带电粒子束传输的相图函数理论*

郁 庆 长
(中国科学院高能物理研究所　北京　100039)

1994-04-07 收稿

摘　　要

带电粒子束发射相图的形状可用相图函数描述。本文利用相图函数理论和 Lie 代数研究非线性传输系统中束相图的变化。同时研究了它的逆问题——根据束特性选择传输系统参数。作为例子，讨论了利用非线性元素改善束质量和非线性周期场系统中的束匹配问题。

关键词　带电粒子束，束流传输，相图函数。

1 引　　言

在带电粒子束的线性传输理论[1,2]中，传输系统各元素和粒子束的特性分别由传输矩阵与束矩阵描述。当给定传输矩阵时，利用线性代数方法就可确定束在传输过程中特性的变化。

近年来传输系统的非线性成为引人注意的研究课题。某些复杂的现象还没有研究清楚。利用 Lie 代数可以计算非线性系统中粒子的运动轨迹[3,4]，一些重要结果已经获得。

对于传输理论来说，更有兴趣的不是单个粒子的运动而是束发射相图的变化。本文提出了相图函数理论，它利用 Lie 代数直接计算相图图形的变化而不跟踪各个粒子的运动。其主要优点是：(1) 它是一种近似解析方法，与数值方法相比，更有利于理解各物理量间的关系。(2) 节省计算时间。(3) 还可用来讨论由发射相图变化选择传输系统参数的问题，这是粒子跟踪方法难于做到的。

2 传输映射与相图函数

粒子的运动状态可用六维列矢量 z 来描述。

$$z^{\mathrm{T}} = (x_1, p_1, x_2, p_2, x_3, p_3). \tag{1}$$

此处 z^{T} 是 z 的转置矢量，x_1, x_2, x_3 为粒子的正则坐标，p_1, p_2, p_3 为相应的正则动量。

考虑传输系统中的一个单元。以 z_i 与 z_f 分别表示单元入口与出口处粒子的状态，它

* 国家自然科学基金资助。

们之间的关系可用传输映射 $\mathscr{M}$ 表示

$$z_f = \mathscr{M} z_i. \tag{2}$$

由于传输系统是 Hamilton 系统，传输映射属于辛映射。

带电粒子束发射相图的形状可用相图函数描述。设发射相图是单连通的，其边界可用下述方程描述：

$$E(z) = 1. \tag{3}$$

定义 $E(z)$ 为束的相图函数。此处约定 $E(z) < 1$ 的区域为相图的内部。以 E_i 与 E_f 分别表示单元入口与出口处的相图函数。它们的关系为

$$E_f(z) = E_i(\mathscr{M}^{-1}z) = \mathscr{M}^{-1}E_i(z). \tag{4}$$

传输映射是传输矩阵在非线性情况下的推广。相图函数是束矩阵在非线性情况下的推广。在线性情况下相图函数是二次齐次多项式，它可用束矩阵 σ 表示

$$E(z) = z^T\sigma^{-1}z. \tag{5}$$

3　发射相图在非线性传输系统中的变化

引入一些 Lie 代数的符号。设 f, g 为相空间坐标 z 的函数。$:f:$ 是 Lie 算符，它对函数 g 的作用可用 Poisson 括号定义

$$:f:g = [f,g] = \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right]. \tag{6}$$

$\exp(:f:)$ 是 Lie 变换，其含义为

$$\exp(:f:) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{:f:^n}{n!}, \tag{7}$$

$:f:^n$ 表示算符 $:f:$ 连续作用 n 次。

任何传输映射可用 Lie 变换表示，它还可分解为 Dragt-Finn 形式[3,4]

