第 18 卷 第 1 期　高能物理与核物理　Vol. 18, No. 1
1994 年 1 月　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　Jan., 1994

含 G 对费米子动力学对称 $SP(10)$ 模型的 Dyson 玻色子实现

邵　彬

(首都师范大学物理系　北京 100037)

1992 年 5 月 25 日收到

摘　　要

将费米子动力学对称模型包含G费米子对能够构造出 $SP(10)$ 或 $SO(12)$ 动力学对称群. 本文用 Generalized Dyson 玻色子映射方法求出 $SP(10)$ 对称群精确的玻色子映像,其子群 $SU(5)$ 生成元的玻色子映像与 sdg 相互作用玻色子模型 (IBM)$SU(5)$ 生成元相同,唯象 sdg IBM $SU(5)$ 极限能谱公式可由费米子动力学对称模型的微观参数描述.

关键词　广义 Dyson 映像,动力学对称性,赝自旋,赝轨道角动量.

1 引　　言

在 Ginocchio 模型[1]基础上发展起来的费米子动力学对称模型 (FDSM)[2] 可通过两种不同的方式构造集体 S.D 费米子对及相应的多极矩算符,它们分别对应 $SO(8)$ 和 $SP(6)$ 模型.用各种玻色子映射方法实现它们的玻色子映像一直是人们感兴趣的课题[3],其意义在于可以从微观的角度研究原子核集体运动具有的动力学对称性,以及唯象IBM[4]的微观机制.

最近 de Kock 等人[5]用广义 Dyson 玻色子映射方法 (GDM) 求出了含 S.D. 对的 $SP(6)$ 模型精确的玻色子映像. GDM 方法给出的映像特点是精确的单体加两体相互作用,一般是非厄米的. 由于费米子体系中的G对影响有时不可忽视[6],以及探索 sdg IBM 的微观结构一般要求费米子体系计入相应的G对,因此本文在 FDSM 的基础上考虑G对的贡献,用 GDM 玻色子映射方法求出含G对 $SP(10)$ (k-active) 对称群精确的玻色子映像. 在极限情况下,多极矩算符的玻色子映像对应着 sdg IBM 子群 $SU(5)$ 的生成元,非厄米的 $SP(10)$ 玻色子映像哈密顿能够约化成为厄米的 $SU(5)$ sdg IBM 哈密顿, 其能谱可直接由微观参数描述.

第二节为含G对 FDSM 理论,第三节求出 $SP(10)$ 对称群精确的玻色子映像,最后讨论结果.

2 FDSM 理 论

在 FDSM 中,原子核单粒子角动量 j 分解为赝自旋 i 和赝轨道角动量 k,核壳层的正常宇称能级和反常宇称能级能够按 $k-i$ 基重新分类，这种分类一般不是唯一的．当 $k\geqslant 2$ (k-active) 或者 $i\geqslant\frac{5}{2}$ (i-active) 时，体系可引入G对．而选取 $k=2$ 或者 $i=\frac{5}{2}$ 就导致 $SP(10)$ 或 $SO(12)$ 动力学对称性,这种对称性只可能出现在中重核区第六、第七和第八壳层[7]．一般各大物理壳层属于正常宇称能级的 $k-i$ 取值分类可导致 $SP(4k+2)$(k-active) 或者 $SO(4i+2)$(i-active) 动力学对称性.

在 k-i 基下定义费米子对算符和相应的多极矩算符[2]，用 9-j 重耦合系数可将其变换到壳模型基下表示出来,其算符形式为:

$$A_\mu^{\lambda\sigma\dagger}=\frac{\sqrt{\Omega}}{2}\sum_{j_1j_2}\chi_{j_1j_2}^{\lambda\sigma}(a_{j_1}^\dagger a_{j_2}^\dagger)_\mu^\lambda, \tag{2.1a}$$

$$A_\mu^{\lambda\sigma}=(A_\mu^{\lambda\sigma\dagger})^\dagger, \tag{2.1b}$$

$$P_\mu^{r\sigma}=\frac{\sqrt{\Omega}}{2}\sum_{j_1j_2}\chi_{j_1j_2}^{r\sigma}(a_{j_1}^\dagger\tilde{a}_{j_2})_\mu^r, \tag{2.1c}$$

