

窄带阻抗对束团纵向平衡分布的影响*

黄文会 王光伟 林郁正

(清华大学工程物理系 北京 100084)

周 峰

(中国科学院高能物理所 北京 100084)

摘要 从电子运动方程出发,得到了 Haissinski 方程和窄带阻抗感应电压表达式,然后采用分析和数值方法,分共振频率远大于、接近、远小于束团特征频率三种情况,详细分析了窄带阻抗对单束团的静态分布的影响。

关键词 Haissinski 方程 窄带阻抗 静态分布

1 引言

在加速器的文献中尾场按照本身的性质和其动力学影响通常分为两类:高 Q 值的窄带阻抗(长程尾场)与多束团效应相联系,而低 Q 值的宽带阻抗(短程尾场)与单束团效应相关。在环形加速器中,高 Q 值的阻抗主要集中在高频腔,而真空室其它不光滑的部分,形不成高 Q 的谐振结构,是宽带阻抗的主要来源。为了从宏观上来评价一个储存环真空室的光滑程度, $|Z_r / n|_{\omega=0}$ 经常被用到。

原则上讲,阻抗是频率的函数,在频率极高时可以用衍射模型来描述,在频率较低时主要为电阻壁阻抗,但在相当宽的范围内它随频率的变化行为是相当复杂的,取决于具体加速器真空室的结构。考虑高阶模的纵向动力学效果时,应该由两部分组成,即单圈效应和多圈效应,因此等效的宽带阻抗也包含了窄带阻抗的贡献。

电子环形加速器中纵向尾场的动力学的效果之一是势阱扰动效应,这是由于电子感受的全部纵向电压除了原有的高频加速电压,还增加了纵向尾势,因而影响了粒子的纵向平衡分布。这方面人们已经研究得比较清楚了,势阱扰动下粒子的纵向平衡分布由著名的 Haissinski 解^[1]给出,我国的陈龙康教授也曾独立给出类似的解^[2]。

目前研究纵向束团拉伸的文献中分析势阱扰动时仅考虑了等效的宽带阻抗,不考虑高阶模;但在高阶模抑制不太充分的条件下,或环中还存在其它 Q 值比较高的类腔结构时,高阶模的效应是不能忽略的。另一方面,在环形加速器中应用高次谐波腔控制束团也

1998-06-08收稿

* 国家自然科学基金资助

有不少实例,例如针对 BEPC 就曾提出采用高次谐波腔压缩束长的建议^[3]. 而自激式的谐波腔与高阶模从束流动力学的角度完全是相同的. 另外在以 Vlasov 方程为基础的束流不稳定性理论体系中,其零级解是静态平衡分布,是微扰计算的出发点. 因此研究分析包括窄带阻抗影响的纵向静态平衡分布问题有其实际的意义和理论上的价值.

让我们观察一下 BEPC 的情况:束长的典型值 σ_l 是 4cm, 高频腔的基模为 200MHz, 在 200—2200MHz 有许多高阶模, 虽然安装了抑制器, 个别模式的品质因数仍然较高^[4]; 真空室改进前的波纹管中存在一个小腔结构, 其频率约为 1.7GHz, Q 值约为 $\sim 10^{3[5]}$; 对撞区真空室也是铝的类腔体结构. 束流在这样一个真空室中运动时, 当其回旋频率的谐波接近某一高阶模的频率时, 其激励的高频场会叠加在基模加速场上, 影响束团的纵向平衡分布.

在第二节介绍了静态分布的表达式, 一方面为了使文章在体系上较为完整, 同时也反映了我们对问题的理解和认识. 第三节首先导出束流在窄带阻抗上感应的电压, 然后分三种情况分析了窄带阻抗对束团纵向分布的影响. 第四节进行了总结和讨论.

