经给出了求解非线性方程的导数展开法.其核心是不仅对方程的函数而且要对方程中的导数都作迭代展开.在动量空间看,就是要对函数及四度波矢 k 按小量展开,即

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{N}\alpha^{j}k^{(j)},\quad A^{i}=\sum_{j=0}^{N}\alpha^{j}A_{i}^{(j)}(k^{(0)},k^{(1)},k^{(2)},\cdots,k^{(N)}),\\&=\sum_{j=0}^{N}\alpha^{j}f^{(j)}(k^{(0)},k^{(1)},k^{(2)},\cdots,k^{(N)}).\end{aligned}\tag{6}$$

其中 α 是代表展开小量的无量纲参数.

任意级的色流为

$$j^{h(n)} = -\frac{g}{2}\int\frac{\mathrm{d}p^3}{(2\pi)^3 p^0}\left[\left(f_{\mathrm{q}}^{(n)} - f_{\bar{\mathrm{q}}}^{(n)}\right) + 2\mathrm{i}I_a f_{abc} f_{gbc}^{(n)}\right],\quad n = 1,2,3,\cdots. \tag{7}$$

从动力论方程,可以看出平均场作为外场加入等离子体系统时,等离子体的分布函数发生涨落;反过来,涨落的分布函数又会影响平均场. 等离子体的平均场和分布函数之间的这种自洽关系通过展开式(6)得到了很好的反映. 把展开式代入方程在动量空间的傅里叶变换式,并令方程两边同幂次 α 的系数相等,就会得到动力论和平均场方程的各级展开式. 其带头项描述线性近似,而如果考虑到非线性阶,则在线性近似下得到的色散关系将会被本征波之间的非线性相互作用加以修正,即本征频率 $\omega^{(0)}$ 会得到相应的修正, $\omega^{(1)},\omega^{(2)},\cdots$. 修正项的实部对应于本征频移,而其虚部对应于朗道阻尼.

为计算方便,假设 QGP 只存在纵场激发,即色势和波矢方向平行 $A^i(k) = k^i A(k)/K$. 其中 $K = |\boldsymbol{k}|$.

2　线性近似和二阶近似

虽然线性近似的结果在很多文献中已给出,但是为了讨论的连贯性,让我们简要讨论一级近似的情形. 由一阶动力论方程可得在动量空间一阶分布函数,如夸克分布函数为

$$f_{\mathrm{q}}^{(1)}(k,p) = -g\frac{\omega^{(0)} p^0 k^i}{p\cdot k^{(0)} + \mathrm{i}p^0\varepsilon^+}\frac{\mathrm{d}f_q^{(0)}(p)}{\mathrm{d}p^i}\frac{A^{(1)}(k)}{K}. \tag{8}$$

上式中分布函数 $f_{\mathrm{q},\bar{\mathrm{q}}}^{(0)}(p^0)$, $G^{(0)}(p^0)$ 可分别取为 Fermi－Dirac 和 Bose－Einstein 平衡分布函数

$$f_{\mathrm{q},\bar{\mathrm{q}}}^{(0)}(p^0) = \frac{2N_{\mathrm{f}}}{\mathrm{e}^{\beta p\cdot u}+1};\qquad G^{(0)}(p^0) = \frac{2}{\mathrm{e}^{\beta p\cdot u}-1}, \tag{9}$$

其中 $u = (1,0,0,0)$ 是等离子体的局域流体四速度,而 N_{f} 夸克的味数. 把得到的一阶分布函数代入一阶流的表达式,我们可以得到线性流. 然后把一阶流代入一阶场方程,我们可以得到

$$-\omega^{(0)^2}\varepsilon(\omega,\boldsymbol{k})A^{(1)}(k) = 0, \tag{10}$$

其中 $\varepsilon(\omega,\boldsymbol{k})$ 是线性色介电容率

$$\varepsilon(\omega,\boldsymbol{k}) = 1 + \frac{3\omega_p^2}{K^2}\left[1 - \frac{\omega}{2K}\left(\ln\left|\frac{K+\omega}{K-\omega}\right| - \mathrm{i}\pi\theta(K-\omega)\right)\right]. \tag{11}$$

从方程(10)可以看出,要得到非零解,必须有下列色散关系成立:

$$\varepsilon(\omega,\boldsymbol{k}) = 0. \tag{12}$$

此色散关系完全是类 Abelian 的,并表明 QGP 中的色本征波总是类时的,即: $\omega^2 > K^2$.