其中 $a_{jm}^\dagger, a_{jm}$ 分别为单粒子产生,湮没算符,$()_\mu^r$ 表示两粒子态的耦合,系数 $\chi_{j_1j_2}^{J\sigma}=\sqrt{2}\cdot\hat{K}\hat{I}\hat{j}_1\hat{j}_2\begin{Bmatrix}k & i & j_1\\ k & i & j_2\\ K & I & J\end{Bmatrix}$, 标记 $\sigma=(K,\ I)$, $\hat{j}=\sqrt{2j+1}$, $\tilde{a}_{jm}=(-)^{j-m}a_{j-m}$. 各物理壳层正常宇称能级简并度

$$\Omega=\frac{1}{2}\sum_j(2j+1)=\frac{1}{2}(2k+1)(2i+1).$$

利用 9-j 符号正交性有

$$\sum_{j_1j_2}\chi_{j_1j_2}^{J\sigma}\chi_{j_1j_2}^{J\sigma'}=2\delta_{\sigma\sigma'} \tag{2.2a}$$

$$\sum_\sigma\chi_{j_1j_2}^{J\sigma}\chi_{j_3j_4}^{J\sigma}=\delta_{j_1j_3}\delta_{j_2j_4}+(-)^{2k+2i+j_1+j_2+I+K+J}\delta_{j_1j_4}\delta_{j_2j_3}. \tag{2.2b}$$

本文只讨论 k-active 图象,此时 $I=0$, $K=J$, 指标 $\sigma=(J,0)\equiv c$. $SP(4k+2)$ 群元是由真实集体型指标 c 标记的,算符定义如下:

$$A_\mu^{\lambda\dagger}=A_\mu^{\lambda c\dagger},\ A_\mu^\lambda=(A_\mu^{\lambda c\dagger})^\dagger,\ \lambda=0,\cdots\cdots 2(k-1),\ 2k \tag{2.3a}$$

$$P_\mu^r=P_\mu^{rc},\ r=0,\cdots\cdots 2k-1,\ 2k \tag{2.3b}$$

上述 $(2k+1)(4k+3)$ 个生成元满足对易关系如下:

$$[A_\mu^r, A_\nu^{s\dagger}]=\Omega\delta_{r,s}\delta_{\mu\nu}-2\sum_t K_{r-\mu,s\nu}^{tm}(-)^\mu P_m^t, \tag{2.4a}$$

$$[P^r_u,\ A^{s\dagger}_v] = \sum_t K^{tm}_{ru,sv} A^{t\dagger}_m, \tag{2.4b}$$

$$[P^r_u,\ P^s_v] = \frac{1}{2}\sum_t [(-)^t - (-)^{r+s}] K^{tm}_{ru,sv} P^t_m, \tag{2.4c}$$

其中 $K^{tm}_{ru,sv} = \hat{k}\hat{r}\hat{s}\langle rusv|tm\rangle \begin{Bmatrix} r & s & t \\ k & k & k \end{Bmatrix}$.

费米子动力学对称群 $SP(4k+2)$ 的哈密顿量为

$$H_{SP(4k+2)} = \sum_\lambda G_\lambda A^{\lambda\dagger}\cdot\tilde{A}^\lambda + \sum_r b_r P^r\cdot P^r \tag{2.5}$$

标记集体费米子对算符 $S^\dagger = A^{0\dagger}_0$, $S = A^0_0$, $D^\dagger_u = A^{2\dagger}_u$, $D_u = A^2_u$, $G^\dagger_u = A^{4\dagger}_u$, $G_u = A^4_u$. 当 $k=1$ 时，$\lambda = 0, 2$，含 S. D 对的费米子体系对应 $SP(6)$ 对称群. 当 $k=2$ 时，$\lambda = 0,2,4$，含 S.D.G 对的费米子体系对应 $SP(10)$ 对称群.

3 SP(10) 对称群的玻色子实现

在 GDM 中[8]，费米子真空态映射到玻色子真空态，双费米子算符按下述要求映射

$$a^\dagger_\alpha a^\dagger_\beta \to (a^\dagger_\alpha a^\dagger_\beta)^D = B^\dagger_{\alpha\beta} - \sum_{\gamma\delta} B^\dagger_{\alpha\gamma} B^\dagger_{\beta\delta} B_{\gamma\delta}, \tag{3.1a}$$

$$a_\beta a_\alpha \to (a_\beta a_\alpha)^D = B_{\alpha\beta}, \tag{3.1b}$$

$$a^\dagger_\alpha a_\beta \to (a^\dagger_\alpha a_\beta)^D = \sum_\gamma B^\dagger_{\alpha\gamma} B_{\beta\gamma}, \tag{3.1c}$$

