

# 小波变换在多粒子末态 相空间分析中的应用\*

林 海

(雁北师范学院物理系 山西大同 037000)

刘 连 寿

(华中师大粒子物理研究所 武昌 430070)

**摘要** 利用小波变换这一数学工具,对于由随机级联 $\alpha$ 模型模拟产生的多粒子末态相空间的几率分布,进行了分析与讨论,得出利用小波变换可直接对末态相空间粒子分布的实验数据进行几率矩、关联矩方面的分析与研究;并且提供了具体的计算方法。

**关键词** 高能碰撞 小波变换 蒙特卡罗模拟 随机级联模型 关联矩

## 1 引言

在对高能碰撞多粒子末态的研究中,人们常常利用随机级联模型对末态相空间进行分析<sup>[1,2]</sup>。其做法往往是利用模型去产生各代末态粒子的几率分布,然后考查几率矩  $C_q$  随各代分割窗口数  $M$  变化的行为,以期得到实验上表明的  $C_q$  与  $M$  之间存在的反常标度行为 ( $C_q \sim M^{p_q}$ )。

小波变换(Wavelet Transformation)<sup>[3]</sup>这一新型的数学工具,近年来在高能物理领域已有了较广泛的应用。本文的目的是将小波变换应用于多粒子末态相空间的分析中,以提供一种新的分析方法。文中利用随机级联 $\alpha$ 模型<sup>[2,4]</sup>,由蒙特-卡罗模拟方法产生末态相空间中的几率分布,以此作为最后一代的分布。再利用小波变换,计算推演出以前各代末态相空间中粒子的几率分布,进而分析几率矩  $C_q$  随各代分割数  $M$  的变化关系。同时,为了能够做比较,文中也直接利用随机级联 $\alpha$ 模型中模拟产生的各代末态相空间中的粒子的几率密度分布,做了类似的分析。其结果是:最后一代( $\nu$ 代)几率分布作为分布函数的母表

1997-10-22收稿

\* 国家自然科学基金资助

示<sup>[5]</sup>, 利用小波变换可得到以前各代 ( $j < \nu$ ) 分布函数的母表示. 这些母函数系数与  $\alpha$  模型中模拟产生的各代末态几率分布几乎是一致的. 文中选用了 Haar 小波<sup>[6,7]</sup>进行了讨论, 模型选用了基元分割数为  $\lambda = 2$  的一维  $\alpha$  模型和一维投影  $\alpha$  模型<sup>[8-11]</sup>. 所得结果表明, 小波变换可以直接对实验数据进行处理.

本文在第三部分, 对于 Haar 小波, 利用其小波变换矩阵  $W$ , 计算了末态相空间几率分布的父表示<sup>[5]</sup>. 通过对普通关联矩与小波关联矩的研究<sup>[7]</sup>, 提出了有关这两种关联矩之间相互变换的具体计算方法. 这是小波在多粒子末态相空间关联矩分析方面的一种应用.

## 2 末态相空间几率分布的母表示及反常标度分析

选用一维随机级联  $\alpha$  模型, 分割数  $\lambda = 2$ , 基元分割几率取为<sup>[2]</sup>

$$w_1 = \frac{1 + \alpha r_1}{2 + \alpha(r_1 + r_2)}, \quad w_2 = \frac{1 + \alpha r_2}{2 + \alpha(r_1 + r_2)}. \quad (1)$$

其中  $\alpha$  是模型的动力学起伏强度参数,  $0 \leq \alpha \leq 1$ ,  $r_1, r_2$  是  $[0, 1]$  之间的均匀随机数. 在级联分割到第  $\nu$  代时, 相空间各元胞的几率为

$$P_k^{(\nu)} = w_i^{(1)} w_l^{(2)} \cdots w_m^{(\nu)}. \quad (i, l, m = 1, 2) \quad (2)$$

其各元胞的几率密度为

$$\varepsilon_k^{(\nu)} = \frac{P_k^{(\nu)}}{2^{-\nu}} \quad (3)$$

这个一维末态相空间可看做  $\Delta y = 1$  的快度空间.

