

有限温度下胶子场三圈真空图中的 红外发散*

陈相君

(哈尔滨工业大学物理系 哈尔滨 150001)

刘连寿

(华中师范大学粒子物理研究所 武汉 430079)

摘要 用热传播子的实时形式对有限温度下胶子场的三圈真空图进行了详细的计算,在维数正规化方案下把真空图中的红外发散全部孤立出来了。

关键词 有限温度场 胶子场 真空图 红外发散

1 引言

在有限温度场的微扰计算中,真空图对应着场的热力学势^[1].因此,人们注重真空图的计算.在胶子场的三圈真空图中,存在严重的红外发散,使QCD的微扰计算得到破坏^[2,3].解决场论中的红外发散是一个非常复杂非常困难的事情.在一些过程中,曾用软胶子辐射的方法解决其中存在的红外发散^[4,5].但是,这里是真空图,不能用这种方法解决.按照重整化去掉发散的步骤,首先要对发散积分进行正规化,把发散分离出来,然后才能去掉它.本文的目的是用热传播子的实时形式对有限温度胶子场的三圈真空图进行详细的计算,按照维数正规化的方案把图中的红外发散全部孤立出来,为最后消除它们打下基础.

2 胶子场的费曼规则和红外发散积分的正规化

胶子场的三圈真空图有六个,见图1(每个图下面的数字是对称因子).用温度格林函数的实时形式进行计算,为了简单,取费曼规范,其热传播子为^[6]

$$iD_{\mu\nu}^{ab} = -\delta^{ab}g_{\mu\nu}\left(\frac{i}{k^2+i\eta} + \frac{2\pi\delta(k^2)}{e^{\beta|k_0|}-1}\right), \quad (1)$$

1997-01-31收稿

* 国家自然科学基金资助

其中 $\delta_k = \frac{\alpha(k^2)}{e^{\beta|k_0|} - 1}$. (1)式右边的第二项是热传播子的有限温度部分.

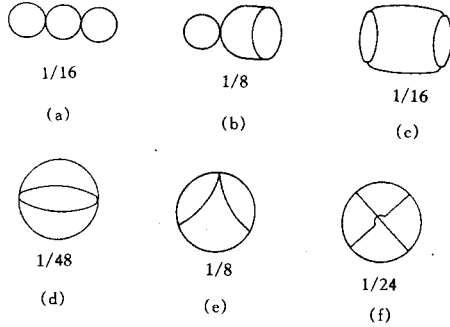


图1 胶子场的三圈真空图

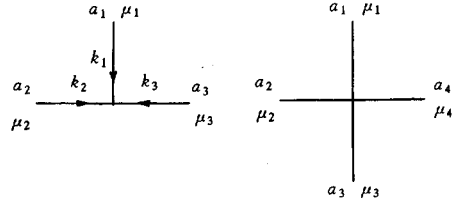


图2 胶子场的三线 and 四线顶角

胶子场存在自相互作用, 在它的费曼规则(见图 2)中有三线顶角函数和四线顶角函数, 它们分别是

$$gf^{a_1 a_2 a_3} V_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(k_1 k_2 k_3), \quad V_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}(k_1 k_2 k_3) = (k_1 - k_2)_{\mu_3} g_{\mu_1 \mu_2} + (k_2 - k_3)_{\mu_1} g_{\mu_2 \mu_3} + (k_3 - k_1)_{\mu_2} g_{\mu_3 \mu_1}, \quad (2)$$

和

$$-ig^2 W_{\mu_1 \dots \mu_4}^{a_1 \dots a_4}, \quad W_{\mu_1 \dots \mu_4}^{a_1 \dots a_4} = (f^{13,24} - f^{14,32}) g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} + (f^{12,34} - f^{14,23}) g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} + (f^{13,42} - f^{12,34}) g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} \quad (3)$$

其中拉丁字母代表色脚标, 希腊字母表示时空脚标, $f^{ij,kl} = f^{a_i a_j a_k a_l}$, $f^{a_i a_j a}$ 是 $SU(N)$ 群的结构参数.