单粒子态 α 一般标记 j_α, m_α 量子数. 理想玻色子产生、湮没算符有下述特点:

$$B_{\alpha\beta} = (B^\dagger_{\alpha\beta})^\dagger,\quad B^\dagger_{\alpha\beta} = -B^\dagger_{\beta\alpha}, \tag{3.2a}$$

$$[B_{\alpha\beta}, B_{\gamma\delta}{}^\dagger] = \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma}, \tag{3.2b}$$

$$[B_{\alpha\beta}, B_{\gamma\delta}] = [B^\dagger_{\alpha\beta}, B^\dagger_{\gamma\delta}] = 0. \tag{3.2c}$$

引入集体型玻色子算符如下:

$$B^{J\sigma\dagger}_M \equiv \frac{1}{2}\sum_{j_1 j_2 m_1 m_2} \chi^{J\sigma}_{j_1 j_2}\langle j_1 m_1 j_2 m_2|JM\rangle B^\dagger_{j_1 m_1, j_2 m_2}, \tag{3.3a}$$

$$B^{J\sigma}_M = (B^{J\sigma\dagger}_M)^\dagger. \tag{3.3b}$$

由 (2.2a—2b) 及 C-G 系数性质可得集体型玻色子算符满足玻色子对易关系

$$[B^{J\sigma}_M, B^{J'\sigma'\dagger}_{M'}] = \delta_{JJ'}\delta_{MM'}\delta_{\sigma\sigma'}, \tag{3.4}$$

$$[B^{J\sigma}_M, B^{J'\sigma'}_{M'}] = [B^{J\sigma\dagger}_M, B^{J'\sigma'\dagger}_{M'}] = 0, \tag{3.5}$$

以及逆变换形式:

$$B^\dagger_{j_1 m_1, j_2 m_2} = \sum_{J\sigma M} \chi^{J\sigma}_{j_1 j_2}\langle j_1 m_1 j_2 m_2|JM\rangle B^{J\sigma\dagger}_M. \tag{3.6}$$

由 (2.1a) 式，费米子对算符重写为如下形式

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega}} A^{\lambda\sigma\dagger}_u = \frac{1}{2}\sum_{j_1 j_2 m_1 m_2} \chi^{\lambda\sigma}_{j_1 j_2}\langle j_1 m_1 j_2 m_2|\lambda u\rangle a^\dagger_{j_1 m_1} a^\dagger_{j_2 m_2}. \tag{3.7}$$

$SP(4k+2)$ 群元的 GDM 映像则为

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega}} A_{\mu}^{\lambda c\dagger} \to \frac{1}{\sqrt{\Omega}} (A_{\mu}^{\lambda c\dagger})^{D}$$
$$= B_{\mu}^{\lambda c\dagger} - \frac{1}{2} \sum_{\substack{J_1\sigma_1 J_2\sigma_2 J_3\sigma_3 \\ j_1 j_2 j_3 j_4 L}} (-)^{L} \chi_{j_1 j_2}^{\lambda c} \chi_{j_1 j_3}^{J_1\sigma_1} \chi_{j_2 j_4}^{J_2\sigma_2} \chi_{j_3 j_4}^{J_3\sigma_3} \hat{j}_1 \hat{j}_2 \hat{j}_3 \hat{L} \begin{Bmatrix} J_1 & j_1 & j_3 \\ J_2 & j_2 & j_4 \\ L & \lambda & J_3 \end{Bmatrix}$$
$$[(B^{J_1\sigma_1^\dagger} B^{J_2\sigma_2^\dagger})^{L} \tilde{B}^{J_3\sigma_3}]_{\mu}^{\lambda}. \tag{3.8}$$

类似地:

$$P_{\mu}^{rc} \to (P_{\mu}^{rc})^{D} = \frac{\sqrt{\Omega}}{2} \sum_{\substack{J_1\sigma_1 J_2\sigma_2 \\ j_1 j_2 j_3}} \chi_{j_1 j_2}^{rc} \chi_{j_1 j_3}^{J_1\sigma_1} \chi_{j_2 j_3}^{J_2\sigma_2} (-)^{r+1+j_1+j_3} \hat{j}_1 \hat{j}_2$$
$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_3 & J_1 \\ J_2 & r & j_2 \end{Bmatrix} (B^{J_1\sigma_1^\dagger} \tilde{B}^{J_2\sigma_2})_{\mu}^{r}. \tag{3.9}$$