同讨论一阶方程的求解方法类似,由二阶动力论方程,可以得到二阶分布函数,并进而得到二阶流. 把二阶流的表达式代入二阶场方程

$$-\omega^{(0)^2}A^{(2)}(k)\frac{k^h}{K} - 2\omega^{(1)}\omega^{(0)}A^{(1)}\frac{k^h}{K} +$$

$$g\sum_{k=k_1+k_2}\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_1}{K}\frac{k_2^h}{K_2}[A^{(1)}(k_2),A^{(1)}(k_2)]=-j^{(2)h}(k),\tag{13}$$

其中 $\sum_{k=k_1+k_2}=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\delta(k-k_1-k_2)\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2$. 可得到下列关系式:

$$-\varepsilon(\omega,\boldsymbol{k})\omega^{(0)^2}A^{(2)}(k)\sim\omega^{(1)}A^{(1)}(k).\tag{14}$$

从电磁等离子体的知识可以得知:满足线性色散关系的纵本征波的三波过程是完全被禁介的,即二阶效应为零. 则有:$\omega^{(1)}=0$ 及 $A^{(2)}=0$.

由此可得二阶分布函数,如

$$f_{\mathrm{q}}^{(2)}(k,p)=\frac{1}{p\cdot k^{(0)}+\mathrm{i}p^0 0^+}\Big(gp_i\sum_{k=k_1+k_2}[A_i^{(1)}(k_1),f_{\mathrm{q}}^{(1)}(k_2,p)]-\frac{g}{2}\sum_{k=k_1+k_2}p^0\omega_1^{(0)}\Big\{A_j^{(1)}(k_1),\frac{\mathrm{d}f_{\mathrm{q}}^{(1)}(k_2,p)}{\mathrm{d}p_j}\Big\}\Big).$$

3 三阶近似和非 Abelian 本征频移

由于一阶、二阶过程的本征频率修正贡献为零,要进一步讨论三阶的非线性相互作用过程对本征频率修正的贡献. 夸克分布函数所满足的三阶动力论方程为

$$(p\cdot k^{(0)})f_{\mathrm{q}}^{(3)}(k,p)+p^0\omega^{(2)}f_{\mathrm{q}}^{(1)}(k,p)-\frac{g^2}{2}\sum_{k_1+k_2+k_3=k}p_i\{[A_i^{(1)}(k_1),A_j^{(1)}(k_2)],\partial_p^j f_{\mathrm{q}}^{(1)}(k_3,p)\}+\frac{g}{2}\sum_{k_1+k_2=k}p_i\{A_i^{(3)}(k_1),k_{1\nu}^{(0)}\partial_p^\nu f_{\mathrm{f}}^{(0)}(k_2,p)\}+\frac{g}{2}\sum_{k_1+k_2=k}p_i\{A_i^{(1)}(k_1),\omega_1^{(2)}\partial_p^0 f_{\mathrm{f}}^{(0)}(k_2,p)\}+\frac{g}{2}\sum_{k_1+k_2=k}p_i\{A_i^{(1)}(k_1),k_{1\nu}^{(0)}\partial_p^\nu f_{\mathrm{q}}^{(2)}(k_2,p)\}-gp_i\sum_{k_1+k_2=k}[A_i^{(1)}(k_1),f_{\mathrm{q}}^{(2)}(k_2,p)]=0\tag{16}$$

其中$\sum_{k=k_1+k_2+k_3}=\frac{1}{(2\pi)^8}\int\delta(k-k_1-k_2-k_3)\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3$. 同样,也可以写出反夸克、胶子分布函数所满足的类似动力论方程.

三阶场方程在动量空间的表达式

$$-\omega^{(0)^2}A^{(3)}(k)+g^2\sum_{k=k_1+k_2}\sum_{k_2=k_3+k_4}\frac{\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_3}{K_1K_3}\frac{\boldsymbol{k}_4\cdot\boldsymbol{k}}{K_4K}[A_{(k_1)}^{(1)},[A^{(1)}(k_3),A^{(1)}(k_4)]]-2\omega^{(2)}\omega^{(0)}A^{(1)}(k)-2\omega^{(1)}\omega^{(0)}A^{(2)}(k)=\frac{\boldsymbol{j}^{(3)}(k)\cdot\boldsymbol{k}}{K}.$$

