

对称性对总自旋为 1/2 的三费米体系结构的影响*

解文方

鲍诚光

(广东工业大学物理教研室, 广州 510090)

(中山大学物理系 广州 510275)

1994-12-12 收稿

摘 要

揭示了量子力学对称性对总自旋 s 为 $1/2$ 的三费米子体系结构的决定性影响.

关键词 对称性, 自旋, 三费米子, 微观结构

众所周知, 对称性是决定微观粒子体系 (原子, 分子, 原子核) 结构的重要因素. 我们已经讨论了三玻色子系统^[1] 和自旋 $s=3/2$ 的三费米子体系^[2]. 本文将进一步讨论总自旋 $s=1/2$ 的三费米子体系.

令 ψ_{LM} 为全反对称化的本征解, 可展为

$$\psi_{LM} = \sum_{s=0}^1 \chi_{1/2}^s \sum_{i_1 i_2} f_{i_1 i_2}^s(\mathbf{r}\mathbf{R}) [Y_{i_1}(\hat{r}) Y_{i_2}(\hat{R})]_{LM}, \quad (1)$$

$$\chi_{1/2}^s = [(\xi(1)\xi(2))_s \xi(3)]_{1/2}. \quad (2)$$

其中 \mathbf{r}, \mathbf{R} 是三体 Jacobi 坐标 (见图 1), L, M 是总轨道角动量及其分量, $\xi(i)$ 为单个粒子的自旋态.

虽然体系相互作用势不依赖于自旋, 但粒子的关联却与自旋取向有关. 由于实验完全可以分辨粒子的自旋取向, 所以将波函数重新作如下展开

$$\psi_{LM} = \sum_{\mu_1 \mu_2} f_{\mu_1 \mu_2}^{LM}(\mathbf{r}\mathbf{R}) \xi_{\mu_1}(1) \xi_{\mu_2}(2) \xi_{\mu_3}(3), \quad (3)$$

其中

$$\mu_3 = M_s - \mu_1 - \mu_2,$$

μ_i 是第 i 个粒子自旋的 Z 分量, M_s 是总自旋的 Z 分量. 我们仅限于考察 $M_s = 1/2$ 的态, 即有两个粒子自旋朝上, 一个朝下. 此时 (3) 式右方共有三个分量 $f_{1/2 1/2}^{LM}, f_{1/2 -1/2}^{LM}, f_{-1/2 1/2}^{LM}$. 由于波函数是全反对称的, 可知包含在各个分量内的信息实质上相同的^[3]. 所以本文将着重分析 $f_{1/2 1/2}^{LM}$, 即 \mathbf{r} 矢径两端上粒子自旋朝上. 其它分量的讨论完全类似. 令

* 国家自然科学基金和国家教委博士点资助.

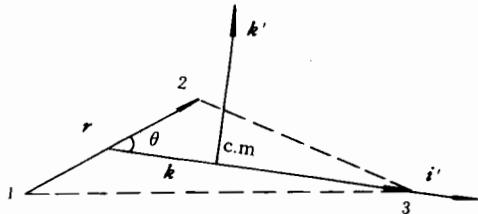


图1 Jacobi 坐标和体轴

$$f_{1/2\ 1/2}^{LM} = \sum_{l_1 l_2} g_{l_1 l_2}(rR) [Y_{l_1}(\hat{r}) Y_{l_2}(\hat{R})]_{LM}. \quad (4)$$

为方便起见, 引入体轴 $i' - j' - k'$, 其中 k' 与三粒子平面 σ 垂直, i' 与 R' 平行(见图1)

则
$$f_{1/2\ 1/2}^{LM} = \sum_{Q=-L}^L D_{QM}^L(-\Omega) \psi_Q, \quad (5)$$

$$\psi_Q = \sum_{l_1 l_2} g_{l_1 l_2}(r, R) [Y_{l_1}(\hat{r}') Y_{l_2}(\hat{R}')]_{LQ}. \quad (6)$$

其中 Ω 表示固定系到体轴的欧拉旋转, \hat{r}' 和 \hat{R}' 表示相对于体轴的方位角, Q 是 L 在 k' 轴上的分量, 称 ψ_Q 是 $f_{1/2\ 1/2}^{LM}$ 的一个组分.

注意到:

(1) σ 面围绕 k' 旋转 180° 与空间反演等价, 波函数 ψ_Q 必须满足

$$\pi(-1)^Q = 1. \quad (7)$$

其中 $\pi = (-1)^{l_1+l_2}$ 为宇称, 所以 $\pi(-1)^Q = -1$ 的组分被完全禁戒.