标记 $\sigma = (K、I)$ 一般包含两种类型的指标. 对 k-active 情形, $\sigma = c = (J、0)$ 标记着真实集体型指标. $SP(4k+2)$ 群元由 c 标记的对算符和多极矩算符构成.在 FDSM 中,实际的物理问题是在全费米子空间中截断出由 c 标记的集体型费米子对的子空间,体系哈密顿量由这些费米子对算符及多极矩算符构成. 不同的物理问题, c 可有不同的标记,其 GDM 玻色子映像一般仅包含 $\sigma = c$ 和 $\sigma \neq c$ 两种类型的玻色子. 精确的玻色子实现要求忽略 $\sigma \neq c$ 标记的玻色子. $SO(8)$ 和 $SP(4)$ 代数曾被证明[9], 它们的玻色子映像通过截断展开式中所有 $\sigma \neq c$ 的项,那么截断后的映像代数同构于原来费米子代数, Kim 等人则将上述结论推广到更为一般的代数情形中[10],即当双费米子算符在对易关系下封闭形成自厄李代数, 忽略掉那些与截断的费米子对构成的子空间中无对应项的玻色子态,费米子及其玻色子实现就能通过一个相似变换联系起来,其物理后果将是等价的,即全同的对易关系,双费米子态与玻色子态一一对应, 映像中的伪态自然消除. 就本问题而言,把 (3.8) 及 (3.9) 式中所有 $I \neq 0$ 的项去掉,相当于指标 σ 代之以 $c = (J、0)$, 就得到 $SP(4k+2)$ 精确的玻色子映像. 此时系数化为:

$$\chi_{j_1 j_2}^{Jc} = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} \hat{k} \hat{j}_1 \hat{j}_2 (-)^{j_2+k+i+J}, \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J \\ k & k & i \end{Bmatrix} \delta_{KJ}, \tag{3.10}$$

将 B_{μ}^{Jc} 简记为 B_{μ}^{J}, 真实集体型玻色子算符为: $s = B_0^0$, $s^\dagger = B_0^{0\dagger}$, $d_\mu = B_\mu^2$, $d_\mu^\dagger = B_\mu^{2\dagger}$, $g_\mu = B_\mu^4$, $g_\mu^\dagger = B_\mu^{4\dagger}$, 截断后的玻色子映像如下:

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega}} (A_{\mu}^{\lambda\dagger})^{B} = B_{\mu}^{\lambda\dagger} - 2 \sum_{J_1 J_2 J_3 L} \hat{j}_1 \hat{j}_2 \hat{j}_3 \hat{L} X(J_1, J_2, J_3, \lambda, L)$$
$$[(B^{J_1^\dagger} B^{J_2^\dagger})^{L} \tilde{B}^{J_3}]_{\mu}^{\lambda}, \tag{3.11}$$

其中

$$X(J_1, J_2, J_3, \lambda, L) = \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} (-)^{j_1+j_4+1+L} \frac{\hat{K}^4}{(2\Omega)^2} (\hat{j}_1 \hat{j}_2 \hat{j}_3 \hat{j}_4)^2$$
$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & \lambda \\ k & k & i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1 & j_3 & J_1 \\ k & k & i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_2 & j_4 & J_2 \\ k & k & i \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_3 & j_4 & J_3 \\ k & k & i \end{Bmatrix}$$
$$\begin{Bmatrix} J_1 & j_3 & j_1 \\ J_2 & j_4 & j_2 \\ L & J_3 & \lambda \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{\hat{k}^2}{4\Omega^2}\sum_{j_1 j_2}(\hat{j}_1\hat{j}_2)^2\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & \lambda \\ k & k & i \end{Bmatrix}^2\begin{Bmatrix} L & J_1 & J_2 \\ J_3 & k & k \\ \lambda & k & k \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{\hat{k}^2}{2\Omega}\begin{Bmatrix} k & k & J_1 \\ k & k & J_2 \\ J_3 & \lambda & L \end{Bmatrix}. \tag{3.12}$$

在上式中用到了三个 6-j 符号与一个 9-j 符号的求和公式[11]，以及 6-j 符号的正交关系．类似地由 (3.9) 式有．

$$(P^r_\mu)^B = 2\Omega\sum_{j_1 j_2}\hat{r}X(J_1,J_2,0,r,r)\hat{J}_1\hat{J}_2(B^{J_1^\dagger}\tilde{B}^{J_2})^r_\mu, \tag{3.13}$$