先选取 Haar 小波, 其母函数为

$$\phi_{jk}(y) = \begin{cases} 1 & k2^{-j} \leq y \leq (k+1)2^{-j}, \\ 0 & \text{其它.} \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2^j - 1) \quad (4)$$

基本小波基函数为

$$\psi_{00}(y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq y < \frac{1}{2}, \\ -1 & \frac{1}{2} \leq y < 1, \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (5)$$

分割到  $\nu$  代时末态相空间的几率密度分布函数可依据上述母函数展开为

$$f(y) = \sum_{k=0}^{2^\nu-1} \varepsilon_k^{(\nu)} \phi_{\nu k}(y), \quad (6)$$

其中  $\varepsilon_k^{(v)}$  就是各元胞的几率密度.

使用小波变换可以推出分布函数  $f(y)$  在最后一代之前各代 ( $j = 1, 2, \dots, v-1$ ) 的分布展开情况, 这可由一系列的矩阵变换而得到.

在一般的小波变换中, 母函数  $\phi(y)$  与父函数  $\psi(y)$  之间存在如下关系<sup>[3]</sup>:

$$\begin{aligned}\phi(y) &= \sum_m c_m \phi(2y - m) \\ \psi(y) &= \sum_m (-1)^m c_{1-m} \phi(2y - m),\end{aligned}\quad (7)$$

对 Haar 小波, 在按 (4) 式的方式选择母函数之后, 上式中的系数应选为  $c_0 = 1, c_1 = 1$ , 其它都为 0. 可以推知, 在所取的第一步变换<sup>[12]</sup>

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_0^{(v-1)} \\ \varepsilon_1^{(v-1)} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2^{(v-1)}-1}^{(v-1)} \\ \tilde{\varepsilon}_0^{(v-1)} \\ \tilde{\varepsilon}_1^{(v-1)} \\ \vdots \\ \tilde{\varepsilon}_{2^{(v-1)}-1}^{(v-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 \\ a_1 & -a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & -a_0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & -a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0^{(v)} \\ \varepsilon_1^{(v)} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2^{(v-1)}-1}^{(v)} \\ \varepsilon_{2^{(v-1)}}^{(v)} \\ \varepsilon_{2^{(v-1)}+1}^{(v)} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2^{(v)}-1}^{(v)} \end{bmatrix} \quad (8)$$

中,  $a_0 = a_1 = 1/2$ . 而  $\varepsilon_k^{(v-1)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, 2^{(v-1)} - 1$ ) 正是第  $v$  代的前一代 ( $j = v-1$ )  $f(y)$  的母函数展开系数. 以此类推, 可算出  $\varepsilon_k^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, v-1; k = 0, 1, 2, \dots, 2^j - 1$ ).  $\tilde{\varepsilon}_k^{(v-1)}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, 2^{(v-1)} - 1$ ) 是小波幅, 也即父表示系数<sup>[5]</sup>.

利用上述模型及算法, 做了十万个事件的蒙特-卡罗模拟. 取  $v = 6$ , 模型参数  $\alpha = 0.8$ . 首先直接利用模型模拟计算了  $q$  阶几率矩  $C_q$  (分别取  $q = 2, 3, 4, 5$ ) 随各代窗口数  $M (M = 2^j, j = 1, 2, \dots, v)$  变化的奇异标度性.  $C_q$  的定义为

$$C_q = \frac{\langle (P_k^{(j)})^q \rangle}{\langle P_k^{(j)} \rangle^q}. \quad (9)$$

其中  $\langle \dots \rangle$  表示对窗口和事件数求平均值. 其计算结果以双对数图的形式给出在图 1(a) 中. 然后对于每一个模拟事件产生的最后一代 ( $v = 6$ ) 各元胞的几率密度  $\varepsilon_k^{(v)}$  作为几率密度分布函数  $f(y)$  的展开系数, 利用小波变换 (见 (8) 式) 计算出  $\varepsilon_k^{(j)}$  ( $j = 1, 2, \dots, v-1; k = 0, 1, 2, \dots, 2^j - 1$ ), 再模拟计算由下述公式

$$C'_q = \langle (\varepsilon_k^{(j)})^q \rangle \quad (10)$$

定义的几率矩  $C'_q$  随  $M (M = 2^j, j = 1, 2, \dots, v)$  的变化行为. 计算结果由图 1(b) 给出.