$$\mathscr{M} = \exp(:f:) = \prod_{k=2}^{\infty}\exp(:f_k:), \tag{8}$$

此处 f_k 是 z 的 k 次齐次多项式。

已知单元的传输映射 $\mathscr{M}$ 和入口相图函数 E_i 求出口相图函数 E_f，这是正问题。由式(4)与(8)，

$$E_f = \cdots\exp(-:f_k:)\cdots\exp(-:f_3:)\exp(-:f_2:)E_i. \tag{9}$$

因子 $\exp(-:f_2:)$ 相应于线性变换，其它因子相应于象差。当已知 E_i 及各 f_k 时可计算 E_f。

类似地也可展开相图函数

$$E = \sum_{n=2}^{\infty} E_n, \tag{10}$$

此处 E_n 是相空间坐标 z 的 n 次齐次多项式。显然 $:f_k:E_n$ 应是 $n+k-2$ 次齐次多项式。由于

$$\exp(-:f_k:)E_n = \left[1 - :f_k: + \frac{1}{2}:f_k:^2 - \frac{1}{6}:f_k:^3 + \cdots\right]E_n, \tag{11}$$

可知 $\exp(-:f_2:)E_n$ 仍是 n 次齐次多项式，而当 $k>2$ 时 $\exp(-:f_k:)E_n$ 不再是齐次多项式，它包含着 $n+m(k-2)$ 次的项，$m=0,1,2\cdots$，但其中 n 次项部分 E_n 保持不变。

下面进一步讨论式(9)的计算。引入符号

$$E^{(k)} = \exp(-:f_k:)\cdots\exp(-:f_2:)E_{\mathrm{i}}, \tag{12}$$

获得递推公式

$$E^{(k)} = \exp(-:f_k:)E^{(k-1)}, \tag{13}$$

这里 $E^{(1)}=E_{\mathrm{i}}$。展开 $E^{(k)}$，

$$\sum_{n=2}^{\infty} E_n^{(k)} = \exp(-:f_k:)\sum_{m=2}^{\infty} E_m^{(k-1)}$$

$$= \left[1 - :f_k: + \frac{1}{2}:f_k:^2 - \frac{1}{6}:f_k:^3 + \cdots\right]\sum_{m=2}^{\infty} E_m^{(k-1)}. \tag{14}$$

由于方程两边同次项相等，有

$$E_n^{(2)} = \exp(-:f_2:)E_{\mathrm{i}n}, \tag{15}$$

$$E_n^{(k)} = E_n^{(k-1)}, \quad n<k, \; k>2, \tag{16}$$

$$E_k^{(k)} = E_k^{(k-1)} - :f_k:E_2^{(k-1)}, k>2. \tag{17}$$

显然，在 $\exp(-:f_2:)$ 作用下，相图函数中不同次项间不存在耦合。而在 $\exp(-:f_k:)$ 作用下 ($k>2$)，相图函数中低于 k 次的部分保持不变。高于和等于 k 次的部分将受到低次项的影响。最后可得

$$E_{\mathrm{f}2} = \exp(-:f_2:)E_{\mathrm{i}2}, \tag{18}$$

$$E_{\mathrm{f}k} = E_k^{(k-1)} - :f_k:E_{\mathrm{f}2}, \quad k>2. \tag{19}$$

式(18)中的 $E_{\mathrm{i}2}$ 与 $E_{\mathrm{f}2}$ 可用单元入口与出口处的束矩阵 σ_{i} 与 σ_{f} 表示：

$$E_{\mathrm{i}2} = z^{\mathrm{T}}\sigma_{\mathrm{i}}^{-1}z, \quad E_{\mathrm{f}2} = z^{\mathrm{T}}\sigma_{\mathrm{f}}^{-1}z. \tag{20}$$

σ_{i} 与 σ_{f} 的关系可用单元的传输矩阵 R 表示

$$\sigma_{\mathrm{f}} = R\sigma_{\mathrm{i}}R^{\mathrm{T}}, \tag{21}$$

此处 R^{T} 是 R 的转置矩阵。式(18)可用式(21)代替。

4 传输系统参数的选择

已知单元入口与出口的相图函数 E_{i} 与 E_{f}，要求选定合适的传输映射 $\mathscr{M}$，这是逆问题。它的解一般不是唯一的。逆问题的求解非常复杂，射线跟踪方法难于运用。

利用相图函数，可用式(18)与(19)选择各个 f_k。当然只能选择那些实际可用的传输单元所对应的映射。此外高次 f_k 的选择将受到低次 f_k 的影响。下面讨论一个例子。