要孤立红外发散, 首先要找出红外发散积分并对它们进行正规化. 热传播子的有限温度部分含有 δ 函数和玻色-爱因斯坦因子, 有限温度下真空图中的红外发散就和这两个因子有关. $\delta(k^2)$ 使动量满足质壳关系, 由于胶子场是无质量场, k_0 积分后, 关于 k 的积分会出现下面形式:

$$I_p = \int_0^\infty dt \frac{t^{Z-1}}{e^t - 1}, \quad \text{Re}Z < 1. \quad (4)$$

由于 $t \rightarrow 0$ 是被积函数的奇点, 这个积分是红外发散的. 被积函数中含玻色-爱因斯坦因子, 它是有限温度下的红外发散. 另外, 这里是三圈图, 计算中会碰到两个动量的点乘, 因此要做角度积分. 碰到的角度积分的一般形式为

$$I_\theta = \int d\Omega \frac{1}{(1 - \cos\theta)^N}, \quad N \geq 1. \quad (5)$$

它是发散的, 因为 $\theta = 0$ 是被积函数的奇点. 这类发散叫共线发散, 也属于红外发散.

这两类积分都需要正规化. 文献 [7] 讨论了 I_p 的正规化, 给出了它的解析延拓表达式, 其表达式为

$$\int_0^\infty dt \frac{t^{Z-1}}{e^t - 1} = \frac{1}{Z-1} - \frac{1}{2Z} + \sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!(2n+Z-1)} + \int_1^\infty dt \frac{t^{Z-1}}{e^t - 1}, \quad (6)$$

其中 B_n 是 Bernoulli 数, $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, \dots .

文献 [8] 讨论了 I_θ 的正规化, 它的解析延拓表达式为

$$I_\theta = \frac{2\pi}{2^{N-1+\epsilon}} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)\Gamma\left(1 - N - \frac{\epsilon}{2}\right)}{\Gamma(2 - N - \epsilon)}. \quad (7)$$

它还有一个渐近形式

$$I = \int d\Omega \frac{1}{(1 - \cos\theta)^N} \sim 2\pi \int_0^1 \frac{\theta^{1-\epsilon} d\theta}{(\theta^2/2)^N} = 2\pi \frac{2^N}{2 - 2N - \epsilon}. \quad (8)$$

有时用它比较方便. 在以下的计算中, 就应用 (6) 式和 (7) 式或 (8) 式把红外发散分离出来.

3 胶子场真空图中的红外发散

整个计算是在维数正规化的方案下进行. 维数正规化方案对于无质量场有下面规定^[9]:

$$I \equiv \int d^D k \frac{1}{(k^2 + i\eta)^\alpha} = 0, \quad (\alpha > 0). \quad (9)$$

由于胶子场是无质量场, 在计算中要用到它.

对应图 1 中六个费曼图的计算分别为

$$I_a = \frac{(-ig^2)^2}{16} \int \frac{d^D p d^D q d^D k}{(2\pi)^{3D}} \left(\frac{i}{p^2 + i\eta} + 2\pi\delta_p \right) \left(\frac{i}{q^2 + i\eta} + 2\pi\delta_q \right) \left(\frac{i}{k^2 + i\eta} + 2\pi\delta_k \right)^2 N_a,$$

$$N_a = (-1)^4 W_{1234}^{1234} W_{1'2'3'4'}^{1'2'3'4'} g_{14} g_{1'2'} g_{24'} g_{33'} \delta^{14} \delta^{1'2'} \delta^{24'} \delta^{33'} = 108G, \quad (10)$$

其中 $\delta_p = \frac{\delta(p^2)}{e^{\beta|p_0|} - 1}$, $G = C_N^2 \delta_{aa} = N^2(N^2 - 1)$, $f^{abc} f^{a'bc} = \delta_{aa'} C_N$. 以上把色脚标和时空脚标全用数字代替, 只要仔细, 不会混乱.

