

等梯度加速结构瞬时束流负载效应的计算

黄永章 吴 钢

(中国科学院高能物理研究所应用部 北京 100080)

1993年1月19日收到

摘 要

本文从能量守恒定律出发,对应于等梯度加速结构,推导出瞬时束流负载一般解的解析表达式。特别对应于热阴极微波枪做为注入器的情形,此时脉冲内电流随时间线性增加,首次给出这时的束负载效应的解析公式。对北京自由电子激光器的加速器系统,给出数值计算结果,可以看到由于脉内电流的增长导致脉内束能量下降的程度。

关键词 直线加速器,束流负载效应,等梯度加速波导。

在电子直线加速器中,由于电子束与射频场之间的能量交换,沿加速波导的功率和场强分布发生变化,将导致后来的电子通过加速波导时的能量增益发生变化,这就是通常所说的束负载效应^[1]。电子直线加速器工作于脉冲状态下,在每个脉内的前沿部分,加速波导的场处于建立过程中,仅在射频脉冲持续时间大于建场时间 t_f 以后,波导中的场才达到稳态。同样,从束流注入时刻起,束流激发的场也需要一个建场时间 t_f 才能到达稳态。在加速波导中电子束团始终受到外部射频场和束辐射场的作用,因此,在这些场的建立过程中,电子束团的能量是不断变化的,特别是当以热阴极微波电子枪做注入器时,注入电子束的流强随时间线性变化,那么在加速波导内束辐射场一直在变化,不能到达稳态,电子束团的能量也不会达到稳态。下面从能量守恒定律出发,对上述过程进行解析分析。

1 等梯度加速波导瞬时束流负载的一般解^[2]

在加速波导内存在电子束流时,单位长度内射频功率的损失表示为:

$$\frac{dP}{dz} = \left(\frac{dP}{dz}\right)_{wall} + \left(\frac{dP}{dz}\right)_{beam} = -2\alpha(z)P(z,t) - I(t)E(z,t), \quad (1)$$

$(dP/dz)_{wall}$ 是波导壁的欧姆损耗; $\alpha(z)$ 是波导的衰减系数,对等梯度加速波导来说, $\alpha(z)$ 沿波导缓慢变化,

$$\alpha(z) = \frac{\alpha_0}{(1 - 2\alpha_0 z)}. \quad (2)$$

波导总的衰减系数定义为:

$$\tau = \int_0^l \alpha(z) dz, \quad (3)$$

其中 l 是加速波导长度。式(1)中 $(dP/dz)_{\text{beam}}$ 是束流吸收的功率; $I(t)$ 是束流强度; $E(z, t)$ 是沿波导轴的电场强度, 对等梯度加速波导有:

$$P(z, t) = \frac{E^2(z, t)}{2\alpha(z)R_m}, \quad (4)$$

式中 R_m 是加速波导的特征阻抗。

$P(z, t)$ 对 z 取全微分得:

$$\frac{dP(z, t)}{dz} = \frac{\partial P(z, t)}{\partial z} + \frac{\partial P(z, t)}{\partial t} \frac{dt}{dz}, \quad (5)$$

$$\frac{dt}{dz} = \frac{1}{v_g(z)} = \frac{2Q}{\omega} \alpha(z), \quad (6)$$

这里, v_g 是射频功率的群速度; ω 是圆频率; Q 是加速波导的无载品质因数。这样, 式(1)可写为:

$$\frac{\partial P(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{v_g(z)} \frac{\partial P(z, t)}{\partial t} = -2\alpha(z)P(z, t) - I(t)E(z, t). \quad (7)$$

把式(4)代入式(1)并简化得到

$$\frac{\partial E(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{v_g(z)} \frac{\partial E(z, t)}{\partial t} = -\alpha(z)R_m I(t). \quad (8)$$

式(8)是偏微分方程, 采用 Laplace 变换方法^[2]求解这个方程。对(8)做 Laplace 变换:

$$\frac{\partial E(z, s)}{\partial z} + \frac{s}{v_g(z)} E(z, s) = -\alpha(z)R_m I(s), \quad (9)$$

