

高能多粒子末态的多重分形维数 与动力学起伏强度*

傅菁华 吴元芳 刘连寿

(华中师范大学 粒子物理研究所 武汉 430079)

摘要 研究了多重分形维数与动力学起伏强度的关系,给出了一个能直接描述高能多粒子末态动力学起伏强度的特征参量,并指出了这一参量的适用范围以及在实际高能实验中的应用.

关键词 动力学起伏 分形维数 起伏强度参数

1983年 JACEE 组^[1]和以后的加速器实验^[2,3]都显示了高能碰撞多粒子末态中存在非线性的动力学起伏的迹象. 这引发了研究高能多粒子末态中的动力学起伏的热潮^[4].

经过十多年的努力,终于在 250GeV/c π^+ (K^+)p^[5]和 400GeV/c pp 碰撞^[6]实验数据中观察到了所预期的动力学起伏. 在此情况下,为了进一步对多粒子末态的动力学起伏进行定量的研究,有必要找到一个能表征其强度的合适的特征量. 这篇短文的目的是要对此作初步的探讨.

高能多粒子末态的动力学起伏表现为在相空间一步步愈分愈细时,粒子出现在相空间元胞中的几率的矩

$$C_q = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \langle p_m^q \rangle \quad (1)$$

或归一化几率矩

$$F_q = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \frac{\langle p_m^q \rangle}{\langle p_m \rangle^q} \quad (2)$$

有反常标度性

$$C_q(M) \propto M^{-(q-1)D_q}, \quad (3)$$

$$F_q(M) \propto M^{\phi_q}. \quad (4)$$

在以上各式中, M 是相空间区域 Δ 分割的元胞数, p_m 是粒子落入第 m 个元胞的几率, D_q 是 q 阶多重分形维数 (Renyi 维数)^[7]. ϕ_q 通常称为间歇指数, 它和 D_q 之间有关系,

1998-07-28 收稿

* 国家自然科学基金资助项目

$$D_q = 1 - \frac{\phi_q}{q-1}. \quad (5)$$

实验中测得的带电粒子数在相空间中的分布包含有统计起伏. 文献中发展了两种方法——阶乘矩方法^[8]和反泊松变换^[9]方法——来消除统计起伏, 得到几率矩. 前一种方法能用于 q 为大于或等于 2 的整数的情况; 后一方法在采用了负二项式展开的近似以后能得到任意阶的矩.

已经证明, 高能强子-强子碰撞末态相空间中的动力学起伏是各向异性的, 相应的分形是自仿射分形^[10]. 只有按照由特定赫斯特指数 H 表征的各向异性方式分割相空间^[5,6], 才能观察到阶乘矩的反常标度性. 这已经在 $250\text{GeV}/c \pi^+ (\text{K}^+) \text{p}$ 和 $400\text{GeV}/c \text{pp}$ 碰撞实验数据中成功地实现. 在前一情况下测得赫斯特指数为 $H_{\text{pp}} = H_{\text{p}\phi} = 0.475$, $H_{\text{p}\phi} = 1$, 相应的三维二阶间歇指数为 $\phi_2^{3D} = 0.061 \pm 0.004$, 由此得到二阶分形维数是 $D_2^{3D} = 0.939 \pm 0.004$. 用反泊松变换方法分析同一实验数据, 还可以得到其它各阶维数, 例如信息维数 $D_i^{3D} (= D_1^{3D})$ ^[11]. 如何从测得的这些多重分形维数中揭示出多粒子末态动力学起伏的强度? 这就是我们想要探讨的问题.

值得注意的是反常标度性和分形是动力学起伏的结果, 与动力学起伏的强度有关, 但并不是动力学起伏强弱程度的直接度量. 例如文献 [7], 信息维数 D_i 表示的是含有主要信息的元胞数的反常标度行为, 二阶 Renyi 维数 D_2 表示的是两粒子关联的反常标度行为. 它们不等于零表明存在动力学起伏, 但它们本身并不是动力学起伏强弱的直接度量. 因此, 我们希望找到一个能更好地直接表征动力学起伏强度的特征量.

不同碰撞过程的动力学起伏可能来源于不同的机制. 为了具体起见, 下面以随机级联 α 模型为例来说明动力学起伏强度与多重分形维数的关系.

