

自仿射分形在碰撞多重产生中的应用*

吴元芳 刘连寿

(华中师范大学粒子物理研究所, 武汉 430070)

1993年3月19日收到

摘 要

当分形体在不同方向的标度规律不同时, 它就是自仿射而不是自相似. 本文指出, 高能多重产生中的分形属于这种情况, 并建议了一种用实验检验自仿射性和测量自仿射的特征量——赫斯特指数的方法

关键词 分形, 自仿射, 高能碰撞, 多重产生, 各向异性相空间.

近年来, 对高能多重产生末态相空间中有可能存在分形结构的研究引起了广泛的兴趣^[1]. 为了进行这一研究, 需要设法消去统计起伏. 目前, 能较好地做到这一点的是 Bialas 和 Peschanski^[2] 提出的阶乘矩方法. 如果阶乘矩随着相空间分割数的增大, 或者说随着相空间体积元的减小, 有反常标度行为, 就表明相空间中的分布有分形性质^[3]. 这一性质表现为, q 阶阶乘矩的对数 $\ln F_q$ 和分割数的对数 $\ln M$ 之间有线性关系. 在强子-强子、电子-正电子、强子-核和核-核碰撞实验中都观察到了阶乘矩在相空间分割数增大时的反常标度行为^[4], 表明有分形存在. 然而, 一维阶乘矩的对数和分割数的对数之间并不是简单的线性关系, 而是在分割数增大时趋于饱和. 这可以解释为不同方向的动力学起伏不独立, 分形存在于高维, 一维阶乘矩的饱和是高维分形投影到一维的结果^[4].

在讨论高维分形的时候, 需要首先解决的一个问题是: 应当采用什么形状的元胞(正方形、长方形、...?)来对相空间进行分割. 不同的做法得到的结果会很不相同. 为了澄清目前在这方面存在的混乱, 推进高能多重产生中动力学起伏机制的研究, 有必要弄清楚对相空间进行分割的正确方法. 显然, 只有从动力学起伏本身的性质中才能找到这一问题的答案.

按照目前流行的观点, 动力学起伏使得高维相空间具有分形结构. 对于这种高维分形, 存在自相似和自仿射两种可能的情况. 前者在沿各个方向等比例地收缩时, 部分和整体相似; 而后者只有沿各个方向按不同比例收缩才有部分和整体的相似性^[5]. 自相似分形体是各向同性的, 而高能多重产生的相空间各向异性(早在1969年 L. Van Hove 就指出了这一事实, 并称之为“纵向相空间”^[6]). 因此, 如果在多重产生的相空间中存在高维分形, 它就只能是自仿射而不可能是自相似.

我们所讨论的问题类似于三维地貌. 三维地貌的铅直方向由于重力而不同于水平方向; 从而使得在铅直方向上的标度性不同于水平方向上的标度性. 因此, 在垂直平面上有

* 国家自然科学基金和华中师范大学科研基金资助.

自仿射分形^[5]。在现在讨论的多重产生情况下,纵向动量可以很大,只受能量守恒的约束;而横向动量的平均值被粒子产生机制限制在 $0.3-0.5\text{GeV}/c$ 。因此,纵向相空间和横向相空间应该有不同的标度性,相空间中的分布应该是自仿射分形。

重要的问题是:怎样用实验检验上述论断?怎样从实验数据求得自仿射分形的特征量?本文试图回答上述问题。

首先讨论一下合适的变量选择。在研究高维间歇-分形时,不同的实验组选用过不同的变量^[1]。有人曾提出,方位角 φ 方向上的间歇-分形有特殊意义,可以用来研究“类喷注”和“类环”事件^[7]。然而,仔细的研究表明, φ 方向上间歇-分形的实验数据可以用统计起伏加上玻色-爱因斯坦关联解释,没有实质性意义^[8]。因此,以下假定相空间有柱对称,只讨论纵-横二维相空间。由于关心的是纵横方向上起伏的关联,所以在这两个方向上应该选取统一的变量——纵-横动量 $(p_{\parallel}, p_{\perp})$ 或纵-横快度 $(y_{\parallel}, y_{\perp})$ 。后者的定义为

$$y_a = \text{arcth} \frac{v_a}{c} = \frac{1}{2} \ln \frac{E + cp_a}{E - cp_a} \quad (a = \parallel, \perp). \quad (1)$$