式(9)是一阶线性微分方程, 其一般解为^[3]

$$E(z, s) = e^{-\int_0^z p dz} \left(-\int_0^z q e^{\int_0^z p dz} dz + c \right), \quad (10)$$

$$p = \frac{s}{v_g(z)},$$

$$q = -\alpha(z)R_m I(s).$$

对式(10)中各项积分, 并运用 $z=0$ 时的初始条件 $E(0, s)$, 得到

$$E(z, s) = E(0, s)e^{-t_z s} - \frac{\omega R_m I(s)}{2Qs} (1 - e^{-t_z s}), \quad (11)$$

这里, t_z 是射频功率从 0 传播到 z 所花的时间,

$$t_z = \int_0^z \frac{dz}{v_g(z)} = -\frac{Q}{\omega} \ln [1 - (1 - e^{-2\tau})z/L]. \quad (12)$$

同步电子 ($v \approx c$) 的能量增益 $U(s)$ 可以通过对式(11)积分得到,

$$U(s) = \int_0^L E(z, s) dz, \quad (13)$$

由式(12)可得到

$$z = \frac{L}{1 - e^{-2\tau}} (1 - e^{-t_z \omega/Q}),$$

$$dz = \frac{\omega L}{(1 - e^{-2\tau})Q} e^{-s\omega/Q} dt_x. \quad (14)$$

将式(14)代入式(13)并积分,得到

$$\begin{aligned} U(s) = & E(0, s) \frac{\omega L}{(1 - e^{-2\tau})(s + \omega/Q)Q} [1 - e^{-s\tau_F(s + \omega/Q)}] \\ & - R_m I(s) \frac{\omega L}{2sQ(1 - e^{-2\tau})} [(1 - e^{-s\tau_F\omega/Q}) \\ & - \frac{\omega}{Q(s + \omega/Q)} (1 - e^{-s\tau_F(s + \omega/Q)})], \end{aligned} \quad (15)$$

其中 τ_F 是加速波导的建场时间,

$$\tau_F = \tau_x(L) = 2\tau \frac{Q}{\omega}. \quad (16)$$

假设 $E(0, t)$ 和 $I(t)$ 都是阶跃函数,条件是忽略加速波导的色散特性,电子束以光速通过加速波导,则

$$\begin{aligned} E(0, t) &= E_0 H(t); \\ I(t) &= I_0 H(t - t_0), \end{aligned} \quad (17)$$

这里 t_0 是束流的注入时间; I_0 是平均束流强度; E_0 是 $z = 0$ 处的电场强度,对等梯度加速波导来说,

$$E_0 = (1 - e^{-2\tau})^{1/2} \left(\frac{P_0 R_m}{L} \right)^{1/2}; \quad (18)$$

$H(t)$ 是单位阶跃函数。对式(17)做 Laplace 变换:

$$\begin{aligned} E(0, s) &= \frac{E_0}{s}; \\ I(s) &= \frac{I_0}{s} e^{-st_0}, \end{aligned} \quad (19)$$

将式(19)代入式(15)得

$$\begin{aligned} U(s) = & E_0 \frac{\omega L}{(1 - e^{-2\tau})(s + \omega/Q)sQ} (1 - e^{-2\tau} e^{-st_F}) \\ & - R_m I_0 \frac{\omega L e^{-st_0}}{2s^2 Q (1 - e^{-2\tau})} [(1 - e^{-2\tau}) \\ & - \frac{\omega}{Q(s + \omega/Q)} (1 - e^{-2\tau} e^{-st_F})]. \end{aligned} \quad (20)$$