于是 $SP(4k+2)$ 群元玻色子映像为

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega}}(A^{\lambda\dagger}_\mu)^B = B^{\lambda\dagger}_\mu - \frac{\hat{k}^2}{\Omega}\sum_{J_1J_2J_3L}\hat{J}_1\hat{J}_2\hat{J}_3\hat{L}\begin{Bmatrix} k & k & J_1 \\ k & k & J_2 \\ J_3 & \lambda & L \end{Bmatrix}[(B^{J_1^\dagger}B^{J_2^\dagger})^L\tilde{B}^{J_3}]^\lambda_\mu, \tag{3.14}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega}}(A^\lambda_\mu)^B = B^\lambda_\mu, \tag{3.15}$$

$$(P^r_\mu)^B = (-)^r\hat{k}\sum_{J_1J_2}\hat{J}_1\hat{J}_2\begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & r \\ k & k & k \end{Bmatrix}(B^{J_1^\dagger}\tilde{B}^{J_2})^r_\mu, \tag{3.16}$$

玻色子映像哈密顿为

$$H^B_{SP(4k+2)} = \sum_\lambda G_\lambda \Omega B^{\lambda\dagger}\cdot\tilde{B}^\lambda - \hat{k}^2\sum_{J_2J_3\lambda L}G_\lambda\hat{J}_1\hat{J}_2\hat{J}_3\hat{\lambda}\begin{Bmatrix} k & k & J_1 \\ k & k & J_2 \\ J_3 & \lambda & L \end{Bmatrix}$$

$$(B^{J_1^\dagger}B^{J_2^\dagger})^L\cdot(\tilde{B}^{J_3}\tilde{B}^\lambda)^L + \sum_r b_r(P^r)^B\cdot(P^r)^B, \tag{3.17}$$

其中 $J_1, J_2, J_3, \lambda = 0, \cdots\cdots 2(k-1)$，$2k$，$r = 0$，$\cdots\cdots 2k-1$，$2k$．$L = L_1$，$L_1 + 2, \cdots\cdots, L_2 - 2$，$L_2$．$L_1 = \max(|J_1 - J_2|, |J_3 - \lambda|)$，$L_2 = \min(J_1 + J_2, J_3 + \lambda)$．

由此普遍结果进一步可得 $SP(10)$ 玻色子映像的具体形式如下：

$$\sqrt{\Omega}(S^\dagger)^B = s^\dagger(\Omega - n_s - 2n_d - 2n_g) - (d^\dagger\cdot d^\dagger + g^\dagger\cdot g^\dagger)s$$

$$+ \frac{3\sqrt{5}}{14}(d^\dagger d^\dagger)^2\cdot\tilde{d} - \frac{12}{7}(d^\dagger g^\dagger)^2\cdot\tilde{d}$$

$$- \frac{3}{14}\sqrt{110}(g^\dagger g^\dagger)^2\cdot\tilde{d} - \frac{2\sqrt{5}}{7}(d^\dagger d^\dagger)^4\cdot\tilde{g}$$

$$- \frac{5}{7}\sqrt{22}(d^\dagger g^\dagger)^4\cdot\tilde{g} - \frac{\sqrt{143}}{14}(g^\dagger g^\dagger)^4\cdot\tilde{g}, \tag{3.18}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega}}(S)^B = s, \tag{3.19}$$

$$\sqrt{\Omega}(D^\dagger_\mu)^B = d^\dagger_\mu(\Omega - 2n_s) - s^\dagger s^\dagger\tilde{d}_\mu$$