作为自仿函数,选用粒子落入第 i, j 个子元胞中的几率 $P_{i,j}$ 的矩

$$C_q(\delta y_a, \delta y_b) = \sum_{i,j} \langle P_{i,j}^q \rangle / \sum_{i,j} \langle P_{i,j} \rangle^q, \quad (2)$$

它等于实验上测量的归一化阶乘矩 $\langle F_q(\delta y_a, \delta y_b) \rangle^{[2]}$ 。

自仿射变换定义为

$$\left. \begin{aligned} \delta y_a &\rightarrow \delta y_a / \lambda_a; \\ \delta y_b &\rightarrow \delta y_b / \lambda_b; \end{aligned} \right\} (\lambda_a \leq \lambda_b), \quad (3)$$

这一变换的收缩比由一个参量

$$H = \log \lambda_a / \log \lambda_b \quad (0 \leq H \leq 1) \quad (4)$$

表征。 H 称为赫斯特指数。在变换(3)下,几率矩 $C_q(\delta y_a, \delta y_b)$ 变为

$$C_q(\delta y_a, \delta y_b) = \lambda_a^{q(a)} \lambda_b^{q(b)} C_q(\lambda_a \delta y_a, \lambda_b \delta y_b). \quad (5)$$

应该强调的是,当且仅当变换满足条件(4)时,几率矩才有(5)式那样确定的标度规律。正是在这个意义上,我们说,赫斯特指数 H 是决定自仿射性质的特征量。

以下考查两种特殊情况, $H = 0$ 和 $H = 1$ 。

(1) $H = 0$

此时 $\lambda_a = 1, \lambda_b = \lambda \neq 1$, 这表明 δy_a 是常数,矩 $C_q(\delta y_a, \delta y_b)$ 只依赖于一个变量 δy_b 。在此情况下,一维矩有严格的标度性: $C_q(\delta y_b) = \lambda^{q(a)} C_q(\lambda \delta y_b)$, $\log C_q$ 和 $\log M_b$ ($M_b = \lambda_b^q$ 是子间格的总数)之间是线性关系。我们已经知道,实验不支持这一论断^[1](参看图1右上角的实验图)。因此, $H \neq 0$ 。

(2) $H = 1$

此时 $\lambda_a = \lambda_b = \lambda$, 自仿射退化为自相似。如果是这样,由各向同性收缩得到的二维矩的对数 $\log C_q$ 和 $\log M$ ($M = \lambda^{2q}$ 是子元胞的总数)之间应有线性关系。实验似乎也不支持这一论断(参看图1右上角的实验图中的三维矩)。因此, $H \neq 1$ 。