$$I_b = \frac{-ig^4}{8} G \int \frac{d^D p d^D q d^D k}{(2\pi)^{3D}} \left(\frac{i}{p^2 + i\eta} + 2\pi\delta_p \right) \left(\frac{i}{q^2 + i\eta} + 2\pi\delta_q \right) \times \left(\frac{i}{(q+k)^2 + i\eta} + 2\pi\delta_{q+k} \right) \left(\frac{i}{k^2 + i\eta} + 2\pi\delta_k \right)^2 N_b, \quad (11)$$

$$N_b = (-1)^5 W_{1234}^{1234} f^{2'4'1'} V_{2'4'1'}(k, -q-k, q) f^{3'56} V_{3'56}(-k, -q, q+k) \times g_{22'} \delta^{22'} g_{33'} \delta^{33'} g_{14} \delta^{14} g_{1'5} \delta^{1'5} g_{4'6} \delta^{4'6} = -108G(q^2 + q \cdot k + k^2), \quad (12)$$

$$I_c = \frac{g^4}{16} \int \frac{d^D p d^D q d^D k}{(2\pi)^{3D}} \left(\frac{i}{p^2 + i\eta} + 2\pi\delta_p \right) \left(\frac{i}{q^2 + i\eta} + 2\pi\delta_q \right) \left(\frac{i}{k^2 + i\eta} + 2\pi\delta_k \right)^2 \times \left(\frac{i}{(p+k)^2 + i\eta} + 2\pi\delta_{p+k} \right) \left(\frac{i}{(q+k)^2 + i\eta} + 2\pi\delta_{q+k} \right) N_c,$$

$$N_c = (-1)^6 f^{123} V_{123}(-k, -q, q+k) f^{43'2'} V_{43'2'}(k, -q-k, q) f^{4'5'6'} V_{4'5'6'}(-k, p+k, -p) \times f^{1'65} V_{1'65}(k, p, -p-k) \delta^{11'} g_{11'} \delta^{22'} g_{22'} \delta^{33'} g_{33'} \delta^{44'} g_{44'} \delta^{55'} g_{55'} \delta^{66'} g_{66'} =$$

$$G(100(p \cdot q)^2 + 100p \cdot q(p \cdot k + q \cdot k) - 20((p \cdot k)^2 + (q \cdot k)^2) + 56p^2q^2 + 56(p \cdot kq^2 + q \cdot kp^2) + 50p \cdot qk^2 + 106p \cdot kq \cdot k + 86(p^2 + q^2)k^2 + 66(p \cdot k + q \cdot k)k^2 + 84(k^2)^2), \quad (13)$$

$$I_d = \frac{(-ig^2)^2}{48} \int \frac{d^D p d^D q d^D k}{(2\pi)^{3D}} \left(\frac{i}{p^2 + i\eta} + 2\pi\delta_p \right) \left(\frac{i}{q^2 + i\eta} + 2\pi\delta_q \right) \times \\ \left(\frac{i}{k^2 + i\eta} + 2\pi\delta_k \right) \left(\frac{i}{(p+q+k)^2 + i\eta} + 2\pi\delta_{p+q+k} \right) N_d, \\ N_d = (-1)^4 W_{4321}^{4321} W_{1'2'3'4'}^{1'2'3'4'} g_{11'} \delta^{11'} g_{22'} \delta^{22'} g_{33'} \delta^{33'} g_{44'} \delta^{44'} = 108G, \quad (14)$$

$$I_e = \frac{-ig^4}{8} \int \frac{d^D p d^D q d^D k}{(2\pi)^{3D}} \left(\frac{i}{p^2 + i\eta} + 2\pi\delta_p \right) \left(\frac{i}{q^2 + i\eta} + 2\pi\delta_q \right) \left(\frac{i}{k^2 + i\eta} + 2\pi\delta_k \right) \times \\ \left(\frac{i}{(p+k)^2 + i\eta} + 2\pi\delta_{p+k} \right) \left(\frac{i}{(q+k)^2 + i\eta} + 2\pi\delta_{q+k} \right) N_e, \\ N_e = (-1)^4 W_{4567}^{4567} f^{123} V_{123}(-p-k, k, p) f^{1'2'3'} V_{1'2'3'}(q+k, -k, -q) \\ \delta^{14} g_{14} \delta^{35} g_{35} \delta^{22'} g_{22'} \delta^{1'6} g_{1'6} \delta^{3'7} g_{3'7} = \frac{81}{2} k^2 G, \quad (15)$$