假定单元入口处的束相图函数 E_{i} 仅包含二次与四次项，即除 $E_{\mathrm{i}2}, E_{\mathrm{i}4}$ 外均可忽略。选择 f_2 与 f_4 使单元出口处的束相图函数 E_{f} 近似为二次式，其它 f_k 为 0。首先由式(18)选定 f_2，然后由下式选定 f_4 使 $E_{\mathrm{f}4}$ 近似为 0，

$$:f_4:E_{f2} = \exp(-:f_2:)E_{i4} - E_{f4}. \tag{22}$$

E_{f4} 能否接近 0 与 f_4,f_2 的选择都有关。当然选定的映射必须是可以实现的。

这个例子相当于用非线性传输单元改善束的质量[5]。我们知道，粒子束通过非线性系统时相图常被扭曲。但是传输映射是可逆的。因此对于一个扭曲的相图也有可能找到一个非线性单元能把它变得接近超椭球。

5 周期场系统

周期场系统是最重要的传输系统之一。以下利用上述理论来讨论这种系统。首先引入本征相图函数与相图不变映射的概念[6]。

如果一个传输映射 $\mathscr{M}$ 保持一个相图函数 E 不变，E 称为 $\mathscr{M}$ 的本征相图函数，$\mathscr{M}$ 称为 E 的相图不变映射。如果束的相图函数等于一个单元的传输映射的本征相图函数，由此单元构成的周期场系统将与束匹配。当具有这一相图的束通过此系统时其包络是周期性的。上述定义适用于线性与非线性情况。周期场系统中束流传输的基本问题是求与系统匹配的束和与束匹配的系统，这可归结为求已知传输映射的本征相图函数和已知相图函数的相图不变映射。

求已知传输映射 $\mathscr{M}$ 的本征相图可用重复映射的方法[7]。对相空间一点 z_0 重复映射求出 $z_k = \mathscr{M}^k z_0 (k = 1,2,3\cdots\infty)$。当轨迹 $\{z_k\}$ 是一个封闭超曲面时它就是一个待求的本征相图，我们可以计算它的相图函数。这也就是求与周期场系统匹配的束相图。

上述计算也可利用相图函数进行。由于 $E_i = E_f$，可略去下标 i 与 f，此时式(18)与(19)成为

$$E_2 = \exp(-:f_2:)E_2, \tag{23}$$

$$E_k = E_k^{(k-1)} - :f_k:E_2, \quad k > 2. \tag{24}$$

上式亦可用以选择与束匹配的周期场系统，即求保持已知相图不变的映射。

6 结　语

相图函数理论可用来研究束发射相图在传输系统中的变化而无需跟踪粒子的运动。这种近似解析方法有利于分析各物理量间的关系。本文仅描述了这一理论的基本思路，具体计算方法及应用将另文讨论。

参　考　文　献

[1] E.D. Courant, H.S. Snyder, *Ann. Phys.*, **3** (1958) 1.
[2] K.L. Brown, SLAC laboratory report SLAC-75, 1967.
[3] A.J. Dragt, in Physics of high energy particle accelerators, AIP Conf. Proc. No. 87, ed. R. A. Carrigan et al., New York, 1982.
[4] A.J. Dragt et al., *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, **38**(1988) 455.
[5] Yu Qingchang, *Rev. Sci. Instr.*, **65** (1994)1444.
[6] 郁庆长，高能物理与核物理，**17**(1993)878。
[7] 郁庆长，高能物理与核物理，**17**(1993)305.

Contour Function Theory For Transport of Charged Particle Beams

Yu Qingchang

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing* 100039)

Received 7 April 1994

Abstract

The shape of the emittance contour of a charged particle beam can be described by the contour function. In this paper the variance of the beam contour in the nonlinear transport system is studied by means of the contour function theory and Lie algebra. Its inverse problem, the selection of parameters of the transport system according to the beam properties, can be studied also. As examples, the improvement of the beam quality by means of the nonlinear element and the beam matching in the nonlinear periodic field system are discussed.

Key words charged particle beam, beam transport, contour function.