2 纵向运动方程和束流的静态分布

环形加速器中电子纵向运动方程为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= -\frac{2}{\tau_s} \cdot \delta + g(\tau) + \frac{\hat{P}(t)}{E_0} \\ \frac{d\tau}{dt} &= -\alpha \cdot \delta \end{aligned} \right\}, \quad (1)$$

这里: $g(\tau) = \frac{eV_{\text{EXT}}(\tau) - U_0}{T_0 \cdot E_0}$, 其中 $V_{\text{EXT}}(\tau)$ 描述束流感受到的外场, 其中既包括

了外部功率在谐振腔中激励的电压也含有束流自身感应的电压, δ , τ 为粒子能量和时间偏差, T_0 , E_0 为标准粒子的回旋周期和能量, τ_s 为阻尼时间常数, U_0 为每圈辐射损失, $\hat{P}(t)$ 描述量子起伏导致的随机力: $\langle \hat{P}(t) \rangle = 0$, $\langle \hat{P}(t) \cdot \hat{P}(t') \rangle = 2D \cdot \delta(t - t')$, $D = N \cdot \langle u^2 \rangle / 2$ 为随机力的强度. 方程 (1) 包括了阻尼项与随机项, 是一个典型的二维 Langevin 方程, 它描述粒子在随机力与外场力作用下的无规行走, 而与此相对应的描述粒子分布密度的变化规律的方程称为 Fokker-Planck 方程, 两者从不同的角度描述了同一事物过程, 它们之间有着严格的对应关系^[6]. 方程 (1) 对应的 Fokker-Planck 方程为

$$\frac{\partial \psi(\tau, \delta, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} [\alpha \delta \cdot \psi(\tau, \delta, t)] - \frac{\partial}{\partial \delta} \left[\left(-\frac{2}{\tau_s} \delta + g(\tau) \right) \psi(\tau, \delta, t) \right] + D \frac{1}{E_0^2} \frac{\partial^2 \psi(\tau, \delta, t)}{\partial^2 \delta}. \quad (2)$$

这个方程的稳态解为^[4]:

$$\psi(\tau, \delta) = A \cdot \exp \left(-\frac{1}{2\sigma_\delta^2} \cdot \left(\delta^2 + \frac{2}{\alpha} \cdot \int_0^\tau g(\xi) \cdot d\xi \right) \right), \quad (3)$$

(3)式就是 Haissinski 方程. 其中: $\sigma_\delta = \sqrt{\tau_s \cdot N \cdot \langle u^2 \rangle} / (2 \cdot E_0)$ 为相对能散, A 为归一化常数. 若仅考虑射频加速场 $V_{\text{EXT}} = V_{\text{RF}}(\tau) = \hat{V}_{\text{RF}} \cdot \sin(\omega_{\text{RF}} \cdot (-\tau) + \varphi_s)$, 代入(3)式并作线性近似就得到我们熟悉的相空间密度的高斯分布函数:

$$\psi(\tau, \delta) = A \cdot \exp\left(-\frac{\delta^2}{2\sigma_\delta^2}\right) \exp\left(-\frac{\tau^2}{2\sigma_\tau^2}\right), \quad (4)$$

这里:
$$\sigma_\tau = \sqrt{-\frac{T_0 \cdot E_0 \cdot \alpha \cdot \sigma_\delta^2}{e \cdot \hat{V}_{\text{RF}} \cdot \omega_{\text{RF}} \cdot \cos(\varphi_s)}} = \frac{\alpha}{\Omega_s} \cdot \sigma_\delta$$

3 窄带阻抗的影响

为了应用束团的纵向静态平衡分布的基本表达式(3)研究窄带阻抗的影响, 首先需要给出束流在高阶模上感应的电压的数学表达式, 然后研究包含了高阶模的影响的纵向静态平衡分布表达式的物理内容.