$$I_f = \frac{g^4}{24} \int \frac{d^D p d^D q d^D k}{(2\pi)^{3D}} \left(\frac{i}{p^2 + i\eta} + 2\pi\delta_p \right) \left(\frac{i}{q^2 + i\eta} + 2\pi\delta_q \right) \left(\frac{i}{k^2 + i\eta} + 2\pi\delta_k \right) \times \\ \left(\frac{i}{(p+k)^2 + i\eta} + 2\pi\delta_{p+k} \right) \left(\frac{i}{(q+k)^2 + i\eta} + 2\pi\delta_{q+k} \right) \times \\ \left(\frac{1}{(p+q+k)^2 + i\eta} + 2\pi\delta_{p+q+k} \right) N_f, \\ N_f = (-1)^6 f^{123} V_{123}(q+k, p, -p-q-k) f^{456} V_{456}(-p-k, p+q+k, -q) \times \\ f^{1'2'3'} V_{1'2'3'}(-q-k, q, k) f^{4'5'6'} V_{4'5'6'}(p+k, -k, -p) = \\ G(-3(p \cdot q)^2 - 3p \cdot qp \cdot k - 3(p \cdot k)^2 + 30p^2q^2 + 30p \cdot kq^2 + 30p^2q \cdot k - \\ 3p \cdot qq \cdot k + 54p \cdot kp \cdot k - 3(q \cdot k)^2 + 30p^2k^2 + 27p \cdot qk^2 + \\ 54p \cdot kk^2 + 30q^2k^2 + 54q \cdot kk^2 + 27(k^2)^2). \quad (16)$$

把上述 6 个式子中的括号打开并和相应的 N_i 相乘后加起来, 共有 2000 多项. 去掉给出虚部的项也有 1000 多项. 因此, 计算很繁重且乏味. 稍微简单的一个方法(见附录)是把 N_i 按热传播子的零温部分相乘后分母中的相乘因子展开, 化简每一个 I_i , 然后再分零温部分(被积函数中不含热传播子的有限温度部分)和有限温度部分(被积函数中至少含一个热传播子的有限温度部分)计算. 有限温度部分计算时, 由于存在 δ 函数, 比较容易看出那些项为 0. 经过冗长的计算发现, 零温部分和含有一个热传播子有限温度部分的项中, 每一项都出现积分

$$\int \frac{d^D p}{(2\pi)^D} \frac{1}{(p^2)^\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad (17)$$

按照(9)式, 它为 0. 含有 4 个和 6 个热传播子有限温度部分的项给出虚部, 不考虑. 含有

5 个热传播子有限温度部分的项在计算中会含有

$$f(x)\delta(f(x)), \quad (18)$$

因而也为 0. 在图 1 中的前三个费曼图, 都含有同一动量的两个热传播子. 因此会出现 $\delta^2(k^2)$ 的奇异性. 有些含 $\delta^2(k^2)$ 奇异性的项给出虚部不考虑. 给出实部的项只有几个, 且在计算时会出 (19) 式, 所以也为 0. 另外还有

$$\frac{2}{k^2 + i\eta} \delta(k^2) \quad (19)$$

型的奇异性, 它可用下面恒等式把它去掉^[9]

$$\frac{2}{k^2 + i\eta} \delta(k^2) = \frac{\partial}{\partial k^2} \delta(k^2) + 2\pi i \delta^2(k^2). \quad (20)$$

含有 2 个和 3 个热传播子有限温度部分并给出实部的项如下

$$I_a = 9g^4 G(I_1 + I'_1), \quad (21)$$

$$I_b = \frac{27}{2} g^4 G(I_1 + I'_1 + 2I_2), \quad (22)$$

$$I_c = -\frac{1}{16} g^4 G(106I_1 - 184I_2 - 400I_3 - 200I_4 + 65I_5 + 128I_6 - 32I_7 - 207I_8 + 106I'_1 + 400I'_2 - 128I'_3 + 64I'_4 - 207I'_5), \quad (23)$$

$$I_d = \frac{27}{2} g^4 GI_8 - 9g^4 GI'_5, \quad (24)$$

$$I_e = -\frac{243}{8} g^4 GI_8 + \frac{81}{4} g^4 GI'_5, \quad (25)$$

$$I_f = -\frac{1}{24} g^4 G(13.5I_6 + 189I_9 + 85.5I_5 + 18I_7 + 112.5I_{10} + 4.5I_{11} - 92.25I_2 - 162I_8 + 61.5I'_3 - 10.5I'_4 + 152.25I'_5), \quad (26)$$