$$
\begin{aligned}
&+ s^{\dagger}\left[\frac{3\sqrt{5}}{7}(d^{\dagger}\tilde{d})^{2}_{\mu} - \frac{12}{7}(d^{\dagger}\tilde{g})^{2}_{\mu} - \frac{12}{7}(g^{\dagger}\tilde{d})^{2}_{\mu} - \frac{3}{7}\sqrt{110}(g^{\dagger}\tilde{g})^{2}_{\mu}\right] \\
&+ s\left[\frac{3\sqrt{5}}{14}(d^{\dagger}d^{\dagger})^{2}_{\mu} - \frac{12}{7}(d^{\dagger}g^{\dagger})^{2}_{\mu} - \frac{3}{14}\sqrt{110}(g^{\dagger}g^{\dagger})^{2}_{\mu}\right] \\
&- 5\sqrt{5}\sum_{L=0,2,4}\hat{L}\left\{5\begin{Bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & L \end{Bmatrix}[(d^{\dagger}d^{\dagger})^{L}\tilde{d}]^{2}_{\mu}\right. \\
&\left.+ 9\begin{Bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & L \end{Bmatrix}[(g^{\dagger}g^{\dagger})^{L}\tilde{d}]^{2}_{\mu}\right\} \\
&- 75\sum_{L=2,4}\hat{L}\begin{Bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & L \end{Bmatrix}\{[(d^{\dagger}d^{\dagger})^{L}\tilde{g}]^{2}_{\mu} + 2[(d^{\dagger}g^{\dagger})^{L}\tilde{d}]^{2}_{\mu}\} \\
&- 45\sum_{L=2,4,6}\hat{L}\left\{2\sqrt{5}\begin{Bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & L \end{Bmatrix}[(d^{\dagger}g^{\dagger})^{L}\tilde{g}]^{2}_{\mu}\right. \\
&\left.+ 3\begin{Bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & L \end{Bmatrix}[(g^{\dagger}g^{\dagger})^{2}\tilde{g}]^{2}_{\mu}\right\}.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

$$
\frac{1}{\sqrt{\Omega}}(D_{\mu})^{B} = d_{\mu}, \tag{3.21}
$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\Omega}\,(G^{\dagger}_{\mu})^{B} = {} & g^{\dagger}_{\mu}(\Omega - 2n_{s}) - s^{\dagger}s^{\dagger}\tilde{g}_{\mu} - \frac{s^{\dagger}}{7}[4\sqrt{5}(d^{\dagger}\tilde{d})^{4}_{\mu} \\
& + 5\sqrt{22}(d^{\dagger}\tilde{g})^{4}_{\mu} + 5\sqrt{22}(g^{\dagger}\tilde{d})^{4}_{\mu} + \sqrt{143}(g^{\dagger}\tilde{g})^{4}_{\mu}] \\
& - s\frac{1}{7}\left[2\sqrt{5}\,(d^{\dagger}d^{\dagger})^{4}_{\mu} + 5\sqrt{22}(d^{\dagger}g^{\dagger})^{4}_{\mu} + \frac{\sqrt{143}}{2}(g^{\dagger}g^{\dagger})^{4}_{\mu}\right] \\
& - 25\sqrt{5}\sum_{L=2,4}\hat{L}\begin{Bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & L \end{Bmatrix}[(d^{\dagger}d^{\dagger})^{L}\tilde{d}]^{4}_{\mu} \\
& - 75\sum_{L=0,2,4}\hat{L}\begin{Bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & L \end{Bmatrix}[(d^{\dagger}d^{\dagger})^{2}\tilde{g}]^{4}_{\mu} - 15\sum_{L=2,4,6}\hat{L} \\
& \left\{10\begin{Bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & L \end{Bmatrix}[(d^{\dagger}g^{\dagger})^{L}\tilde{d}]^{4}_{\mu} + 6\sqrt{5}\begin{Bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & L \end{Bmatrix}[(d^{\dagger}g^{\dagger})^{L}\tilde{g}]^{4}_{\mu}\right. \\
& \left.+ 3\sqrt{5}\begin{Bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & L \end{Bmatrix}[(g^{\dagger}g^{\dagger})^{L}\tilde{d}]^{4}_{\mu}\right\}
\end{aligned}
$$

$$-135\sum_{L=0,2,4,6,8}\hat{L}\begin{Bmatrix}2&2&4\\2&2&4\\4&4&L\end{Bmatrix}[(g^{\dagger}g^{\dagger})^{L}\tilde{g}]^{4}_{\mu},\tag{3.22}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Omega}}(G_{\mu})^{B}=g_{\mu},\tag{3.23}$$

$$(P^{0}_{0})^{B}=n_{s}+n_{d}+n_{g},\tag{3.24}$$

$$(P^{1}_{\mu})^{B}=\frac{\sqrt{5}}{2}[(d^{\dagger}\tilde{d})^{1}_{\mu}+\sqrt{6}(g^{\dagger}\tilde{g})^{1}_{\mu}],\tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}(P^{2}_{\mu})^{B}=&s^{\dagger}\tilde{d}_{\mu}+d^{\dagger}_{\mu}s-\frac{3}{14}\sqrt{5}(d^{\dagger}\tilde{d})^{2}_{\mu}\\&+\frac{3}{14}\sqrt{110}(g^{\dagger}\tilde{g})^{2}_{\mu}+\frac{6}{7}[(d^{\dagger}\tilde{g})^{2}_{\mu}+(g^{\dagger}\tilde{d})^{2}_{\mu}],\end{aligned}\tag{3.26}$$