比较图 1(a) 与 (b) 可知,  $C_q, C'_q$  几乎完全是一致的, 而且都满足一维相空间的奇异标

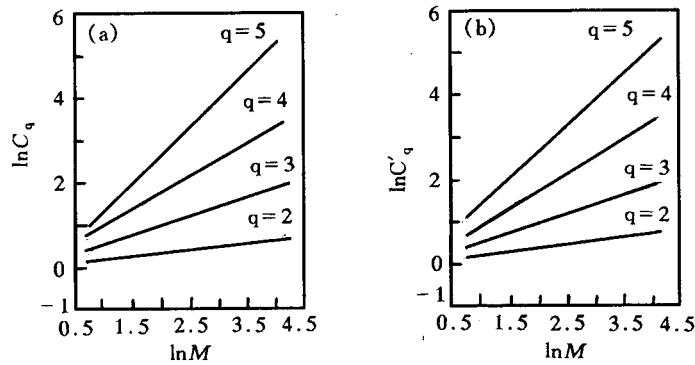


图 1 (a) 由  $\lambda = 2$  的一维  $\alpha$  模型模拟产生的  $\ln C_q$  随  $\ln M$  的变化曲线;  
(b) 由小波变换得到的  $\ln C'_q$  随  $\ln M$  的变化曲线

度性(直线行为). 这说明由小波变换完全可以推出如同  $\alpha$  模型分割那样得到的各代几率密度分布.

为了进一步证实这个结论, 取另外一种相空间分形, 即二维相空间的一维投影  $\alpha$  模型<sup>[11]</sup>做计算.

对于二维相空间自相似随机级联  $\alpha$  模型<sup>[2]</sup>, 其基元分割数  $\lambda_r = \lambda_\perp = 2$ . 基元分割几率取为

$$w_{ij} = \frac{1 + \alpha r_{ij}}{\sum_{i=1}^{\lambda_r} \sum_{j=1}^{\lambda_\perp} (1 + \alpha r_{ij})}. \quad (11)$$

待级联至最后一代得到二维相空间各元胞的几率样本之后, 做一维投影<sup>[9]</sup>, 得到一维

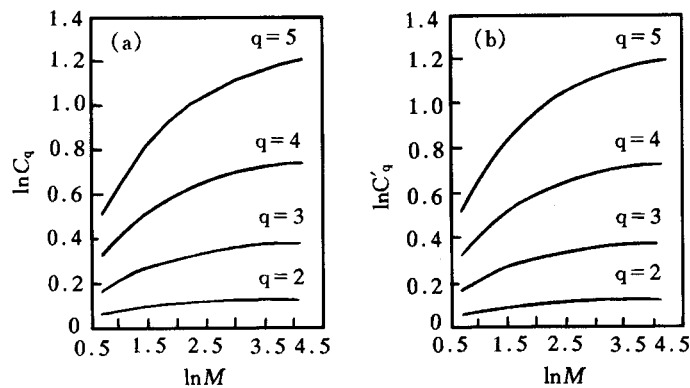


图 2 (a) 由  $\lambda = 2$  的一维投影  $\alpha$  模型模拟产生的  $\ln C_q$  随  $\ln M$  的变化曲线;  
(b) 由小波变换得到的  $\ln C'_q$  随  $\ln M$  的变化曲线

投影 $\alpha$ 模型<sup>[8]</sup>(基元分割数 $\lambda = 2$ )。然后使用与前述相同的方法对这个一维投影模型做蒙特-卡罗模拟。模拟事件数取了五万个,取动力学起伏参数为 $\alpha = 0.8$ 。直接从模型计算出的几率矩 $C_q$ 随各代窗口数 $M(M = 2^j)$ 的变换关系见图 2(a),而经由 Haar 小波变换得到的 $C'_q$ 随 $M$ 的变化关系由图 2(b)给出。

图 2(a)所示的曲线行为,正是一维投影情况下曲线饱和的情况<sup>[9]</sup>。将图 2(a)与(b)相比较,可以看出它们的一致性。这就进一步证实:当知道了最后一代的分布后,由小波变换完全可以推演出前面各代的分布情况。

