第23卷 第7期
1999 年7月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol.23, No.7
July, 1999

非简谐振子与新条件精确可解势*

马 涛 倪致祥[1)]

(阜阳师范学院物理系，阜阳 236032)

摘要 利用超对称性，由平移的非简谐振子构造出了多类新的条件精确可解势，并得到相应的非线性谱生成代数.

关键词 非简谐振子 条件可解势 超对称性 谱生成代数.

不久前，Dutra 提出了条件精确可解势[1]. 利用超对称量子力学，G. Junker 和 P. Roy 由谐振子构造出一些新的条件精确可解势[2]. 在本文中用超对称变换由非简谐振子构造出了多类新的条件精确可解势. 这些新可解势在许多物理领域中有重要应用前景.

非简谐振子的哈密顿算符为[3]

$$H=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}x^2+\frac{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{2x^2},\ \alpha>\frac{1}{2},\ x>0, \tag{1}$$

其能量本征值和相应的本征态分别为

$$E_n=2n+\alpha+1,\ n=0,1,2,\cdots,$$
$$\psi_n(x)=N_n \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}x^{\alpha+\frac{1}{2}}L_n^{\alpha}(x^2), \tag{2}$$

其中 N_n为归一化系数，

$$\mathrm{L}_n^{\alpha}(z)=\frac{1}{n!}z^{-\alpha}\mathrm{e}^{z}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}(\mathrm{e}^{-z}z^{n+\alpha}), \tag{3}$$

为广义拉盖尔多项式. 非简谐振子的能量升降算符为

$$b_{\pm}=\frac{1}{2}\left(x^2-H\mp\frac{1}{2}\{x,p\}\right), \tag{4}$$

它们具有性质

1998-05-15收稿

* 国家自然科学基金和安徽省教委资金资助

1) 华东理论物理研究所，上海 200237

650—654

$$b_-\psi_n(x) = \sqrt{n(n+\alpha)}\ \psi_{n-1}(x),$$

$$b_+\psi_n(x) = \sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}\ \psi_{n+1}(x). \tag{5}$$

容易验证 H 和 $b_\pm$ 生成了一个 $SU(1,1)$ 李代数

$$[H, b_\pm] = \pm 2b_\pm,$$
$$[b_-, b_+] = H, \tag{6}$$

上式为非简谐振子的谱生成代数.

按超对称量子力学，两个互伴的哈密顿算符可因式分解为

$$H_+ = \frac{1}{2}p^2 + V_+(x) = AA^\dagger,$$
$$H_- = \frac{1}{2}p^2 + V_-(x) = A^\dagger A. \tag{7}$$

上式中线性算符 A 与超势 $W(x)$ 的关系为

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + W(x)\right), \tag{8}$$

而 $A^\dagger$ 为 A 的厄密共轭. 因此超对称互伴势 $V_\pm(x)$ 可完全由超势确定

$$V_\pm(x) = \frac{1}{2}(W^2 \pm W'),\ \ W' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}W(x). \tag{9}$$

显然，$H_\pm$ 可能的零能量波函数为

$$\psi_0^{(\pm)}(x) = N_0 \exp\left(\pm\int^x W(t)\,\mathrm{d}t\right). \tag{10}$$

按文献 [4]，如上式中两个波函数均不可归一化时，超对称性发生破缺，两个互伴哈密顿的能谱和本征态满足关系

$$E_n^{(+)} = E_n^{(-)} = E_n > 0$$
$$\psi_n^{(+)}(x) = E_n^{-1/2} A\psi_n^{(-)}(x),\ \ \psi_n^{(-)}(x) = E_n^{-1/2} A^\dagger \psi_n^{(+)}(x). \tag{11}$$

下面取平移的非简谐振子势为 $V_+(x)$，即

$$V_+(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{2x^2} + V_0,\ \ V_0 > 1 - \alpha, \tag{12}$$

显然 H_+ 不存在可归一化的零能量本征态. 不失一般性，可把超势表示为

$$W(x) = x + \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln u(x), \tag{13}$$

其中 u 为 x 的待定函数.

由(9)式容易推出 $u(x)$ 满足方程

$$z\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}z^2}+(1+\alpha+z)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z}-ku=0, \tag{14}$$

式中 $z=x^2$, 参数 $k=(V_0-\alpha-1)/2$. 超势 $W(x)$ 的有界性条件要求 $u(x)$ 无正零点, 发现当 k 为非负整数时, 方程(14)有无正零点多项式解

$$u_k(x)=L_k^{\alpha}(-z)=\frac{1}{k!}z^{-\alpha}\mathrm{e}^{-z}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}z^k}(\mathrm{e}^z\cdot z^{k+\alpha}) \tag{15}$$

于是, $V_+(x)$ 的伙伴势为

$$V_-^{(k)}(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{2x^2}+2k+\alpha-(\ln u_k)'', \tag{16}$$

其中 $(\ln u_k)''=\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\ln u_k)$.