把一阶分布函数(8)式及二阶分布函数(15)式代入三阶分布函数所满足的方程(16)式可得三阶分布函数,进而由三阶流公式可得三阶流

$$j^{(3)al}=g\int\frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3p^0}\frac{p^l}{p\cdot k^{(0)}+\mathrm{i}p^0 0^+}\times\Big[\mathrm{tr}I^a\Big(gp_i\sum_{k=k_1+k_2}[A_i^{(1)}(k_1),f_{\mathrm{q}}^{(2)}(k,p)-f_{\mathrm{q}}^{(2)}(k,p)]-$$

$$\frac{g}{2}\sum_{k=k_1+k_2} p^0\omega_1^{(0)}\left\{A_i^{(1)}(k_1),\frac{\mathrm{d}(f_q^{(2)}(k_2,p)+\bar{f}_q^{(2)}(k_2,p))}{\mathrm{d}p_i}\right\}+2gp_iA_i^{(3)}(k)\omega^{(0)}\partial_p^0 f_q^{(0)}(p)+$$

$$\left.\frac{g^2}{2}\sum_{k=k_1+k_2}\sum_{k_1=k_3+k_4} p_i\{[A^{(1)},A_j^{(1)}(k_4),\partial_p^j(f_q^{(1)}(k,p)+\bar{f}_q^{(1)}(k,p))]\}\right)+$$

$$\mathrm{Tr}F^a\Big(gp_i\sum_{k=k_1+k_2}[\mathscr{A}_i^{(1)}(k_1),G^{(2)}(k,p)]-$$

$$\frac{g}{2}\sum_{k=k_1+k_2} p^0\omega_1^{(0)}\left\{\mathscr{A}_i^{(1)}(k_1),\frac{\mathrm{d}G^{(2)}(k_2,p)}{\mathrm{d}p_i}\right\}+2gp_i\mathscr{A}_i^{(3)}(k)\omega^{(0)}\partial_p^0 G^{(0)}(p)+$$

$$\left.\frac{g^2}{2}\sum_{k=k_1+k_2}\sum_{k_1=k_3+k_4} p_i\{[\mathscr{A}^{(1)},\mathscr{A}_j^{(1)}(k_4),\partial_p^j G^{(1)}(k,p)]\}\Big)\right]. \tag{18}$$

而根据文献[6,7]，当动量是 T 的量级时，把它称为硬的，而当其为 gT 的量级时，把之称为软的. 考虑这样的情形，QGP 中的软激发的动量为 gT 的量级，而 QGP 中的组分粒子的动量为硬的；方程中出现的时空导数可贡献 gT 的因子. 利用

$$\mathrm{tr}I^a[I^b,\{I^c,I^d\}]=0;\qquad \mathrm{tr}I^a\{I^b,[I^c,I^d]\}=0;$$
$$\mathrm{Tr}F^a[F^b,\{F^c,F^d\}]=0;\qquad \mathrm{Tr}F^a\{F^b,[F^c,F^d]\}=0. \tag{19}$$

三阶流(18)式中第四项及第八项的贡献为零，而第二项及第六项的贡献要比第一项及第五项的幂次高. 因此在 g 的领头阶，三阶流退化为

$$j^{(3)al}=g^4\int\frac{\mathrm{d}_3p}{(2\pi)^3p^0}\frac{p^lp^ip^jp^k}{p\cdot k+\mathrm{i}p^00^+}\sum_{k=k_1+k_2+k_3}$$
$$\frac{\mathrm{Tr}I^a[A_i^{(1)}(k_3),[A_j^{(1)}(k_1),A_k^{(1)}(k_2)]]\omega_2\dfrac{\partial\mathscr{F}_{\mathrm{eq}}}{\partial p^0}}{(p\cdot(k_1+k_2)+\mathrm{i}p^00^+)(p\cdot k_2+\mathrm{i}p^00^+)}-\omega^{(0)^2}(\varepsilon(\omega^{(0)},\boldsymbol{k})-1)A^{(1)}(k), \tag{20}$$

上式中

$$\mathscr{F}_{\mathrm{eq}}=\frac{1}{2}(N_f(f_q^{(0)}(p)+\bar{f}_q^{(0)}(p))+2N_cG^{(0)}(p)), \tag{21}$$

其中 $\varepsilon(\omega^{(0)},\boldsymbol{k})$已由(11)式给出.