对式(20)的反 Laplace 变换^[2],得到

$$\begin{aligned} U(t) = & \frac{E_0 L}{(1 - e^{-2\tau})} [(1 - e^{-s\omega/Q})H(t) - e^{-2\tau}(1 - e^{-(t-t_F)\omega/Q})]H(t - t_F)] \\ & - \frac{R_m I_0 L}{2(1 - e^{-2\tau})} [(1 - e^{-(t-t_0)\omega/Q}) - \frac{\omega}{Q} e^{-2\tau}(t - t_0)]H(t - t_0) \\ & - \frac{R_m I_0 L}{2(1 - e^{-2\tau})} e^{-2\tau} [(-1 + e^{-(t-t_0-t_F)\omega/Q}) \end{aligned}$$

$$+ \frac{\omega}{Q} e^{-2r}(t - t_0 - t_F)] H(t - t_0 - t_F), \quad (21)$$

等式右边第一项是射频场对能量增益的贡献; 第二、三项是束流强度导致的能量增益下降, 只有当 $t - t_0 > t_F$ 时, 射频场和束辐射场趋于稳态, 电子能量增益保持不变:

$$U_0 = E_0 L - \frac{R_m I_0 L}{2} \left(1 - \frac{2\tau e^{-2r}}{1 - e^{-2r}} \right). \quad (22)$$

从(22)可见, 能量增益随平均流强线性下降。

2 SLAC 型等梯度加速波导瞬时束负载的数值计算

在获得瞬时束负载的一般表达式后, 把它应用到一个实际的加速系统——北京自由电子激光器 (BFEL) 主加速器。主加速器是一根 SLAC 型等梯度加速管^[4], 其主要参数为^[5] $f = 2856\text{MHz}$, $Q = 13000$, $\tau = 0.57$, $l = 3.05$, $t_F = 0.83\mu\text{s}$ 。

BFEL 加速器的注入器是微波电子枪^[6], 其输出能量为 1.1MeV , 电子的速度接近于光速, 尽管在加速管的前部电子会有一些滑相, 也还是基本满足式(13)的条件。BFEL 加速器设计的注入束流为 $100/200\text{mA}$, 在不同的注入时间, 脉内不同时刻的电子束团所获得的相对能量增益 U/U_0 。如图 1 所示。典型地, $P_0 = 10\text{MW}$, 图中曲线所对应的注入时刻 t_0/t_F 分别是 $0, 0.3, 0.6, 0.7, 0.8$ 和 1.0 。图 1(a) 对应注入束流为 100mA 的情形, 从图中看到, 存在最佳的注入时间 t_{opt} , 可使束流负载效应造成的束流能散减至最小, 对于 100mA 束流, $t_{opt} = 0.7t_F$ 。图 2(b) 对应于注入束流 200mA 的情形, 此时 $t_{opt} = 0.6t_F$ 。