(2) 若三粒子构成一个以 r 为底边的等腰三角形(IST), 则 r 与 R 的夹角 $\theta = 90^\circ$ (见图1), 此时绕 i' 轴转 180° 等价于粒子1和2交换, 由文献[2]的推导可知构成IST的条件为

$$\pi(-1)^Q \psi_Q^*(\theta = 90^\circ) = -\psi_Q(\theta = 90^\circ). \quad (8)$$

特别当 $\theta = 0$ 时, $(-1)^L \psi_Q(\theta = 90^\circ) = -\psi_Q(\theta = 90^\circ). \quad (9)$

(3) 若三粒子构成一等边三角形(ET), 则体系围绕 k' 旋转 120° 相当于三粒子的一个轮换. 由文献[4]可知, 对于 $s = 1/2$ 体系, $Q = 0, \pm 3, \pm 6, \dots$ 的组分在正三角形时出现节面. 这些由于对称性的制约而出现的节面称为固有节面.

体系波函数的固有节面归纳在表1(由于 $\psi_{-Q} = \pi(-1)^L \psi_Q^*$, 所以只给出 $Q \geq 0$ 的情况).

表1 体系波函数的固有节面

L^π	ψ_0^R	ψ_0^I	ψ_1^R	ψ_1^I	ψ_2^R	ψ_2^I	ψ_3^R	ψ_3^I	ψ_4^R	ψ_4^I
0^+	s	x								
1^+	x	η	x	x						
1^-	x	x	s							
2^+	s	x	x	x	s					
2^-	x	x	s		x	x				
3^+	x	η	x	x	s		x	x		
3^-	x	x	s		x	x	s	η		
4^+	s	x	x	x	s		x	x	s	
4^-	x	x	s		x	x	s	η	x	x

其中 ψ_Q^R 表示 ψ_Q 的实部, ψ_Q^I 表示虚部. “x”表示该组分完全被禁戒, 空格则表示该组分不含有固有节面(称无节组分). “ η ”表示在等边形出现节面, 特定的节面与特定的运动模式相对应^[1,2], η 节点(面)对应于一种围绕ET的振动, 即出现一个从尖等腰形, 经由等边形变为扁等腰形的振动, 或反之, 称为折叶模式(见图2(a)) “s”则表示在 $\theta = 90^\circ$ 时出现节面, s 节点(面)对应于一种围绕等腰形的左右摇摆模式(见图2(b)), 称为Swing模式.

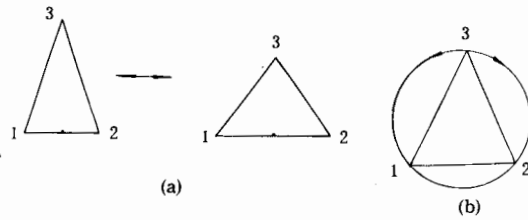


图2 两种运动模式

(a) 折叶模式, (b) Swing 模式.

由于各态 L^π 的首态(能量最低的态), 为了使能量尽可能的低, 应尽量躲开节面. 所以可以预期固有节面将对各态的首态的结构有重大的影响:

i) $1^-, 2^+, 2^-, 3^+, 3^-, 4^+$ 和 4^- 态均存在无节组分(称为第一类态), 所以这些态的首态将以无节组分为主, 从而具有较低的能量. 它们之间的能量差异主要来自集体转动能, 其内部运动是围绕等边形的小振动.

ii) 0^+ 和 1^+ 态至少含有一个节面(称第二类态), 因而含有内部激发, 所以它们的首态能量要显著地高于第一类态.

iii) 各态的空间取向也受到固有节面的影响, 0^+ 和 1^+ 仅有 $Q=0$ 组分, 所以 σ 面与 L 平行(立着), 1^- 态仅有 $|Q|=L$ 成分, σ 面与 L 垂直(躺着). 4^+ 态的 $|Q|=2$ 和 $|Q|=4$ 组分均含无节组分, 但由于体系躺着的转动惯量大些, 从而转动得慢些, 转动能低些, 因而 $|Q|=4$ 的组分比 $|Q|=2$ 的组分更为有利. 所以 4^+ 首态将会以 $|Q|=4$ 的无节组分为主, 相应地其 σ 面将主要与 L 垂直. 其它各态 Q 的主要组分介于 0 与 L 之间, 相应的空间取向将介于立着和躺着之间.

为定量地观察“预言”的准确性, 引进一个三体模型, 为延续以前的研究, 粒子的质量仍取 3728MeV , 相互作用势取广义 Ali-Bodmer 势(能量以 MeV , 距离以 fm 为单位)

$$V(r) = V_0 [-e^{-(r/2.105)^2} + 2e^{-(r/1.428)^2}], \quad (10)$$

取 $V_0 = 300$, 利用 [5] 所提出的方法和 [6] 中的计算程序得到体系各态的能量列在表 2

表2 首态的能量

L^π	0^+	1^+	1^-	2^+	2^-	3^+	3^-	4^+	4^-
$E(\text{MeV})$	-54.37	-53.29	-74.67	-70.45	-67.17	-59.70	-57.65	-57.72	-46.31