这是一个很有用的结果。在多粒子产生的高能碰撞实验中,当得到多重数的实验数据后,如果要做一维几率矩的分析的话,首先将相空间分为 $M$ 个窗口(当使用 Haar 小波分析时,取 $M = 2^v$ ),然后利用小波变换即可达到目的。

### 3 小波变换在关联矩研究方面的应用

对末态相空间各窗口(bin)之间的粒子数的关联或几率密度的关联的研究,是有关多粒子产生的又一个研究方面。小波变换在研究关联矩方面有着其独特的作用。

小波变换的理论已证明<sup>[7,13]</sup>,只要小波基选择为阶梯函数(如 Haar 小波)的形式,必定有二阶小波关联矩解除小波幅之间耦合的结果。利用这一结果,可方便地研究二阶几率密度关联矩。

为了讨论简单起见,这里仍选用 Haar 小波。需要特别指出的是,本部分为了使变换矩阵 $W$ 成为正交矩阵,所使用的 Haar 小波母函数的形式不同于(4)式,而是使用了由

$$\phi_{00} = \begin{cases} 1 & 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (12)$$

压缩平移而得到的函数序列

$$\phi_{jk}(y) = 2^{j/2} \phi_{00}(2^j y - k) \quad (k = 0, 1, \dots, 2^j - 1). \quad (13)$$

取前部分所述的一维 $\alpha$ 模型,基元分割数为 $\lambda = 2$ ,待级联至最后一代( $v = 6$ )时,若将各窗口的几率密度 $\varepsilon_k^{(v)}$ 看作 $\Delta y = 1$ 的快速空间一个分布函数 $f(y)$ 的母表示系数,利用小波变换矩阵可立即得到 $f(y)$ 的父表示<sup>[5]</sup>

$$f(y) = \tilde{\varepsilon}_0^{(0)} \phi_{00}(y) + \sum_{j=0}^{v-1} \sum_{k=0}^{2^j-1} \tilde{\varepsilon}_{jk} \psi_{jk}(y), \quad (14)$$

其中 $\psi_{jk}(y)$ 是 Haar 小波基函数序列,它可通过对基本的 Haar 小波基函数(见(5)式)做压缩平移变换

$$\psi_{jk}(y) = 2^{j/2} \psi_{00}(2^j y - k) \quad (15)$$

而得到。而 $\tilde{\varepsilon}_0^{(0)}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{jk}^{(v)}$ 就是父表示系数。父表示系数与母表示系数之间经由小波变换矩阵 $W$ 联系着。分别将父、母表示系数写作矩阵 $\tilde{\rho}$ 、 $\rho$

$$\bar{\rho} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_0^{(0)} \\ \bar{\varepsilon}_{00} \\ \bar{\varepsilon}_{10} \\ \bar{\varepsilon}_{11} \\ \bar{\varepsilon}_{20} \\ \bar{\varepsilon}_{21} \\ \vdots \\ \bar{\varepsilon}_{v-1} 2^{(v-1)-1} \end{bmatrix} \quad \rho = \begin{bmatrix} \varepsilon_0^{(v)} \\ \varepsilon_1^{(v)} \\ \varepsilon_2^{(v)} \\ \varepsilon_3^{(v)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \varepsilon_{2^{(v)}-1}^{(v)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

则

$$\bar{\rho} = W\rho \quad (17)$$

其中

$$W = \tilde{A}^{(2)} \cdot \tilde{A}^{(3)} \cdots \tilde{A}^{(v-1)} \cdot A^{(v)} \quad (18)$$

而

$$A^{(v)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad (19)$$

2<sup>v</sup> × 2<sup>v</sup> 阶矩阵

$$\tilde{A}^{(j)} = \begin{bmatrix} A^{(j)} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad (20)$$

$\tilde{A}^{(j)}$  也为  $2^v \times 2^v$  矩阵,  $A^{(j)}$  为  $2^j \times 2^j$  矩阵. 这里  $I$  表示相应的单位矩阵.  
定义二阶小波关联矩

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_{00} &= \langle (\tilde{\epsilon}_0^{(0)})^2 \rangle \\ \tilde{\rho}_{(j_1 k_1)(j_2 k_2)} &= \langle \tilde{\epsilon}_{j_1 k_1} \tilde{\epsilon}_{j_2 k_2} \rangle.\end{aligned}\quad (21)$$