随机级联 α 模型^[8]是把相空间区域 Δ 的 M 等分分成 ν 步来完成的, 第一步将它分为 2 份; 第二步再将第一步的每一份分成 2 份; 如此重复 ν 步使得: $M = (\Delta / \delta) = 2^\nu$, 每次分得的子区域中的几率为一个基元几率 $\omega_{\nu j}$ 和上一步中的母区域中的几率的乘积. 其中, ν 代表所分的步数, $j\nu$ 代表窗口的位置 ($1 \leq j\nu \leq 2^\nu$). ω 是一个随机变量, 我们可让其取值为 [12]:

$$\omega_{\nu, 2j-1} = \frac{1}{2} (1 + \alpha r); \quad \omega_{\nu, 2j} = \frac{1}{2} (1 - \alpha r). \quad (6)$$

上式中的 r 是在区间 $[-1, 1]$ 中均匀分布的随机数, α 是一个小于等于 1 的正常数. α 的大小决定了随机变量 ω 均匀取值的范围,

$$\frac{1-\alpha}{2} < \omega < \frac{1+\alpha}{2}, \quad (7)$$

ω 是基元分割过程中进入每个子区间的几率, 因此, α 决定了基元分割动力学起伏的强度. 它是表征随机级联模型所产生的动力学起伏强弱程度的特征量. 下面来看看在随机级联模型中表征动力学起伏强度的这一特征量和多重分形维数之间的关系.

根据定义

$$C_q = M^{q-1} \left\langle \sum_{m=1}^M p_m^q \right\rangle, \quad (8)$$

可求得随机级联模型中几率矩等于(分割到第 ν 代, $M = 2^\nu$)

$$C_q(M) = \frac{\langle \omega^q(1) \cdots \omega^q(\nu) \rangle}{\langle \omega \rangle^{q\nu}}, \quad (9)$$

反常标度指数(间歇指数)为:

$$\phi_q = q + \frac{\ln \langle \omega^q \rangle}{\ln 2}. \quad (10)$$

如果中心极限定理成立, 随机变量 $\xi = \sum_{i=1}^{\nu} \ln \omega(i)$ 服从高斯分布^[8],

$$p(\xi) d\xi = (2\pi\nu)^{-1/2} \sigma^{-1} \exp[-(\xi - \nu \bar{V})^2 / 2\nu \sigma^2] d\xi$$

其中

$$V_s = \ln \omega_s, \quad s = 1, \dots, \nu$$

$$\bar{V} = \int P(\omega) \ln(\omega) d\omega,$$

$$\sigma^2 = \int P(\omega) (\ln(\omega) - \bar{V})^2 d\omega, \quad (11)$$

可求得在这一近似下分形维数

$$D_q = 1 - \frac{1}{2 \ln 2} \sigma^2 q. \quad (12)$$

由此知不同阶的分形维之间满足比例关系

$$\frac{1 - D_q}{1 - D_2} = \frac{q}{2}. \quad (13)$$

(12)式也可以写为

$$\frac{1 - D_q}{q} = \frac{1}{2 \ln 2} \sigma^2.$$

令 $d_q = 1 - D_q$, 则

$$\frac{d_q}{q} = \frac{1}{2 \ln 2} \sigma^2 \quad (14)$$

(11)式所定义的随机变量 $\ln \omega$ 的均方偏差 σ^2 的大小由模型参数 α 的大小决定. 因此, 对于确定的 α , d_q 与 q 成正比. 在图 1 中我们画出了 $\alpha = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$ 时, d_q 与 q 的关系, 由图可见, 当 α 比较小时, d_q 与 q 之间有很好的线性关系, 说明当 α 较小时, 中心极限定理是很好的近似. 直线的斜率由 α 的大小决定, 即各阶分形维数的大小由 α 的大小决定.

为了进一步看清分形维数 D_q 与表征动力学起伏强度的模型参数 α 之间的依赖关系, 我们具体计算了 σ^2 的值.

$$\sigma^2 = \langle \ln^2 \omega \rangle - \langle \ln \omega \rangle^2 = \frac{1}{3} \alpha^2 + \frac{2}{3} \alpha^4 + \dots, \quad (15)$$

取线性近似的条件下有:

$$\sigma^2 \approx \frac{1}{3} \alpha^2. \quad (16)$$

在图 2 中,我们给出了 σ 和 α 之间的关系,图中的黑点是未取近似的 σ 和 α 的关系,虚线是在线性近似下 σ 和 α 的关系. 由图可见,当 α 较小时,线性近似的结果与实际符合得很好. 因此在 α 比较小的情况下(比如说 $\alpha \leq 0.5$),我们可以采用中心极限定理及线性近似来讨论各阶分形维数 D_q 和起伏参数 α 之间的关系. 而 α 值的这一范围也正是目前得到的高能碰撞多粒子产生过程可能实现的范围.