把束流 $I(t)$ 作傅里叶级数展开: $I(t) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \alpha_N \cdot e^{jN\omega_0 t}$, 第 N 次谐波的系数: $\alpha_N = \frac{\omega_0}{\pi} \cdot \int_{-T_0/2}^{T_0/2} I(t) \cdot e^{-jN\omega_0 t} \cdot dt$, 束流的频谱为: $\tilde{I}(\omega) = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \alpha_N \cdot \delta(N\omega_0 - \omega)$, 那么束流感应的电压可以表达为: $V(t) = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{I}(\omega) \cdot \tilde{Z}(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$, 这里 $\tilde{Z}(\omega)$ 为高阶模阻抗, 其表达式为:
$$\tilde{Z}(\omega) = \frac{R_s^{\text{H.O.M.}}}{1 + jQ \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_{\text{H.O.M.}}} - \frac{\omega_{\text{H.O.M.}}}{\omega}\right)}$$

阶模的谐振频率 $\omega_{\text{H.O.M.}}$ 附近时, 束流与高阶模相互作用才比较显著, 作为一个很好的近似: 仅考虑 $N\omega_0$ 谐波, 而忽略其它远离谐振频率的谐波, 同时引入相对频率偏离 $\delta_\omega = \frac{\omega - \omega_{\text{H.O.M.}}}{\omega_{\text{H.O.M.}}}$ 和失谐角 $\tan\psi_\alpha = -2 \cdot Q \cdot \delta_\omega$, 可以得到束流在高阶模上感应电压的表达式:

$$V^{\text{H.O.M.}}(t) \cong V_{\text{H.O.M.}} \cdot \cos\psi_\alpha \cdot \cos(N\omega_0 \cdot t + \psi_\alpha), \quad (5)$$

这里 $\hat{V}_{\text{H.O.M.}} = R_s^{\text{H.O.M.}} \cdot \alpha_N$ 为失谐相角为零时的感应电压. 那么当分析某一高阶模对纵向平衡分布的影响时:

$$g(\tau) = \frac{e \cdot \hat{V}_{\text{RF}}}{T_0 \cdot E_0} \left[\sin(h \cdot \omega_0 \cdot \tau + \varphi_s) - \frac{\hat{V}_{\text{H.O.M.}} \cdot \cos\psi_\alpha}{\hat{V}_{\text{RF}}} \cdot \cos(N\omega_0 \cdot \tau + \psi_\alpha) \right], \quad (6)$$

利用相空间平衡分布表达式(3)在 δ 方向作积分可得纵向平衡分布:

$$\psi(\tau) = B \cdot \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\delta^2} \cdot \left(\frac{2}{\alpha} \cdot \int_0^\tau g(\xi) \cdot d\xi\right)\right), \quad (7)$$

而指数上的因子:

$$\frac{2}{\alpha} \cdot \int_0^\tau g(\xi) \cdot d\xi = \frac{2 \cdot e \cdot \hat{V}_{RF}}{\alpha \cdot T_0 \cdot E_0} \left[-\frac{1}{h \cdot \omega_0} \cdot \cos(h \cdot \omega_0 \cdot \tau + \varphi_s) - \sin(\varphi_s) \cdot \tau + \right. \\ \left. \frac{1}{h \cdot \omega_0} \cdot \cos(\varphi_s) - \frac{\hat{V}_{H.O.M.} \cdot \cos \psi_\alpha}{\hat{V}_{RF}} \cdot \frac{1}{N\omega_0} (\sin(N\omega_0 \cdot \tau + \psi_\alpha) - \sin(\psi_\alpha)) \right], \quad (8)$$

导出了数学表达式之后我们下面研究包含了高阶模影响的纵向静态平衡分布表达式的物理内容,我们将分三种情况:即高阶模的波长远大于束长、接近束长及远小于束长,以便对表达式作不同的近似处理和进行相关的分析.

3.1 高阶模的波长远大于束长

在这种情况下 $N\omega_0 \tau \ll 1$, 同时高频腔波长远大于束长, 即 $h\omega_0 \tau \ll 1$, 可以把(8)式展开保留至 $N\omega_0 \tau$ 与 $h\omega_0 \tau$ 的平方项, 得:

$$\frac{2}{\alpha} \int_0^\tau g(\xi) d\xi \cong \frac{e \cdot \hat{V}_{RF}}{\alpha \cdot T_0 \cdot E_0} \left[h\omega_0 \cos(\varphi_s) \tau^2 - 2k \cos^2 \psi_\alpha \cdot \tau + kN\omega_0 \frac{\sin(2 \cdot \psi_\alpha)}{2} \tau^2 \right], \quad (9)$$

推导时引入了参数 k , 它表示失谐相角为零时高阶模的激励电压与加速电压之比 $\frac{\hat{V}_{H.O.M.}}{\hat{V}_{RF}}$.