其中 $\langle \dots \rangle$ 表示对事件求平均. 理论证明<sup>[7,9]</sup>, 其非对角元素均为零, 即

$$\tilde{\rho}_{(j_1 k_1)(j_2 k_2)} = 0. \quad (j_1 \neq j_2, k_1 \neq k_2) \quad (22)$$

利用上述的模型和算法, 做了二十万个事件的蒙特卡罗模拟, 得到: 非对角元素数值上要比对角元素小三至四个数量级. 与理论预言完全吻合. 表 1 列出了对角元素的部分计算结果, 其它未被列出的对角元素的数值, 可按下述规律对照表 1 得到:

$$\tilde{\rho}_{(jk)(jk)} = \tilde{\rho}_{(j0)(j0)}. \quad (k = 0, 1, \dots, 2^j - 1) \quad (23)$$

在计算结果中, 精确到小数第四位该公式仍成立.

表1 二阶小波关联矩的部分计算结果

$\tilde{\rho}_{00}$	64.0000	$\tilde{\rho}_{(30)(30)}$	2.1202
$\tilde{\rho}_{(00)(00)}$	10.6942	$\tilde{\rho}_{(40)(40)}$	1.2393
$\tilde{\rho}_{(10)(10)}$	6.2434	$\tilde{\rho}_{(50)(50)}$	0.7208
$\tilde{\rho}_{(20)(20)}$	3.6664		

由于选用了(20)式作 Haar 小波的母函数, 故这里得到的小波关联矩在数值上、所遵从的规律上都不同于文献 [7] 的结果.

为了叙述方便起见, 将 $\tilde{\rho}_{(j_1 k_1)(j_2 k_2)}$ 下脚标 $(j_1 k_1)$ 、 $(j_2 k_2)$ 分别写作 $i_1$ 、 $i_2$  ( $i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots, 2^v - 1$ ). 以 $\tilde{\rho}_{i_1 i_2}$ 作为矩阵 $\tilde{\rho}$ 的元素.

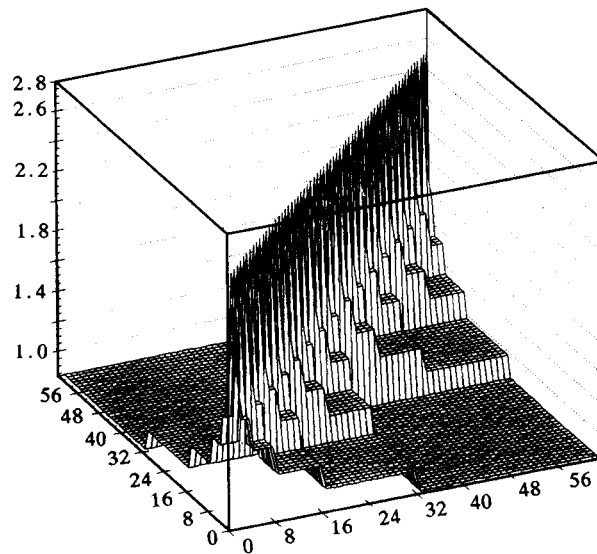


图3 经由变换式(25)得到的二阶普通关联矩

普通二阶几率密度关联矩的定义为

$$\rho_{k_1 k_2} = \langle \varepsilon_{k_1}^{(\nu)} \varepsilon_{k_2}^{(\nu)} \rangle. \quad (24)$$

以  $\rho_{k_1 k_2}$  作为矩阵  $\rho$  的元素.

根据文献 [7], 可以推出

$$\rho = W^{-1} \bar{\rho} W \quad (25)$$

图 3 是经由变换式 (25) 式计算出的二阶普通关联矩. 图中反映了二阶关联矩复杂的关联关系. 其基本规律是两窗口越靠近, 其关联越强. 但仔细分析可以发现, bin-bin 关联在级联树图中仅依赖于这两 bin 到其公共根的级联步数.

由上面的计算可以看出, 只要知道末态相空间的几率密度分布, 就可得到其父表示系数, 即小波幅, 直接对小波幅平方, 即可得到二阶小波关联矩的对角矩阵表示, 通过变换式 (25) 立刻得到较为复杂的二阶关联矩.