为便于定性讨论, 定义集体转动能为, $T_L = \frac{\hbar^2}{2I} L(L+1)$, 其中转动惯量近似用 $I = 3mr_0^2$ 计算, r_0 粗略地估计为 1.34fm (相当于假定粒子构成等边形, 边长给出势能最低, 方向与 L 垂直). 将各态能量写为 $E = E_i + T_L$, 其中 E_i 为内部振动能. 图 3 给出扣除 T_L 后首态 L_i^π 的能谱, 该图显示与“预言”一致, 能级截然分为二组. 图中第一类态能量的差异主要是“取向”效应, 例如 $2^-, 3^+, 3^-$ 及 4^- 态是斜躺着的, 其转动惯量应小于躺着时情况, 相应地转动能应比估算值大, 这就是 4^- 态高于 4^+ 态的原因. 另外同样对斜躺着情况, 如 3^+ 和 3^- 态, 由于 3^+ 态的主要组分 $|Q|$ 值大于 3^- 态, 所以 3^+ 态的取向靠近躺着情况, 故 3^- 态的能量高于 3^+ 态.

定义 W_Q^R 为 ψ_Q^R 和 ψ_Q^R 的权重之和, W_Q^I 为虚部权重, 由归一化条件得

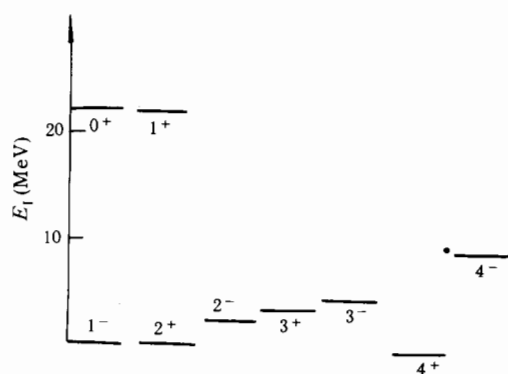


图3 除去集体转动能的能谱

$$\sum_{Q=0}^L (W_Q^R + W_Q^I) = \frac{8\pi^2}{2L+1} \sum_{Q=-L}^L \int r^2 R^2 \sin\theta dr dR d\theta [(\psi_Q^R)^2 + (\psi_Q^I)^2], \quad (11)$$

计算结果列在表3.

表3 Q组分实部和虚部的权重

L^π	W_0^R	W_0^I	W_1^R	W_1^I	W_2^R	W_2^I	W_3^R	W_3^I	W_4^R	W_4^I
0^+	1	0								
1^+	0	1	0	0						
1^-	0	0	0.018	0.982						
2^+	0.006	0	0	0	0.10	0.894				
2^-	0	0	0.008	0.992	0	0				
3^+	0	0.02	0	0	0.084	0.896	0	0		
3^-	0	0	0.076	0.865	0	0	0.02	0.04		
4^+	0.001	0	0	0	0.009	0.005	0	0	0.280	0.705
4^-	0	0	0.001	0.893	0	0	0.035	0.068	0	0

由表3可以看出,所有由对称性得出的预言全部得到证实.第一类的无节组分所占权重相当大,所以它们的几何结构应完全相同.

综上所述,在解 Schrödinger 方程之前,各首态的主要特征已经从对称性分析中得到.这些定性特征不依赖动力学机制,而由对称性完全决定.所以就涉及的态的结构而言,对称性是超越具体模型的决定性因素.这一发现无疑将深化微观结构的认识,同时表明对于不同的微观体系(原子,分子或原子核)有可能存在广泛的相似性.

参 考 文 献

- [1] Xie Wenfang, Bao Chengguang, Science in China (Series A), **38** (1995) 1024.
- [2] W. F. Xie, C. G. Bao, Commun. Theor. Phys., **23** (1995) 429.
- [3] W. Y. Ruan, C. G. Bao, Few-Body Systems, **14** (1993) 25.
- [4] C. G. Bao, W. F. Xie, C. D. Lin, J. Phys., B; At Mol. Opt. Phys., **27** (1994) 193.
- [5] C. G. Bao, Few-Body Methods Proceedings of the International Symposium, Nanning, 1985, Singapore; World Scientific, 1986.
- [6] Y. P. Gan, M. Gong, C. E. Wu, et al., Comp. Phys. Comm., **34** (1985) 387.

Effect of Symmetry on Structure of 3-Fermion Systems With Spin $S=1/2$

Xie Wenfang¹ Bao Chengguang²

¹ (*Teaching and Research Section of Physics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090*)

² (*Department of Physics, Zhongshan University, Guangzhou 510275*)

Received 12 December 1994

Abstract

A 3-fermion system with spin $S=1/2$ is examined. It is found that the quantum mechanical symmetry plays a decisive role in determining microscopic structures.

Key words symmetry, spin, 3-Fermion, Microscopic structures.