经简单的代数运算纵向分布可表达为:

$$\psi(\tau) = C \cdot \exp(-(\tau - \Delta\tau)^2 / 2\sigma_\tau'^2), \quad (10)$$

式中 C 为归一化常数, σ_τ' 为包含了高阶模影响的均方根束长:

$$\sigma_\tau' = \frac{\sigma_\tau}{\sqrt{1 + k \cdot N \frac{\sin(2 \cdot \psi_\alpha)}{2} / h \cdot \cos(\varphi_s)}}, \quad (11)$$

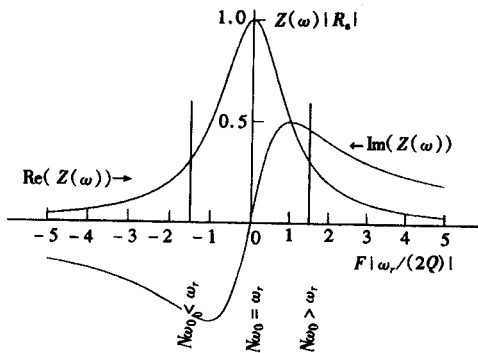


图1 束团感受的高阶模阻抗

上式反映了高阶模的波长远大于束长, 窄带阻抗对束团长度影响的基本规律. 图1画出了不同 ω_0 下束团感受的阻抗特性, 表1给出了高阶模对束长的影响. 从表1可以看到窄带阻抗对束团长度影响与一般的结论是一致的: 电感性的阻抗使束团拉长、电容性的阻抗使束团缩短.

表1 窄带阻抗对束长的影响

情形	阻抗	效果
$N\omega_0 < \omega_{\text{H.O.M.}}, \quad \psi > 0$	电阻+电感	拉长
$N\omega_0 = \omega_{\text{H.O.M.}}, \quad \psi = 0$	电阻	不变
$N\omega_0 > \omega_{\text{H.O.M.}}, \quad \psi < 0$	电阻+电容	缩短

回旋频率的某次谐波 $N\omega_0 \rightarrow \omega_{\text{RF}}$ 并且这个高阶模的激励电压与加速电压可比拟时,对束团的纵向分布产生影响,在 $\psi_\alpha = \pm 45^\circ$ 时(某次谐波 $N\omega_0$ 在高阶模 $\omega_{\text{H.O.M.}}$ 的半功率点)最大,此时:

$$\frac{\Delta\sigma_\tau}{\sigma_\tau} \approx \pm \frac{k \cdot N}{|4 \cdot h \cdot \cos(\varphi_s)|}, \quad (12)$$

束流激励高阶模的功率来源于加速电压,因此高阶模的另一个影响是平衡相角的移动:

$$\Delta\tau = -\frac{k \cdot \cos^2\psi_\alpha}{h \cdot \omega_0 \cos(\varphi_s)}, \quad (13)$$

3.2 高阶模的波长接近束长

在这种情况下 $N\omega_0\tau$ 不再是小量,对高阶模项不能采用 3.1 节中的近似处理方法.因此束长和同步相角的表达式也不可能很简洁.但依然可以从表达式了解窄带阻抗波长接近束长时其对束团长度影响的基本特点,由于 $h\omega_0\tau \ll 1$ 仍满足,(8)式可近似写为:

$$\frac{2}{\alpha} \int_0^\tau g(\xi) d\xi \cong \frac{2e\hat{V}_{\text{RF}} h\omega_0 \cos(\varphi_s)}{\alpha \cdot T_0 \cdot E_0} \left[\frac{\tau^2}{2} - \frac{k \cos\psi_\alpha}{h\omega_0 \cos(\varphi_s)} \frac{1}{N\omega_0} \left(\sin(N\omega_0\tau + \psi_\alpha) - \sin(\psi_\alpha) \right) \right], \quad (14)$$