既然多重产生的实验否定了一维和二维的自相似分形,唯一剩下的可能性是二维自仿射分形。为了具体研究这一种可能性,我们来构造一个二维自仿射随机级联模型。

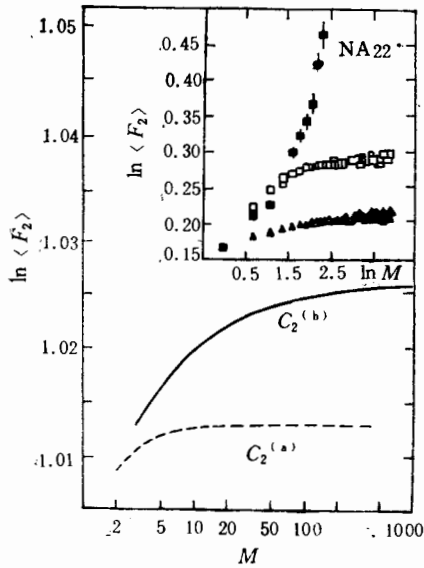


图 1 两个垂直方向上的矩作为分割数 M 的函数

右上角是 NA22 的实验结果, 数据取自文献[9].
 ■ 3 维, □ $y_{||}$, ▲ p_{\perp}

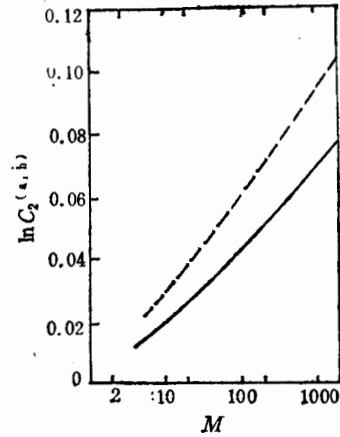


图 2 二维矩的对数 $\ln C_2^{(a,b)}$ 作为分割数 M 的函数
 --- 自仿射, — 自相似.

考虑一个二维相空间区域 $\Delta y_a \Delta y_b$. 用两个整数 λ_a, λ_b 分别作为 a, b 两个方向上的分割比将这一区域逐步分割. 每一次子分割的几率取为

$$w_{ij} = \frac{1 + \alpha r_{ij}}{\sum_{i=1}^{\lambda_a} \sum_{j=1}^{\lambda_b} (1 + \alpha r_{ij})}, \quad (6)$$

其中, α 是决定起伏强度的参数, $0 \leq \alpha \leq 1$; r_{ij} 是区间 $[-1, 1]$ 中的一个随机数. 由(6)式定义的 w_{ij} 具有下列性质: (1) 每次子分割的几率归一化为 1; (2) 对于不同的 i, j , w_{ij} 的取值是对称的; (3) w_{ij} 的最大和最小可能值分别是 0 和 1. 经过 ν 步以后, 一个子元胞中的几率是 $p_{i_\nu j_\nu}^{(\nu)} = w_{i_1 j_1}^{(1)} w_{i_2 j_2}^{(2)} \cdots w_{i_\nu j_\nu}^{(\nu)}$, 其中 $i_\nu = 1, \dots, \lambda_a^\nu, j_\nu = 1, \dots, \lambda_b^\nu$.

我们用这一模型做了蒙特-卡洛模拟. 为了简单, 取 $\lambda_a = 2, \lambda_b = 3$. 图 1 上画出了投影到 a, b 两个方向上的二阶矩的模拟结果. $C_2^{(a)}$ 和 $C_2^{(b)}$ 是两条不同的曲线, 表明相空间各向异性. 图的右上角画出了 NA22 实验组对 $y_{||}$ 和 p_{\perp} 得到的二阶矩以资对比. 我们也模拟了用各向同性收缩(自相似分析)得到的二维二阶矩, 如图 2 中的实线. 它的弯曲是自仿射的又一证据(参看图 1 右上角的实验图中的三维矩). 用各向异性收缩(自仿射分析)得到的二维二阶矩也画在图 2 上(虚线). 它自然是直线.

注意, 如果 a, b 两个方向上的起伏完全独立, $C_2^{(a)}$ 和 $C_2^{(b)}$ (或 $F_2^{(a)}$ 和 $F_2^{(b)}$) 不相等就只是相空间各向异性的平庸结果. 关键在于, 正如一维阶乘矩的对数和 $\ln M$ 不是线性关系这一事实所表明的, 整个相空间的起伏相互关联. 如何描述相互关联的各向异性起伏就不再是平庸的了. 它关系到多重产生过程在相空间不同方向上的演化之间的关