## 4 结论

本文利用随机级联模型, 对小波变换在多粒子末态相空间分析中的应用进行了研究, 得到的结论如下:

(1) 把多粒子末态相空间划分为  $M$  个窗口 ( $M = 2^\nu$ ,  $\nu$  为整数), 实验上可直接测出各窗口的几率密度分布. 此时可以把该几率密度分布看作由基元分割数为  $\lambda = 2$ , 级联代数为  $\nu$  的  $\alpha$  模型级联而得到. 而以前各代 ( $j = 1, 2, \dots, \nu - 1$ ) 各窗口的几率密度可直接由小波变换得出, 据此可对几率矩做出反常标度分析. 关于这一点, 文中利用不同分形的  $\alpha$  模型做了论证.

(2) 利用小波变换矩阵, 可方便地进行分布函数的母表示与父表示之间的变换. 由于按父表示定义的小波关联关系比较简单, 因而可以先计算这个关联矩, 然后再通过小波变换而得到较为复杂的普通关联矩, 进而达到研究末态相空间 bin-bin 关联的目的.

小波变换是一种很有用的数学工具, 期望本文提出的方法, 在碰撞多粒子产生研究方面起到有益的作用.

## 参 考 文 献

- [1] Bialas A, Peschanski R. Nucl. Phys., 1986, **B275**:703—718; 1988, **B308**:857—867
- [2] Wu Yuanfang, Liu Lianshou. Phys. Rev. Lett., 1993, **70**:3197—3200
- [3] Daubechies I. Comm. Pure. Appl. Math., 1988, **41**:909—996
- [4] Wu Yuanfang, Zhang Kunshi, Liu Lianshou. Chinese Science Bulletin, 1991, **36**(13):1077—1080
- [5] Huang Zheng, Sarcevic I, Thews R et al. Phys. Rev., 1996, **D54**:750—758
- [6] Greiner M, Lipa P, Carruthers P. Wavelet Correlation in the p-model. Preprint HEPHY-PUB 587 / 93(1993)
- [7] Greiner M, Giesemann J, Lipa P et al. Wavelet Correlation in Hierarchical Branching Processes. Preprint HEPHY-PUM 618 / 95(1995)
- [8] Lin Hai, Liu Lianshou. Chinese Science Bulletin (in Chinese), 1995, **40**(6):502—505  
(林海, 刘连寿. 科学通报, 1995, **40**(6):502—505)



- [9] Lin Hai, Liu Lianshou. High Energy Physics and Nuclear Physics (in Chinese), 1997, **21**(6):513—522  
(林海,刘连寿. 高能物理与核物理, 1997, **21**(6):513—522)
- [10] Ochs W. Phys. Lett., 1990, **B247**(1):101—109
- [11] Lin Hai, Liu Lianshou. High Energy Physics and Nuclear Physics (in Chinese), 1996, **20**(7):625—634  
(林海,刘连寿. 高能物理与核物理, 1996, **20**(7):625—634)
- [12] Lin Hai, Zhang Yang, Liu Lianshou. High Energy Physics and Nuclear Physics (in Chinese), 1996, **20**(1):  
65—75  
(林海,张阳,刘连寿. 高能物理与核物理, 1996, **20**(1):65—75)
- [13] Press W H, Teukolsky S A, Vetterling W T et al. In Numerical Recipes. 2nd ed. Cambridge England:  
Cambridge University Press, 1992. 584—599

## Application of Wavelet Transformation in Analysis of Multiplicity Phase Space \*

Lin Hai

(Physics Department, Yanbei Teacher's College, Datong 037000)

Liu Lianshou

(Institute of Particle Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430079)

**Abstract** Using the wavelet transformation, the probability distribution for the multiplicity phase space which is obtained by simulation from random cascading  $\alpha$  model is discussed. We find that using the wavelet transformation the probability moments and the correlation moments for the experimental data of the multiplicity phase space probability distribution can be directly analysed. An actual calculation method is suggested.

**Key words** high energy collision, wavelet transformation, Monte Carlo simulation, random cascading model, correlation moments