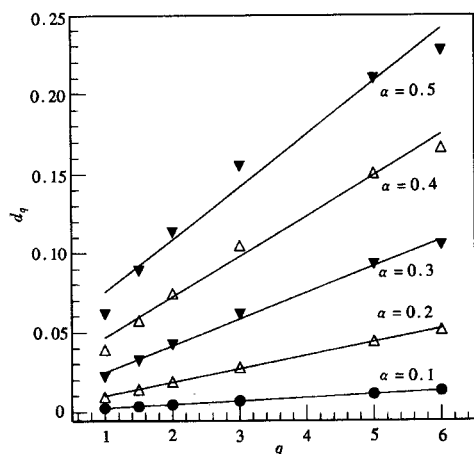


图1 d_q 和阶数 q 的关系,模型参数 α 取 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5.

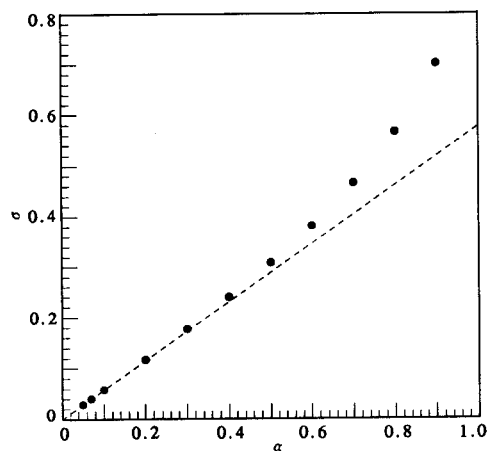


图2 随机变量 $\ln \omega$ 的标准偏差 σ 和模型参数 α 的关系

$$\dots \sigma = \sqrt{\frac{1}{3}} \alpha$$

将(16)式代入(12)式,可得

$$D_q = 1 - \frac{1}{6 \ln 2} q \alpha^2,$$

或

$$\alpha = \sqrt{\frac{6 \ln 2}{q} (1 - D_q)}. \quad (17)$$

由(17)式可以看出,随机级联 α 模型中,在 α 小的情况下,分形维数 D_q 和起伏强度参数 α 之间有简单的代数关系,只要知道了任一阶分形维数 D_q 都可求得相应的起伏强度参数 α . 一般高能物理实验中,比较容易得到的是二阶分形维数 D_2 , 因此,我们可以定义一个新的表征动力学起伏强度的特征量.

$$\alpha_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{6 \ln 2}{2} (1 - D_2)} = \sqrt{3 \ln 2 (1 - D_2)} \approx \sqrt{2(1 - D_2)}, \quad (18)$$

并称它为等效起伏强度参数. 表 1 中列出了当模型参数 α 取不同值时的 D_2 和 α_{eff} . 从表中可以看出,当 α 小于 0.5 时 α 和 α_{eff} 的相对偏差小于 4%, 在误差范围内可以认为它们是相等的.