考虑满足色散关系(12)式的色本征波，此时 g 的领头阶的三阶场方程(17)式退化为下列形式：

$$2\omega^{(2)}\omega^{(0)}A^{(1)}(k)-g^2\sum_{k=k_1+k_2+k_3}\frac{\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{k}_2}{K_1k_2}\frac{\boldsymbol{k}_3\cdot\boldsymbol{k}}{K_3K}[A^{(1)}(k_1),[A^{(1)}(k_2),A^{(1)}(k_3)]]+$$
$$g^4f^{dec}f^{abc}\int\frac{\mathrm{d}_3p}{(2\pi)^3p^0}\frac{p^ip^jp^k}{p\cdot k+\mathrm{i}p^00^+}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}}{K}\sum_{k=k_1+k_2+k_3}$$
$$\frac{1}{p\cdot(k_1+k_2)}\frac{\omega_2^{(0)}\partial_p^0\mathscr{F}_{\mathrm{eq}}}{p\cdot k_2+\mathrm{i}p^00^+}A_i^b(k_3)A_j^d(k_1)A_k^e(k_2)=0. \tag{22}$$

QCD 真空中一般的 Yang-Mills 场方程，由于有自作用项的出现，其一般求解是非常困难的. 对于等离子体，由于激发的色波的相位是随机的. 可以借助于随机相位平均方法，而使问题加以简化. 对等式两边同时乘以 $A^g(k')$，并对随机热相位求平均. 定义色关联强度

$$\langle A^e(k)A^g(k')\rangle = (2\pi)^4\langle A^eA^g\rangle_{\omega,k}\delta(k+k') \equiv \langle eg\rangle_k\delta_{kk'}, \tag{23}$$

并利用奇数场量乘积的关联的平均为零,而偶数个场量乘积的随机热相位平均可以分解两两场关联平均的积,即利用下列等式[8,9]:

$$\langle\langle A^a(k_1)A^b(k_2)A^c(k_3)A^d(k_4)\rangle = (2\pi)^8\delta(k_1+k_2+k_3+k_4)\times\{\delta_{k_1k_2}\times\langle ab\rangle_{k_1}\langle cd\rangle_{k_3}$$
$$\delta_{k_1k_3}\langle ac\rangle_{k_1}\langle bd\rangle_{k_2}+\delta_{k_1k_4}\langle ad\rangle_{k_1}\langle bc\rangle_{k_2}\}, \tag{24}$$

则使方程(22)式成为

$$(2\omega^{(2)}\omega^{(0)}\delta_{ad}+R_{ad}+S_{ad})\cdot\langle dg\rangle = 0,$$

其中

$$S_{ad} = -g^2\int\left[f^{abc}f^{cfd}\langle bf\rangle_{k_1}+\left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_1}{KK_1}\right)^2(f^{abc}f^{cde}\langle be\rangle_{k_1}+f^{adc}f^{cfe}\langle fe\rangle_{k_1})\right]\frac{\mathrm{d}k_1}{(2\pi)^4},$$

$$R_{ad} = -g^4\int\frac{\mathrm{d}^3p\partial_p^0\mathscr{F}_{\mathrm{eq}}}{(2\pi)^3p^0}f^{abc}\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}_1}{K_1}\right)^2\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}}{K}\right)^2\frac{1}{p\cdot k+\mathrm{i}p^0 0^+}\,\frac{1}{p\cdot(k-k_1)+\mathrm{i}p^0 0^+}\times$$
$$\left(\frac{\omega}{p\cdot k+\mathrm{i}p^0 0^+}f^{cfd}\langle bf\rangle_{k_1}+\frac{\omega_1}{p\cdot k_1+\mathrm{i}p^0 0^+}f^{cde}\langle be\rangle_{k_1}\right)\frac{\mathrm{d}k_1}{(2\pi)^4}. \tag{27}$$

特别需要指出的是,这里 S_{ad}来自于场方程(22)式的自作用项,而 R_{ad}代表等离子体中的组分粒子和场的本征激发间相互作用的贡献. R_{ad}和S_{ad}都是色空间的矩阵,且都与色场间的关联,即:$\langle be\rangle\boldsymbol{k}_1$ 等有关,一般的讨论非常复杂. 为了简化计算,我们考虑只在同色之间才存在关联,即有下列等式成立:

$$\langle A^bA^c\rangle_k = -\frac{\pi}{\omega^2}(\delta(\omega-\omega_k)+\delta(\omega+\omega_k))I_k\delta_{bc}. \tag{28}$$