其中

$$I_1 = \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D-2}} \frac{1}{k^4} \delta_p \delta_q = 0, \quad (27)$$

$$I_2 = \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D-2}} \frac{1}{k^2(k+p)^2} \delta_p \delta_q = 0, \quad (28)$$

$$I_3 = \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D-2}} \frac{(p \cdot q)^2}{k^2(k+p)^2(k+q)^2} \delta_p \delta_q = -\frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{1}{12\beta^2} \right)^2 \frac{1}{\epsilon} + \dots, \quad (29)$$

$$I_4 = \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D-2}} \frac{(p \cdot k)^2}{k^2(k+p+q)^2(p+q)^4} \delta_p \delta_q = \frac{i}{3 \cdot 2^5 \pi^2} \left(\frac{1}{12\beta^2} \right)^2 \frac{1}{\epsilon'} + \dots, \quad (30)$$

$$I_5 = \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D-2}} \frac{p \cdot q}{k^2(k+p)^2(k+q)^2} \delta_p \delta_q = -2 \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{1}{12\beta^2} \right)^2 \frac{1}{\epsilon^2} + \dots, \quad (31)$$

$$I_6 = \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D-2}} \frac{p \cdot k}{k^2(k+q)^2(p+q)^2} \delta_p \delta_q = 0, \quad (32)$$

$$I_7 = \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D-2}} \frac{p \cdot k}{k^2(k+p+q)^2(p+q)^2} \delta_p \delta_q = -\frac{1}{4} \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{1}{12\beta^2} \right)^2 \frac{2}{\epsilon'} + \dots, \quad (33)$$

$$I_8 = \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D-2}} \frac{1}{k^2(k+p+q)^2} \delta_p \delta_q = \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{1}{12\beta^2} \right)^2 \frac{2}{\epsilon'} + \dots, \quad (34)$$

$$I_9 = \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D-2}} \frac{q \cdot k}{k^2(k+p)^2(k+p+q)^2} \delta_p \delta_q = -2 \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{1}{12\beta^2} \right)^2 \frac{1}{\epsilon^2} + \dots, \quad (35)$$

$$I_{10} = \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D-2}} \frac{p \cdot q}{k^2(k+p)^2(k+p+q)^2} \delta_p \delta_q = -2 \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{1}{12\beta^2} \right)^2 \frac{1}{\epsilon^2} + \dots, \quad (36)$$

$$I_{11} = \int \frac{d^D p d^D q}{(2\pi)^{2D-2}} \frac{q \cdot k}{k^2(k+q)^2(k+p+q)^2} \delta_p \delta_q = \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{1}{12\beta^2} \right)^2 \frac{1}{\epsilon} + \dots, \quad (37)$$

$$I'_1 = -i \int \frac{d^D p d^D q d^D k}{(2\pi)^{3D-3}} \frac{2}{k^2 + i\eta} \delta_p \delta_q \delta_k = \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{1}{12\beta^2} \right)^2 \frac{2}{\epsilon} + \text{finite}, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} I'_2 &= i \int \frac{d^D p d^D q d^D k}{(2\pi)^{3D-3}} \frac{(p \cdot q)^2}{(p+k)^4(p+q+k)^2} \delta_p \delta_q \delta_k \\ &= \frac{i}{2^7 \pi^6} \left(\frac{1}{12\beta^2} \right) \int_0^\infty dp dq n_p n_q q^2 \left[\frac{1}{a_-^2} - \frac{1}{a_+^2} + 2pq \left(\frac{1}{a_-^4} + \frac{1}{a_+^4} \right) \right] \frac{1}{\epsilon} + \dots, \end{aligned} \quad (39)$$