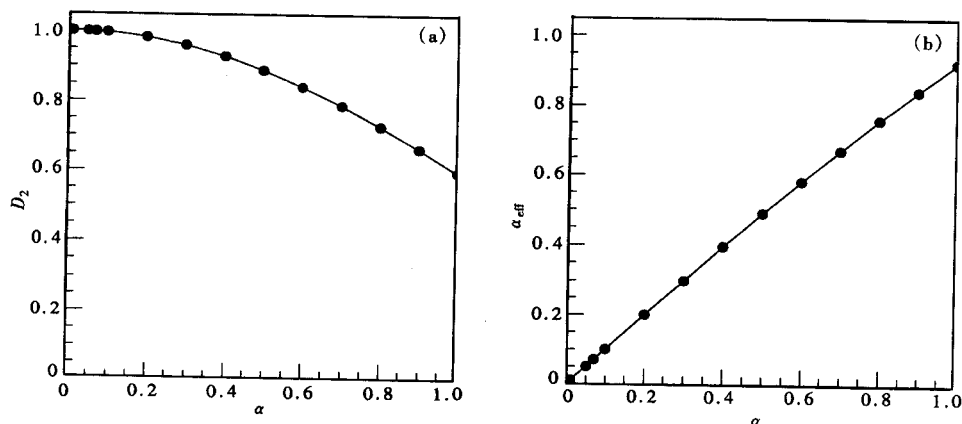
表1 α 与 α_{eff} 的比较

α	d_2	$\alpha_{\text{eff}} = \sqrt{2(1-D_2)}$	$(\alpha - \alpha_{\text{eff}})/\alpha$
0.006	0.99998	0.00587	2.2%
0.007	0.99998	0.00686	2.0%
0.010	0.99995	0.00980	2.0%
0.050	0.99880	0.04902	2.0%
0.070	0.99765	0.06862	2.0%
0.100	0.99521	0.09791	2.1%
0.200	0.98090	0.19545	2.3%
0.300	0.95740	0.29191	2.7%
0.400	0.92502	0.38725	3.2%
0.500	0.88454	0.48054	3.9%
0.600	0.83718	0.57064	4.9%
0.700	0.78370	0.65773	6.0%
0.800	0.72347	0.74368	7.0%
0.900	0.65982	0.82484	8.4%
1.000	0.59257	0.90269	9.7%

对于任一高能碰撞过程的多粒子末态,可以用和它具有相同的多重分形维数的随机级联过程的起伏强度参数来表征实际动力学起伏的强弱程度.不同的碰撞过程动力学起伏的特征可能是不同的,但为了对它们进行比较,应对于其动力学起伏的强弱程度作出统一的描述.按照(17)式,只要测出了一个碰撞过程的二阶分形维数就可求得其等效起伏参数 α_{eff} ,从而使得各种不同碰撞过程动力学起伏强度的描述有了统一的标准,更便于进行比较与研究.

如本文开头所指出的,在 $250\text{GeV}/c \pi^+ (\text{K}^+) \text{p}^{[5]}$ 碰撞实验数据中测得三维二阶分形维数是 $D_2^D = 0.939 \pm 0.004$,按定义(18)式可以求得这一碰撞过程的有效起伏强度参数 $\alpha_{\text{eff}} = 0.349 \pm 0.011$.

图3中的(a),(b)分别给出了 α 模型的二阶分形维数 D_2 及等效起伏强度参数 α_{eff} 随模型参数 α 的变化情况.由图(a)中可以看到,当 α 很小时($\alpha \leq 0.2$), D_2 几乎不随 α 变化,因

图3 二阶分形维数 D_2 (a)和有效起伏强度参数 α_{eff} (b)随模型参数 α 的变化

而不易分辨和不同的 D_2 对应的 α 值. 而采用 α_{eff} 则较准确地反映了 α 的分布; 特别是, 在 α 较小的范围内, 采用 α_{eff} 比直接用 D_2 可以大大提高实验结果的分辨率. 因此等效起伏强度参数 α_{eff} 是一个好的, 可以直接表征动力学起伏强弱程度的特征参量. 它可以在对高能非线性现象开展更深入的研究时, 起重要的辅助作用.

参 考 文 献

- 1 Burnett T H et al (JACEE). Phys. Rev. Lett., 1983, **50**:2062
- 2 Adamus M et al (NA22). Phys. Lett., 1987, **B185**:200
- 3 Adamovich M I (EMU01). Phys. Lett., 1987, **B201**:397
- 4 De Wolf E A, Dremin I M, Kittel W. Phys. Rep., 1996, **270**:1
- 5 Agababyan N M et al (NA22). Phys. Lett., 1995, **B382**:305; Agababyan N M et al (NA22). Phys. Lett., 1998, **B431**:451.
- 6 Wang S, Wang Z, Wu C. Phys. Lett., 1997, **B410**:323
- 7 Paladin G, Vulpiani A. Phys. Rep., 1987, **156**:147
- 8 Bialas A, Peschanski R. Nucl. Phys., 1986, **273**:703; 1988, **308**:857
- 9 Hwa R C. Phys. Rev., 1995, **D51**:3323
- 10 Wu Yuanfang, Liu Lianshou. Phys. Rev. Lett., 1993, **70**:3197
- 11 Agababyan N M et al (NA22). The Self-Affine Multifractal Spectral Function in 250GeV/c Hadron-Hadron Collisions, to be published
- 12 Wu Yuanfang, Zhang Kunshi, Liu Lianshou. Chinese Science Bulletin, 1991, **36**:1077

Multifractal Dimension and Dynamical Fluctuation Strength in High Energy Multiparticle Final States*

Fu Jinghua Wu Yuanfang Liu Lianshou

(*Institute of Particle Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430079*)

Abstract relation between the multifractal dimension and the strength of dynamical fluctuations is studied in some detail. A parameter “effective fluctuation strength” is proposed to characterize the strength of dynamical fluctuations in the multiparticle final states of high energy collisions. Its application region and the method for extracting its value from the experimentally observed data is given.

Key words dynamical fluctuations, multifractal dimension, fluctuation strength parameter

Received 28 June 1998

* Project supported by National Natural Science Foundation of China