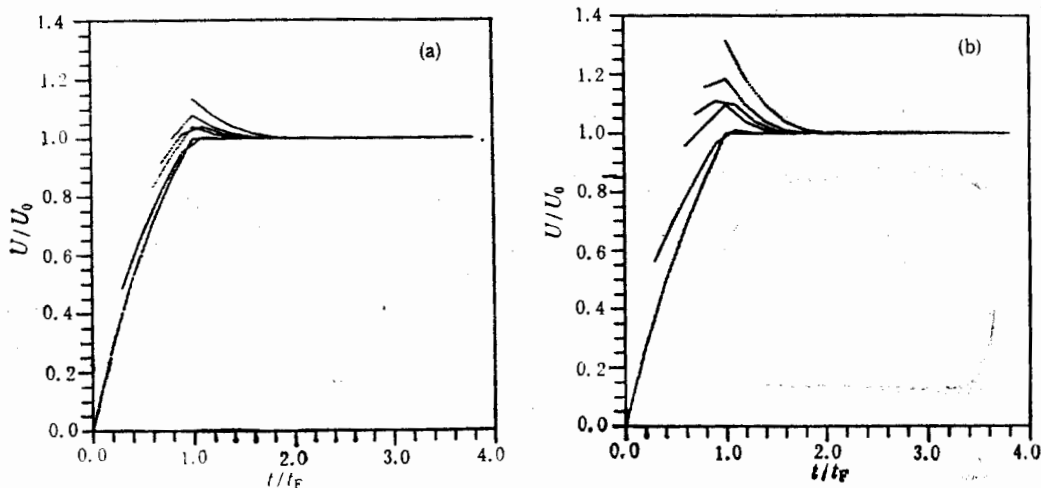


图 1 不同注入电流的瞬态束负载曲线

当然, 对于有多段加速波导的加速系统来说, 通过适当调节不同段的注入时间, 可使束流负载造成的能散更小。

图 2 是 BFEL 加速器的束负载曲线, 图中所示的是稳态下的能量增益, 用这条曲线可以指导加速器的能量调节。

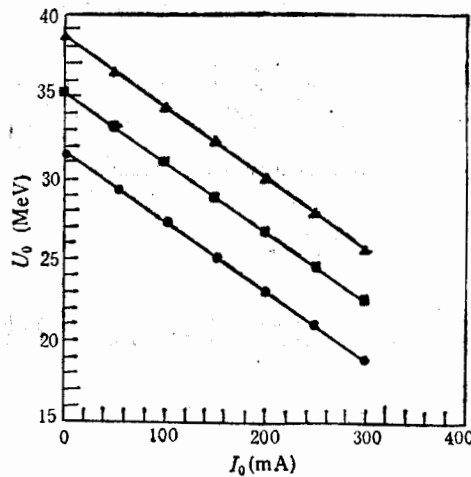


图2 BFEL加速器的稳态束负载曲线

● $P_0 = 8\text{MW}$; ■ $P_0 = 10\text{MW}$; ▲ $P_0 = 12\text{MW}$.

3 注入束增长时束负载问题的一般解

对于通常的电子直线加速器,其注入器为二极或三极电子枪,通过聚束器后的电流可用式(17)表示。但对于近些年发展的高亮度注入器之一的热阴极微波电子枪的情形,由于反轰效应^[7],其电流在脉冲内随时间明显增长:

$$\begin{aligned} I(t) &= I_0[1 + k(t - t_0)]H(t - t_0) \\ &= I_0H(t - t_0) + I_0k(t - t_0)H(t - t_0), \end{aligned} \quad (23)$$

式中 k 是单位时间的电流增大率(单位 $\%/ \mu\text{s}$),对等式右边第二项做 Laplace 变换得到

$$\Delta I(s) = \frac{I_0k}{s^2} e^{-st_0}, \quad (24)$$

将式(24)代入式(15),并只考虑电流增长项,则

$$\Delta U(s) = -R_m I_0 k \frac{\omega L e^{-st_0}}{2s^3 Q (1 - e^{-2\tau})} \left[(1 - e^{-2\tau}) - \frac{\omega}{Q(s + \omega/Q)} (1 - e^{-2\tau} e^{-st_P}) \right], \quad (25)$$

对上式做反 Laplace 变换得

$$\begin{aligned} \Delta U(t) &= -\frac{R_m I_0 k L}{2(1 - e^{-2\tau})} \left[-\frac{Q}{\omega} (1 - e^{-(t-t_0)\omega/Q}) \right. \\ &\quad \left. + (t - t_0) - \frac{\omega}{2Q} e^{-2\tau} (t - t_0)^2 \right] H(t - t_0) \\ &\quad - \frac{R_m I_0 k L}{2(1 - e^{-2\tau})} e^{-2\tau} \left[\frac{Q}{\omega} (1 - e^{-(t-t_0-t_P)\omega/Q}) \right. \\ &\quad \left. - (t - t_0 - t_P) + \frac{\omega}{2Q} e^{-2\tau} (t - t_0 - t_P)^2 \right] H(t - t_0 - t_P). \end{aligned} \quad (26)$$

式(26)就是由于脉内电流增长而造成的脉内能量的下降,下面对应于 BFEL 微波枪

注入器的情况,做一些数学模拟。由于射频场的建场时间相对于脉宽(4 μ s或6 μ s)较短,所以把重点放在研究射频场趋于稳态后的电子能量变化。图3是对应于100/200mA的注入电子束,在不同的脉内电流增长时,脉内不同时刻的电子束团的相对能量增益。图3(a),3(b)分别对应100mA,200mA的注入束流,典型地 $P_0 = 10\text{MW}$ 。