联。这一关联导致所观察的末态相空间中的多重数起伏有自仿射分形结构。赫斯特指数就是描述相空间中多重数起伏的自仿射性的合适特征量。

一个重要问题是,如何从实验数据得到赫斯特指数?为了回答这一问题,写出二阶矩的一维投影的公式^[4]:

$$\left. \begin{aligned} C_2^{(a)}(\delta y_a) &= a_2 \left(1 - b_2 \left(\frac{C_w^2}{\lambda_b} \right)^\nu \right); \\ C_2^{(b)}(\delta y_b) &= a_2' \left(1 - b_2' \left(\frac{C_w^2}{\lambda_a} \right)^\nu \right), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中 b_2 和 b_2' 大于零。由于 $(C_w^2/\lambda) < 1$, $C_2^{(a)}(\delta y_a)$ 和 $C_2^{(b)}(\delta y_b)$ 对于大的 ν 趋于饱和。饱和值是 $C_{2\text{max}}^{(a)} = a_2, C_{2\text{max}}^{(b)} = a_2'$ 。定义

$$R(\nu) = \frac{C_{2\text{max}}^{(b)} - C_2^{(b)}(\delta y_b)}{C_{2\text{max}}^{(a)} - C_2^{(a)}(\delta y_a)}, \quad (8)$$

就有

$$\log R = \log(a_2' b_2' / a_2 b_2) + (H^{-1} - 1) \log M_a, \quad (9)$$

其中 $M_a = \lambda_a^\nu$ 是 a 方向上的总间隔数。在得到(9)式时用了式(4)。这样,从 $\log R$ 对 $\log M_a$ 的直线的斜率可以得到赫斯特指数 H 。

然而上述方法不能直接用于实验数据分析。原因是,式(8)的分子分母应取同一分割代数 ν 的值,而在分析实验数据时,“分割代数”是不知道的。为了克服这一困难,我们提出了一种自洽叠代方法。

将式(4)、(7)、(8)、(9)改写为 $\lambda_b = \lambda_a^{1/H}$; $C_2^{(a)}(M_a) = a_2(1 - b_2(C_w^2)^\nu / M_a^{1/H})$; $C_2^{(b)}(M_b) = C_2^{(b)}(M_a^{1/H}) = a_2'(1 - b_2'(C_w^2)^\nu / M_a)$,

$$R(M_a) = \frac{C_{2\text{max}}^{(b)} - C_2^{(b)}(M_a^{1/H})}{C_{2\text{max}}^{(a)} - C_2^{(a)}(M_a)}, \quad (A)$$

$$H^{-1} = 1 + d \log R(M_a) / d \log M_a. \quad (B)$$

在零级近似下令 $H = H^{(0)} = 1$, 将它代入式(A)然后计算式(B), 所得结果为一级近似 $H^{(1)}$; 再将 $H^{(1)}$ 代入式(A)计算(B)得到二级近似 $H^{(2)}$; ...; 这样下去直到某相邻两级的 H 值, 比如说 $H^{(i+1)}$ 和 $H^{(i)}$, 相差很少为止。在图3上画出了叠代的每一步得到的 H^{-1} 值。它很好地收敛到理论值 $H^{-1} = \ln 3 / \ln 2 = 1.585$ 。

上述模型是一个高度简化的数学模型, 实际的粒子产生过程远比这复杂。但是, 从这一模型的结果使我们可以对实验数据分析提出如下建议:

首先, 统计纵向和横向的阶乘矩 $F_2^{(a)}$, $F_2^{(b)}$, 将它们画成 $\log M$ 的函数。

考察以上得到的是否两条不同的曲线, 以及它们是否都趋于饱和。如果是两条不同的

曲线而且它们都趋于饱和, 就进行叠代过程(A),(B)。如果叠代结果收敛于一个数 H ,

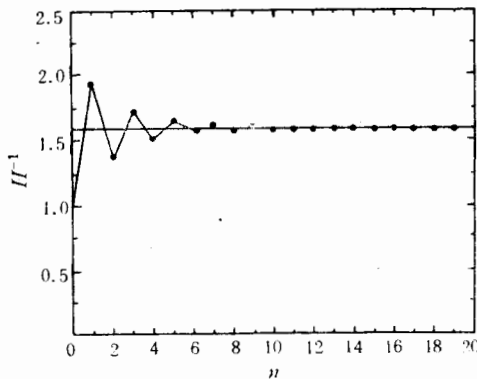


图3 赫斯特指数的倒数 $1/H$ 的叠代结果
横坐标 n 为叠代次数。

就把它作为所考虑的粒子产生过程的自仿射性的特征量。

在结束本文的时候, 我们指出, 从 60 年代起就知道的相空间的各向异性是和粒子产生机制紧密相关的。迄今为止, 只考查过这一各向异性在平均动量分布上的表现。本文的目的是讨论它对局域起伏的影响。由于各向异性, 相空间的不同方向有不同的标度性质, 从而使得相空间具有自仿射分形结构。纵向和横向阶乘矩的对数是 $\ln M$ 的不同函数, 以及由各个方向上等比例地收缩得到的二维阶乘矩的对数作为 $\ln M$ 的函数的非线性是相空间有自仿射分形的证据。我们还提出了从实验数据得到自仿射分形的特征量——赫斯特指数的一种叠代法。如果我们建议的叠代的确收敛, 它将对相空间有自仿射分形结构的又一个强有力的证据。由此得到的赫斯特指数将是所考虑的粒子产生过程的一个新的重要特征量。

在以上的讨论中, a 和 b 代表 \perp 和 \parallel 两个方向, 但是并没有确定哪个方向是 a , 哪个方向是 b 。选择的标准是 $\lambda_a \leq \lambda_b$ (见(3)式)。实验上, 如果哪一个方向的 $\langle F_q \rangle$ 在比较大的分割数 M 时才趋向饱和, 就说明这个方向上的 λ 比较大, 它就是 b 方向。由于横向相空间因某种动力学原因已经受到压缩, 而纵向相空间能比较自由地扩展, 有可能横向相空间的收缩比纵向慢 ($\lambda_{\perp} < \lambda_{\parallel}$), 即横向相空间的结构粗些, 而纵向相空间的结构细些。如果这一猜测成立, a 就应该是横向而 b 是纵向。

参 考 文 献

- [1] N. Schmitz in the Proceedings of the XXI Int. Symp. on Multiparticle Dynamics, eds. Wu Yuanfang and Liu Lianshou, World Scientific, Singapore, 1992, 及其中所引文献。
- [2] A. Bialas and R. Peschanski, *Nucl. Phys.*, **B273**(1986) 703; **B308**(1988) 851.
- [3] P. Lipa and B. Buschbeck, *Phys. Lett.*, **B223**(1989) 465.
- [4] W. Ochs, *Phys. Lett.*, **B247** (1990) 101.
- [5] B. B. Mandelbrot, in Dynamics of Fractal Surfaces, eds. E. Family and T. Vicsek, World Scientific, Singapore, 1991.
- [6] L. Van Hove, *Phys. Lett.*, **28B** (1969) 429; *Nucl. Phys.*, **B9**(1969) 331.
- [7] R. Peschanski, communication at the XXII Int. Symp. on Multiparticle Dynamics, Santiago di Compostella, Spain, July 12—17, 1992.
- [8] M. I. Adamovich et al. (EMU01), On the jet-like and ring-like substructure in distributions of produced particles in central heavy-ion collisions at ultrarelativistic energies, LUND University preprint LUIP 9301 (1993).
- [9] F. Verbeure (EHS-NA22), Proceedings of the XXI Int. Symp. on Multiparticle Dynamics p. 414, eds. Wu Yuanfang and Liu Lianshou, World Scientific, Singapore, 1992.

Application of Self-Affine Fractality in High Energy Multiparticle Production

Wu Yuanfang Liu Lianshou

(*Institute of particle physics, Huazhong Normal University, Wuhan 430070*)

Received on March 19, 1993

Abstract

A fractal object is self-affine instead of self-similar if it has different scaling property in different direction. It is pointed that the fractality in high energy multiparticle production belongs to this category. A method is proposed to examine the self-affinity experimentally and to measure the characteristic parameter of self-affinity, the Hurst exponent.

Key words fractal, self-affine, high energy collision, multiparticle production, anisotropic phase space.