那么纵向分布可表达为:

$$\psi(\tau) = D \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\tau^2} \left[\tau^2 + \beta \left(\sin^2 \frac{N\omega_0\tau}{2} \right) \sin 2\psi_\alpha \right] \right) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_\tau^2} \left[-\beta \sin(N\omega_0\tau) \cos^2\psi_\alpha \right] \right), \quad (15)$$

其中: $\beta = \frac{2 \cdot k}{h \cdot \omega_0 \cos(\varphi_s)} \cdot \frac{1}{N\omega_0}$. 上面把纵向分布分为两项来考虑,可以更清楚地看到高阶模的影响:第一项的指数部分是 τ 的偶函数,因此它使束团的长短发生变化,而拉长还是缩短则由 ψ_α 来决定,单就本项而言,其结论与表 1 是一致的;第二项的指数部分是 τ 的奇函数,它是束团发生头尾的不对称畸变(束团分布向头部移动),畸变的程度决定于 ψ_α . 总之,在阶模波长接近束长时,束团长度的变化与 A 中的情形基本一致(第二项将间接影响束团长度,因此定量上会稍有不同),但分布已偏离了高斯分布,并有向前倾的趋势. 图

2 给出了数值计算的结果.

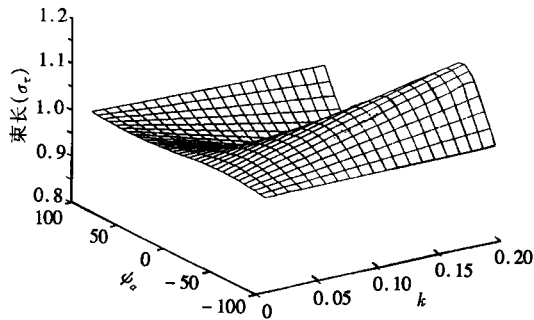


图2 高阶模(波长接近束长)影响下的束长

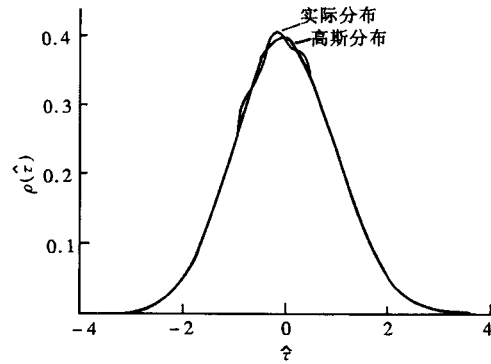


图3 高阶模的波长远小于束长时的束团分布

$$\frac{V_{\text{H.O.M.}}}{V_{\text{RF}}} \approx 0.05, \frac{\lambda_{\text{RF}}}{2\pi\sigma_l} \approx 10, \frac{\lambda_{\text{H.O.M.}}}{2\pi\sigma_l} \approx 0.1; \psi = 0.$$

3.3 高阶模的波长远小于束长

高阶模的波长远小于束长时,束流纵向功率谱的特征波长($\sim \sigma_l$)远远大于高阶模的波长,因此高阶模与束流的耦合非常弱,对束流分布的影响很小.

由前面的公式也可以得出相同的结论.由(7)与(8)式可以得到归一化的束团分布:

$$\psi(\hat{\tau}) = B \exp\left(-\frac{1}{2} \left[\hat{\tau}^2 - k \frac{\cos\psi_a}{\cos(\varphi_s)} \frac{\lambda_{\text{RF}}}{2\pi \cdot \sigma_l} \frac{\lambda_{\text{H.O.M.}}}{2\pi \cdot \sigma_l} \left(\sin\left(\frac{2\pi \cdot \sigma_l}{\lambda_{\text{H.O.M.}}} \hat{\tau} + \psi_a\right) - \sin(\psi_a) \right) \right]\right), \quad (16)$$