其中 I_k 刻划了等离子体中频率为 ω_k 的涨落的总强度. 更进一步地,我们也只考虑热水平的涨落,即可取:$I_k=4\pi T$. 因此,可以得到 R_{ad}和S_{ad}的对角元分别为

$$S = \frac{g^2N_c}{(2\pi)^4}\int\left(1-\left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}_1}{KK_1}\right)^2\right)\frac{\pi I_{k_1}}{\omega_{k_1}^2}\mathrm{d}\boldsymbol{k}_1;$$

$$R = g^4N_c\int\frac{\mathrm{d}^3p\partial_p^0\mathscr{F}_{\mathrm{eq}}}{(2\pi)^7p^0}\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}_1}{K_1}\right)^2\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}}{K}\right)^2\frac{1}{p\cdot k+\mathrm{i}p^0 0^+}\,\frac{1}{p\cdot(k-k_1)+\mathrm{i}p^0 0^+}\times$$
$$\left[\frac{\omega}{p\cdot k+\mathrm{i}p^0 0^+}+\frac{\omega_{k_1}}{p\cdot k_1+\mathrm{i}p^0 0^+}\right]\frac{\pi I_{k_1}}{\omega_{k_1}^2}\mathrm{d}k_1. \tag{29}$$

由(25)式知

$$\omega^{(2)} = -\frac{S+R}{2\omega^{(0)}}, \tag{30}$$

可得到频率的修正的一般表达式. 表达式中的因子 $\frac{1}{p\cdot k+\mathrm{i}p^0 0^+}$, $\frac{\omega_{k_1}}{p\cdot k_1+\mathrm{i}p^0 0^+}$, $\frac{1}{p\cdot(k-k_1)+\mathrm{i}p^0 0^+}$对本征频率修正的贡献是完全不相同的,前两者只对其实部有贡献,因为QGP中的色本征波总是类时的;而后者除了对实部有贡献之外,还对其虚部有贡献,因为两个类时的色本征波通过非线性作用而产生类空的色次波. 也就是说下列关系对完

成相应的积分是非常重要的，

$$\frac{1}{p\cdot(k-k_1)+\mathrm{i}p^0 0^+}=P\frac{1}{p\cdot(k-k_1)}-\mathrm{i}\frac{\pi}{p^0}\delta(\omega_k-\omega_{k_1}-\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_1)).$$

其中 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{p}/p^0$ 是单位矢量．此外在完成积分的过程中，K 的上限为近似取为 gT，也就是考虑 QGP 中的软激发[6,7]　对于 QGP 中的非常重要的 $\boldsymbol{k}=0$ 模式，我们有

$$S=\frac{32\pi^3 g^2 N_c T}{3(2\pi)^4}\int_0^{gT}\frac{K_1^2}{\omega_{k_1}^2}\mathrm{d}K_1;$$

$$\mathrm{Re}(R)=-\frac{4g^4 N_c \pi^3 T^3(N_f+2N_c)}{9(2\pi)^4\omega_p^3}\left[\int_0^{gT}\frac{K_1^2\mathrm{d}K_1}{\omega_{k_1}^2}\frac{2(\omega_{k_1}-\omega_p)}{K_1^2}\left(1-\frac{\omega_{k_1}-\omega_p}{2(K_1)}\ln\left|\frac{\omega_p-\omega_{k_1}-K_1}{\omega_p-\omega_{k_1}+K_1}\right|\right)-\int_{g^2T}^{gT}\frac{K_1^2\mathrm{d}K_1}{\omega_{k_1}}\frac{2}{K_1^2}\left(1+\frac{\omega_{k_1}^2}{2\omega_p K_1}\ln\left|\frac{\omega_{k_1}-K_1}{\omega_{k_1}+K_1}\right|-\frac{(\omega_{k_1}-\omega_p)^2}{2\omega_p K_1}\ln\left|\frac{\omega_{k_1}-\omega_p+K_1}{\omega_{k_1}-\omega_p-K_1}\right|\right)\right]$$

$$\mathrm{Im}(R)=\frac{4g^4 N_c\pi^4 T^3(N_f+2N_c)}{9(2\pi)^4\omega_p^3}\int_{g^2T}^{gT}\frac{1}{K_1}\mathrm{d}K_1(\omega_{k_1}-\omega_p)^2\left(\frac{1}{\omega_p}+\frac{1}{\omega_{k_1}}\right).$$