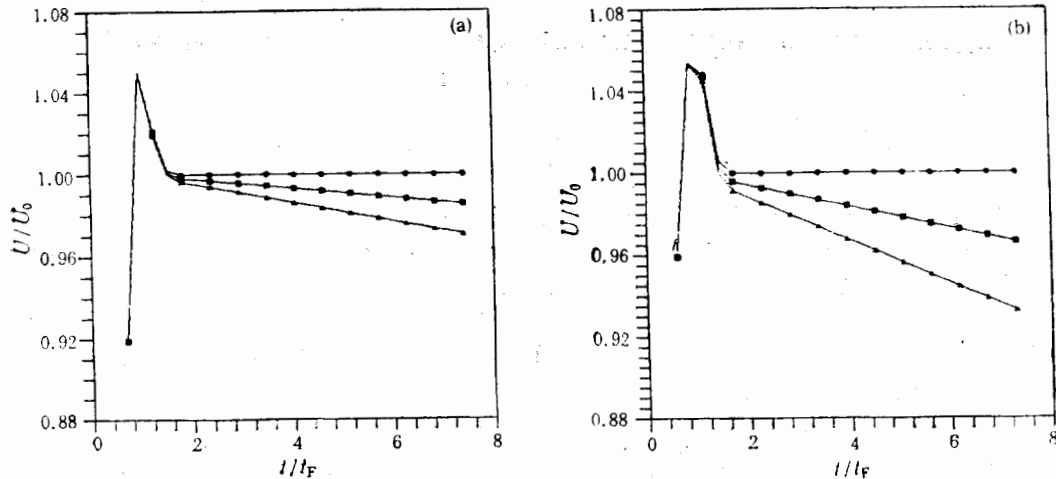


图 3 在有电流增长时的瞬态束负载曲线

● $\dot{k} = 0$; ■ $\dot{k} = 2\%/μs$; ▲ $\dot{k} = 4\%/μs$.

从图中可见明显的能量下降,脉冲越宽,能量下降越多。对于一般的加速器来说,这是不希望,这也正是反轰效应限制了热阴极微波电子枪工作于长脉冲的一个重要原因。

需要说明的是,以上的讨论只是针对电流增长时在加速管内由于束负载效应而引起的能量的变化。实际情况要复杂一些,因为在微波枪内,也同样存在束负载效应,这时脉内不同时刻的电子束团的能量也发生变化,即注入束的初始能量在脉冲内是不同的,这样的束流通过加速管的能量增益的变化与(26)式相比就有些不同,但这个差别比起(26)式来说要小得多,因为微波枪只有一个腔体,而一根加速管则有86个腔。

参 考 文 献

- [1] 姚充国《电子直线加速器》,科学出版社,1986.
- [2] J.W.Wang, "RF Properties of Periodic Accelerating Structure for Linear Colliders", SLAC-Report 339.
- [3] 《数学手册》,高等教育出版社,1979.
- [4] Xie Jialin, et al., *Nucl. Instru. & Meth. in Phy. Res.*, V.A272 (1988) 40.
- [5] R.B. Neal, *The Stanford two-mile Accelerator*, New York-Amsterdam, W.W. Benjamin, 1968.
- [6] G.A. Westenskow and J.M. J. Madey, "Owner's Manual for Microwave Electron Gun", HEPL Technical Note, TN-86-1, Stanford University, 1986.
- [7] 黄永章,博士论文,高能物理研究所,1991.

Transient Beam Loading Problem in Constant Gradient Accelerator Structure

Huang Yongzhang Wu Gang

(Application Division, Institute of High Energy Physics, Academia Sinica, Beijing 100080)

Received on January 19, 1993

Abstract

This paper starts with the general solution of the transient beam loading problem for a constant gradient travelling wave accelerator structure (SLAC type structure) by using the energy conservation law. In case where the electron beam in the accelerator comes from a thermionic microwave gun, the electron current increases with time, the beam loading problem is treated for the first time, and the analytic solution is used to analyse the linear accelerator of Beijing Free Electron Laser.

Key words Linac, Beam loading effect, Constant gradient accelerator structure.