$$\hat{\tau} = \tau/\sigma_\tau,$$

当频率比较高时的高阶模的品质因数通常都较低,其影响是可以忽略的,但仍然可能存在个别的质因数较高的模式,假定 $\frac{R}{Q} \approx 10\Omega$, $Q = 10^4$ 应该是一个合理的量值,从而模式的分路阻抗 $R = 0.1\text{M}\Omega$, 而束流为 10mA, 150mA, 300mA 可能感应的最大电压为: 1kV, 5kV, 30kV, 因此单束团情况下影响是微弱的,只有在能量较低的环形加速器多束团大流强条件下可能发生较小影响.由(16)式也可以给出近似的束团分布

$$\rho(\hat{\tau}) \cong C \exp\left(-\frac{\hat{\tau}^2}{2}\right) \cdot (1 - D \cdot \sin(S \cdot \hat{\tau} + \Theta)), \quad (17)$$

一般 ($D \sim 0.01$, $S \sim 10$), 相当在高斯分布上加了一个正弦调制.图3给出了一个数值结果.

4 总结和讨论

以上得出的解,只有在多束团不稳定性没有发生时或者说系统有纵向反馈系统而使束团没有纵向的相干振荡时才能观察到.通过微调回旋频率 ω_0 、调节腔温和腔压等方法改变束流与高阶模的耦合,然后观测和分析加速腔的频谱,能够确定高阶模对束团分布的实际影响.而要得到较定量的结果,要求 Pick-up 探头与各个高阶模(主要是 R_s 比较大的几个模式)的耦合系数以及高阶模谱有较准确的测量.

本文中并没有考虑一台机器的全部复杂性,仅仅把所讨论的问题限于束流与某个高阶模耦合时其对束团静态平衡分布的影响,而一台实际的机器会存在众多的高阶模,但这只是增加了数学处理的繁琐程度,分析的方法是完全相同的.同时限于篇幅,本文也没有包括高阶模对束团平衡分布影响的一些更细致的分析以及动力学效应^[6,7].总之,我们讨论的静态解不过是著名的 Hassisky 解在束流与某个高阶模耦合情况下的推广.

参 考 文 献

- 1 Haissinski J. Nuovo, Cimento, 1973,18B:72—82
- 2 Chen Longkang, The beam instabilities in Hefei 800 MeV Electron Storage Ring, MS thesis (in Chinese), 1981
(陈龙康,科大800MeV电子储存环束流不稳定性(硕士论文),1981)
- 3 Zhao Zhengtang. Proceedings of 94' Particle Accelerator Physics Symposium 1994. 91—96
(赵振堂,1994年全国加速器物理讨论会论文集,1994.91—96)
- 4 Qin Ju et al. Proceedings of 94' Particle Accelerator Physics Symposium 1994. 97—107
(秦玖等,1994年全国加速器物理讨论会论文集,1994.97—107)
- 5 Zhou Feng. Study of fundamental theories and their Application on Impedances. Ph. D thesis (in Chinese). 1997
(周峰,阻抗基本理论和其应用的研究(博士论文),1997)
- 6 Hu Gang. Stochastic forces and nonlinear systems (in Chinese). Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House. 1994
(胡岗,随机力与非线性系统,上海科技教育出版社,1994)
- 7 Wang Lanfa. Multi-bunch Collision Scheme and Coherent Instabilities in BEPC Ph. D thesis (in Chinese). 1997
(王兰法, BEPC多束团对撞与耦合束不稳定性(博士论文),1997)

Effect of Narrow-Band Impedance on Longitudinal Static Distribution *

Huang Wenhui Wang Guangwei Lin Yuzheng

(*Department of Engineer Physics, Tsinghua University, Beijing 100084*)

Zhou Feng

(*Institute of High Energy Physics, The Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039*)

Abstract Based on Haissinsky equation, some study results of the effect of narrow-band impedance on longitudinal static distribution of bunch are presented. The study is carried out with analytic method and simulative method.

Key words Haissinsky equation, longitudinal static distribution, narrow-band impedance

Received 8 Junn 1998

* Supported by the National Natural Science Foundation of China