作一粗略的数值估计，可以更清楚地看出各自对本征频率修正的贡献．为了更进一步地完成对 $\boldsymbol{k}_1$ 的积分，要利用长波极限下的色散关系．保留到 g 的领头阶的贡献，完成对 $\boldsymbol{k}_1$ 的积分，并只考虑纯胶子气的情形，可以得到下列粗略的数值结果：

$$\omega^{(2)}=\omega_S^{(2)}+\mathrm{Re}(\omega_R^{(2)})+\mathrm{Im}(\omega_R^{(2)})\approx-0.282g^2T-0.552g^2T+0.176g^2T\mathrm{i}=-0.834g^2T+0.176g^2T\mathrm{i}. \tag{33}$$

其实部代表频移，而虚部代表阻尼．可以清楚地看出，场方程的自作用项对频率修正的实部 $\omega_S^{(2)}$ 有明显贡献．顺便需要指出的是，这里的虚部 $\mathrm{Im}(\omega_R^{(2)})$ 表示了 QGP 中组分粒子(部分子)和 Plasmons 之间的相互共振产生的非线性朗道阻尼[3]．

4　结论及讨论

从等式(26)，(27)，(30)可以看出，QGP 中非 Abelian 激发的本征频移除与具体的模式即 ω_k 有关外，还与 $SU(N_c)$结构函数有关及色场关联强度有关，这表明了它的非 Abelian 特征．从特殊的简单情形(33)式，也可明显看出场方程自作用项的本征频率修正贡献虽然小于来自于粒子和次波共振的非线性作用的修正贡献，但其影响是很大的．在讨论 QGP 中的非 Abelian 激发的本征频率频移时，必须计及非 Abelian 自作用的贡献．

值得说明的是，前者对频率修正的虚部(对应于非线性朗道阻尼)没有贡献．其物理原因是，前者仅描述了波(对应于等离子体中的场的本征激发)之间的相互作用，没有涉及到波和粒子之间的共振能量交换，因此，对阻尼没有贡献．

参考文献(References)

1 Heinz U. Phys. Rev. Lett., 1983, **51**:351; 1986, **56**:93; Ann. Phys., 1985, **161**:48; Elze H-Th, Heinz, U. Phys. Rep., 1989, **183**:81; Mrówczyński S. Phys. Rev., 1989, **D39**: 1940
2 Kelly P F, LIU Q, Lucchesi C. Phys. Rev., 1994, **D50**:4209
3 ZHANG XiaoFei, LI JiaRong. Phys. Rev., 1995, **C52**:964; CHEN JiSheng, LI JiaRong. Phys. Lett., 1998, **B430**: 209
4 Markov Y A, Markova, R A. hep-ph/9902397
5 ZHANG XiaoFei, LI JiaRong. J. Phys., 1995, **G21**:1483
6 Braaten E, Pisarski, R D. Nucl. Phys., 1990, **B337**:569; Nucl. Phys., 1990, **B339**:310
7 Blaizot J-P, Iancu E. Nucl. Phys., 1994, **B417**:608; 1994 **B421**:565; 1995, **B434**:662
8 Lifshitz E, Pitaevskii L. Physical Kinetics, Pergamon Press. Oxford, 1981, 214
9 Sitenko, A G. Fluctuations and Nonlinear Wave Interactions in Plasmas, Pergamon. Oxford, 1990, 137

Nonlinear Eigenfrequency Shift of QGP Including the Gluon Self-Coupling*

CHEN JiSheng LI JiaRong[1)]
(*Institute of Particle Physics, Huazhong Normal University, Wuhan* 430079, *China*)

Abstract The derivative expansion method is used to solve the kinetic equations of quark-gluon plasma. In the process of solution, we find that the self-interaction term of the mean field equation plays an important role to the nonlinear eigenfrequency shift of the non-Abelian excitations in quark-gluon plasma. To the third order of derivative expansion, we get the general analytical expression of nonlinear frequency shift including the self-interaction in the leading order of coupling constant and give out the value of eigenfrequency shift for the pure gluon plasma to the important $\boldsymbol{k}=0$ modes.

Key words quark-gluon plasma, derivative expansion method, nonlinear eigenfrequency shift

Received 15 November 1999
* Supported by National Natural Science Foundation of China
1) E-mail: ljr@iopp. ccnu. edu. cn