$$\begin{aligned}(P^{3}_{\mu})^{B}=&-\frac{4}{7}\sqrt{5}(d^{\dagger}\tilde{d})^{3}_{\mu}+\frac{3}{14}\sqrt{55}(g^{\dagger}\tilde{g})^{3}_{\mu}\\&+\frac{15}{14}\sqrt{2}[(d^{\dagger}\tilde{g})^{3}_{\mu}+(g^{\dagger}\tilde{d})^{3}_{\mu}],\end{aligned}\tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}(P^{4}_{\mu})^{B}=&\frac{2}{7}\sqrt{5}(d^{\dagger}\tilde{d})^{4}_{\mu}+s^{\dagger}\tilde{g}_{\mu}+g^{\dagger}_{\mu}s+\frac{\sqrt{143}}{14}(g^{\dagger}\tilde{g})^{4}_{\mu}\\&+\frac{5}{14}\sqrt{22}[(d^{\dagger}\tilde{g})^{4}_{\mu}+(g^{\dagger}\tilde{d})^{4}_{\mu}].\end{aligned}\tag{3.28}$$

上述 $SP(10)$ 群元的多极矩算符的玻色子映像 $(P^{r}_{\mu})^{B}(r=1,2,3,4)$ 乘以因子 $\frac{2}{\sqrt{35}}$ 与文献[12] sdg IBM 群链 $SU(15)\supset SU(5)\supset SO(5)\supset SO(3)$ 生成元完全相同，其与 sdg IBM 二次 Casimir 算符的关系为

$$\sum_{r=1}^{4}(P^{r})^{B}\cdot(P^{r})^{B}=\frac{1}{4}C_{2SU(5)},\tag{3.29}$$

$$\sum_{r=1,3}(P^{r})^{B}\cdot(P^{r})^{B}=\frac{1}{4}C_{2SO(5)},\tag{3.30}$$

与角动量的关系.