其中 $n_p = 1 / (e^{\beta p} - 1)$, $a_\pm = p \pm q$,

$$I'_3 = i \int \frac{d^D p d^D q d^D k}{(2\pi)^{3D-3}} \frac{p \cdot q}{(p+k)^2(q+k)^2} \delta_p \delta_q \delta_k = -2 \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{1}{12\beta^2} \right)^2 \frac{1}{\epsilon^2} + \dots, \quad (40)$$

$$\begin{aligned} I'_4 &= i \int \frac{d^D p d^D q d^D k}{(2\pi)^{3D-3}} \frac{p \cdot q}{(p+k)^2(p+q+k)^2} \delta_p \delta_q \delta_k = \\ &= -\frac{i}{2^5 \pi^4} \left(\frac{1}{12\beta^4} \right) \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{i}{2^7 \pi^4} \left(\frac{1}{12\beta^4} \right) \frac{1}{\epsilon} + \dots, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} I'_5 &= i \int \frac{d^D p d^D q d^D k}{(2\pi)^{3D-3}} \frac{1}{(p+q+k)^2} \delta_p \delta_q \delta_k = \frac{i}{2^7 \pi^6} \int_0^\infty dp dq dk n_p n_q n_k \times \\ &= [(p+q+k) \ln|2(p+q+k)| + (p-q-k) \ln|2(p-q-k)| - \\ &= (p+q-k) \ln|2(p+q-k)| - (p-q+k) \ln|2(p-q+k)|]. \end{aligned} \quad (42)$$

在以上等式中, 用 $1/\epsilon'$ 表示紫外发散, 以区别于红外发散. 以上计算, 被积函数是动量积

分和角度积分分离的,可直接应用(6)式和(7)式;对于被积函数是动量积分和角度积分交缠的,要找出奇点附近的函数渐近形式,然后用正规化公式.

在含有两个热传播子有限温度部分的项中, $I_3, I_5, I_9, I_{10}, I_{11}$ 中,都含有红外发散.这些红外发散来自被积函数中零温部分的积分.这部分的红外发散有的高达 ϵ^{-2} ,这是因为费曼参数化积分有两个参数,每一个参数都发散.

在含有三个热传播子有限温度部分的项中, I'_1, I'_2, I'_3 和 I'_4 中都含一个动量的红外发散.另外 I'_3 和 I'_4 还含有一个角度的共线发散,因而发散的最高次幂也是 ϵ^{-2} .

把所有项加起来,只给出红外发散部分,得

$$I_a + \dots + I_f = \frac{i}{16\pi^2} \left(\frac{1}{12\beta^2} \right)^2 g^4 G \left[\left(6.56 + \frac{5.34}{\pi^2} \right) \frac{1}{\epsilon} + \left(37.38 + \frac{21.38}{\pi^2} \right) \frac{1}{\epsilon^2} \right] - \frac{25i}{2^7\pi^4} \left(\frac{1}{12\beta^2} \right) \int_0^\infty dp dq n_p n_q q^2 \left[\frac{1}{a_-^2} - \frac{1}{a_+^2} + 2pq \left(\frac{1}{a_-^4} + \frac{1}{a_+^4} \right) \right] \frac{1}{\epsilon} + \dots \quad (43)$$

4 结束语

本文用温度格林函数的实时形式对胶子场的三圈真空图进行了详细的计算,指出了其中有限温度下红外发散积分的类型,并按照维数正规化方案把红外发散全部孤立出来了.从中知道,有限温度下红外发散的性质仍是红外发散和共线发散.由于是高圈计算,交缠发散比较严重,发散的最高次幂达 ϵ^{-2} .

本文虽然通过详细地计算把胶子场真空图中的红外发散分离出来了,但是如何消除真空图中的红外发散,还有待于进一步研究.

作者感谢藤本泰博士的帮助和王恩科博士的部分工作.

参 考 文 献

- [1] Kapusta J I. Finite Temperature Field Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1989, 44—46
- [2] Linda A D. Phys. Lett., 1980, B96: 2893—2907
- [3] Gross D J, Pisarski R D, Yaffe L G. Rev. Mod. Phys., 1981, 53: 43—55
- [4] Toyoda T. Ann. Phys., 1982, 141: 154—178
- [5] Field R D. Applications of Perturbative QCD. New York: Addison-Wesley, 1989, 31—37
- [6] Fujimoto Y, Yamada H. Phys. Lett., 1987, B195: 231—234
- [7] Chen Xiangjun, Liu Lianshou. High Energy Physics and Nuclear Physics (in Chinese), 1997, 21 (5): 425—432
(陈相君, 刘连寿. 高能物理与核物理, 1997, 21(5): 425—432)
- [8] Chen Xiangjun, Liu Lianshou. High Energy Physics and Nuclear Physics (in Chinese), 1995, 19(10): 907—915
(陈相君, 刘连寿. 高能物理与核物理, 1995, 19: 907—915)
- [9] Dai Yuanben. Gauge Theory of Interaction (in Chinese). Beijing: Academic Press, 1987, 181—187
(戴元本. 相互作用的规范理论. 北京: 科学出版社, 1987)