不难验证此时零能量波函数 $\psi_0^{(-)}(x)$ 不能归一化, 即超对称性发生了破缺. 由前面的分析可知, 互伴哈密顿 $H_-^{(k)}$ 与 H_+ 有相同的能谱

$$E_n^{(k)}=V_0+2n+\alpha+1=2(n+k+\alpha+1), n=0,1,2,\cdots, \tag{17}$$

这表明 $V_-^{(k)}(x)$ 也是精确可解势. 由于上式中 k 只能取特定值, 因此得到的是新的条件精确可解势. 下面给出前三类的具体形式

$$V_-^{(1)}(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{2x^2}+2+\alpha+\frac{4x^2}{(1+\alpha+x^2)^2}-\frac{2}{1+\alpha+x^2},$$

$$V_-^{(2)}(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{2x^2}+4+\alpha+\left(\frac{4x^3+4\alpha x+8x}{(1+\alpha)(2+\alpha)+2(2+\alpha)x^2+x^4}\right)^2-\frac{12x^2+4\alpha+8}{(1+\alpha)(2+\alpha)+2(2+\alpha)x^2+x^4}, \tag{18}$$

$$V_-^{(3)}(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{2x^2}+6+\alpha+\left(\frac{6(3+\alpha)(2+\alpha)x+12(3+\alpha)x^3+6x^5}{(3+\alpha)(2+\alpha)(1+\alpha)+3(3+\alpha)(2+\alpha)x^2+3(3+\alpha)x^4+x^6}\right)^2-\frac{6(3+\alpha)(2+\alpha)+36(3+\alpha)x^2+30x^4}{(3+\alpha)(2+\alpha)(1+\alpha)+3(3+\alpha)(2+\alpha)x^2+3(3+\alpha)x^4+x^6},$$

与文献[2]相比, 本文中的方法更简明, 结果更普遍.

对非简谐振子的能量升降算符 $b_{\pm}$ 进行超对称变换[5], 可以得到新可解势 $V_-^{(k)}(x)$ 的能

量升降算符

$$B_k = A_k^\dagger b_- A_k, \qquad B_k^\dagger = A_k^\dagger b_+ A_k, \tag{19}$$

式中算符

$$A_k = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x + \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{x} + \frac{u_k'}{u_k}\right), \tag{20}$$

$$A_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + x + \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{x} + \frac{u_k'}{u_k}\right), \quad u_k' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u_k .$$

上述能量升降算符对 $H_-^{(k)}$的本征态$\psi_n^{(-)}$的作用为

$$\begin{aligned} B_k \psi_n^{(-)}(x) &= E_n^{(k)} \cdot \sqrt{n(n+\alpha)}\ \psi_{n-1}^{(-)}(x), \\ B_k^\dagger \psi_n^{(-)}(x) &= E_n^{(k)} \sqrt{(n+1)(n+\alpha+1)}\ \psi_{n+1}^{(-)}(x), \end{aligned} \tag{21}$$

不难验证算符 B_k, $B_k^\dagger$与 $H_-^{(k)}$生成了新可解势 $V_-^{(k)}(x)$的谱生成代数

$$\begin{aligned} &[H_-^{(k)}, B_k] = -2B_k, \\ &[H_-^{(k)}, B_k^\dagger] = 2B_k^\dagger, \\ &[B_k, B_k^\dagger] = 2H_-^{(k)^3} - 3(2k+\alpha+1)H_-^{(k)^2} + 2(2k^2 + 2k\alpha + 2k + \alpha + 1)H_-^{(k)}. \end{aligned} \tag{22}$$

显然上式是非线性的，但与文献 [6] 中的情况不同，因参数 k 不能连续取值，故 (22) 式不能看成 $SU(1,1)$李代数的非线性形变.

参　考　文　献

1 Dutra A de S. Phys. Rev., 1993, **A47**: R2435—R2437.

2 Junker G, Roy P. Phys. Lett., 1997, **A232**: 155

3 Ni Z. Acta Physica Sinica (in Chinese), 1997, **46**: 1687
(倪致祥. 物理学报, 1997, **46**: 1687)

4 Sukumar C V. J. Phys., 1985, **A18**: 2917

5 Zhang J, Li X, Ni Z. Phys. Lett., 1996, **A214**: 107

6 Ni Z. Phys. Lett., 1997, **A235**: 313

Non-Harmonic Oscillator and New Conditionally Exactly Solvable Potentials*

Ma Tao Ni Zhixiang

(*Physics Department, Fuyang Teachers College, Fuyang* 236032)

Abstract Using supersymmetric quantum mechanics, serveral new classes of conditionally exactly solvable potentials are constructed from the displaced non-harmonic oscillator potential. And the corresponding nonlinear spectrum-generating algebras are obtained.

Key words non-harmonic oscillator, conditionally exactly solvable potential, supersymmetry, spectrum-generating algebra

Received 15 May 1998

* Supported by the National Natural Science Foundation of China and Anhui Education Commission.