附录

以 I_c 中的一项来说明如何进行化简. 先化简 N_c ,

$$\begin{aligned}
 N_c &= (-1)^6 f^{123} V_{123}(-k, -q, q+k) f^{43'2'} V_{43'2'}(k, -q-k, q) f^{4'5'6'} V_{4'5'6'}(-k, p+k, -p) \times \\
 &\quad f^{1'65'} V_{1'65'}(k, p, -p-k) \delta^{11'} g_{11'} \delta^{22'} g_{22'} \delta^{33'} g_{33'} \delta^{44'} g_{44'} \delta^{55'} g_{55'} \delta^{66'} g_{66'} = \\
 &\quad G[100(p \cdot q)^2 + 100p \cdot q(p \cdot k + q \cdot k) - 20((p \cdot k)^2 + (q \cdot k)^2) + 56p^2q^2 + 56(p \cdot kq^2 + \\
 &\quad q \cdot kp^2) + 50p \cdot qk^2 + 106p \cdot kq \cdot k + 86(p^2 + q^2)k^2 + 66(p \cdot k + q \cdot k)k^2 + 84(k^2)^2] = \\
 &\quad G\left\{100(p \cdot q)^2 + 100p \cdot q[(p+k)^2 + (q+k)^2 - p^2 - q^2 - k^2] + \frac{53}{2}p^2q^2 - \right. \\
 &\quad \left. 5[(p+k)^4 + (q+k)^4] - 5p^4 - 5q^4 + \frac{69}{2}k^4 + 10(p+k)^2p^2 + 10(q+k)^2q^2 + \right. \\
 &\quad \left. \frac{33}{2}[(p+k)^2 + (q+k)^2]k^2 + \frac{83}{2}(p^2 + q^2)k^2\right\}. \tag{A1}
 \end{aligned}$$

在 I_c 中有一项为

$$\begin{aligned}
 I &= \int \frac{d^D p d^D q d^D k}{(2\pi)^{3D-2}} \frac{N_c}{p^2 q^2 k^4} \delta_{p+k} \delta_{q+k} = G \int \frac{d^D p d^D q d^D k}{(2\pi)^{3D-2}} \frac{\delta_{p+k} \delta_{q+k}}{p^2 q^2 k^4} \left\{100(p \cdot q)^2 - 50p \cdot q(p^2 + q^2 + k^2) + \right. \\
 &\quad \left. \frac{53}{2}p^2q^2 - 5(p^4 + q^4) + \frac{69}{2}k^4 + \frac{83}{2}(p^2 + q^2)k^2 + \frac{109}{2}p^2q^2\right\}. \tag{A2}
 \end{aligned}$$

做变量代换 $p+k \rightarrow -p, q+k \rightarrow -q$ 后, 上式可化简为

$$\begin{aligned}
 I &= G \int \frac{d^D p d^D q d^D k}{(2\pi)^{3D-2}} \delta_p \delta_q \left[100 \frac{(p \cdot q)^2}{(p+k)^2(q+k)^2k^4} - 50 \frac{p \cdot q}{(p+k)^2(q+k)^2k^2} + \right. \\
 &\quad \left. \frac{69}{2} \frac{1}{(p+q+k)^2k^2}\right] = G \left[100I_3 - 50I_5 + \frac{69}{2}I_8\right]. \tag{A3}
 \end{aligned}$$

其它项也可用类似的方法进行化简.

Infrared Divergences of Three-Loop Vacuum Graphs of Gluon Field at Finite Temperature

Chen Xiangjun

(Department of Physics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001)

Liu Lianshou

(Institute of Partical Physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430079)

Abstract The kinds of infrared divergent integrals in three-loop vacuum graphs of gluon field at finite temperature are pointed out and their regularization is discussed. All of the infrared divergences in three-loop vacuum graphs of gluon field are isolated.

Key words finite temperature field, gluon field, vacuum graph, infrared divergence