$$(P^{1})^{B}\cdot(P^{1})^{B}=\frac{1}{8}J\cdot J.\tag{3.31}$$

$SP(10)$ 对称群的玻色子映像哈密顿如下：

$$\begin{aligned}H^{B}_{SP(10)}=&\Omega(G_{0}n_{s}+G_{2}n_{d}+G_{4}n_{g})-G_{0}n_{s}(n_{s}-1)-2(G_{0}+G_{2})n_{s}n_{d}\\&-2(G_{0}+G_{4})n_{s}n_{g}-G_{2}s^{\dagger}s^{\dagger}\tilde{d}\cdot\tilde{d}-G_{4}s^{\dagger}s^{\dagger}\tilde{g}\cdot\tilde{g}\\&-G_{0}(d^{\dagger}\cdot d^{\dagger}+g^{\dagger}\cdot g^{\dagger})ss\\&+\frac{3\sqrt{5}}{7}\left[G_{2}s^{\dagger}d^{\dagger}\cdot(\tilde{d}\tilde{d})^{2}+\frac{1}{2}(G_{0}+G_{2})(d^{\dagger}d^{\dagger})^{2}\cdot\tilde{d}s\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{12}{7}\left[(G_2+G_4)s^\dagger d^\dagger\cdot(\tilde{d}\tilde{g})^2+(G_0+G_2)(d^\dagger g^\dagger)^2\cdot\tilde{d}s\right]\\
&-\frac{3}{14}\sqrt{110}\left[2G_4s^\dagger d^\dagger\cdot(\tilde{g}\tilde{g})^2+(G_0+G_2)(g^\dagger g^\dagger)^2\tilde{d}s\right]\\
&-\frac{2\sqrt{5}}{7}\left[2G_2s^\dagger g^\dagger\cdot(\tilde{d}\tilde{d})^4+(G_0+G_4)(d^\dagger d^\dagger)^4\tilde{g}s\right]\\
&-\frac{5}{7}\sqrt{22}\left[(G_2+G_4)s^\dagger g^\dagger\cdot(\tilde{d}\tilde{g})^4+(G_0+G_4)(d^\dagger g^\dagger)^4\cdot\tilde{g}s\right]\\
&-\frac{\sqrt{143}}{14}\left[2G_4s^\dagger g^\dagger\cdot(\tilde{g}\tilde{g})^4+(G_0+G_4)(g^\dagger g^\dagger)^4\tilde{g}s\right]\\
&-125G_2\sum_{L=0,2,4}\begin{Bmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&L\end{Bmatrix}\left[(d^\dagger d^\dagger)^L\cdot(\tilde{d}\tilde{d})^L\right]\\
&-450(G_2+G_4)\sum_{L=2,4,6}\begin{Bmatrix}2&2&2\\2&2&4\\2&4&L\end{Bmatrix}(d^\dagger g^\dagger)^L\cdot(\tilde{d}\tilde{g})^L\\
&-405G_4\sum_{L=0,2,4,6,8}\begin{Bmatrix}2&2&4\\2&2&4\\4&4&L\end{Bmatrix}(g^\dagger g^\dagger)^L\cdot(\tilde{g}\tilde{g})^L\\
&-75\sqrt{5}\sum_{L=2,4}\begin{Bmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&4&L\end{Bmatrix}\left[(G_2+G_4)(d^\dagger d^\dagger)^L\cdot(\tilde{d}\tilde{g})^L\right.\\
&\left.+2G_2(d^\dagger g^\dagger)^L\cdot(\tilde{d}\tilde{d})^L\right]\\
&-225\sum_{L=0,2,4}\begin{Bmatrix}2&2&2\\2&2&2\\4&4&L\end{Bmatrix}\left[G_4(d^\dagger d^\dagger)^L\cdot(\tilde{g}\tilde{g})^L\right.\\
&\left.+G_2(g^\dagger g^\dagger)^L\cdot(\tilde{d}\tilde{d})^L\right]\\
&-135\sqrt{5}\sum_{L=2,4,6}\begin{Bmatrix}2&2&2\\2&2&4\\4&4&L\end{Bmatrix}\left[2G_4(d^\dagger g^\dagger)^L\cdot(\tilde{g}\tilde{g})^L\right.\\
&\left.+(G_2+G_4)(g^\dagger g^\dagger)^L\cdot(\tilde{d}\tilde{g})^L\right]\\
&+\sum_r b_r(P^r)^B\cdot(P^r)^B.
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

这是一个由微观参数表示的单体加两体 sdg 相互作用玻色子哈密顿．当 $G_0=G_2=G_4$ 时它是厄米的．将非厄米的 $H^B_{SP(10)}$ 对角化，能得到实的本征值，这些本征值与 $H_{SP(10)}$ 在 $(S^\dagger D^\dagger G^\dagger)^N$ 的子空间中的本征值相同．一般映像哈密顿 $H^B_{SP(10)}$ 的能谱需数值计算，只有在极限情况下，能谱有解析解的形式．

当 $G_0=G_2=G_4$，$b_2=b_4$ 时，$SP(10)$ 群具有如下的约化：

$$SP(10)\supset SU(5)\supset SO(5)\supset SO(3)$$

相应子群生成元的玻色子映像 $(P_\mu^r)^B$ 是标准的 sdg IBM 子群 $SU(5)$ 生成元，利用 $(P_\mu^r)^B$ 与 sdg IBM 二次 Casimir 算子的关系，$H_{SP(10)}^B$ 可约化成厄米的 sdg IBM $SU(5)$ 群的哈密顿.

$$H_{SU(5)}^B=H_0^B+\frac{1}{4}(b_4-G_4)C_{2SU(5)}+\frac{1}{4}(b_3-b_4)C_{2SO(5)}+\frac{1}{8}(b_1-b_3)J^2. \tag{3.33}$$

因此激发态能谱

$$E^*=\frac{1}{4}(b_4-G_4)\left[\sum_{i=1}^{4}f_i(f_i+1-2i)-\frac{n(n-25)}{5}\right]+\frac{1}{8}(b_3-b_4)[\omega_1(\omega_1+3)+\omega_2(\omega_2+1)]+\frac{1}{8}(b_1-b_3)J(J+1). \tag{3.34}$$

其中 $n=\sum_{i=1}^{4}f_i$，$(f_1f_2f_3f_4)$ 为 $SU(5)$ 群的不可约表示，$(\omega_1\omega_2)$ 为 $SO(5)$ 群的不可约表示，J 为角动量.

4 讨 论

本文用 Generalized Dyson 玻色子映射方法求出了 $SP(4k+2)$ 精确的玻色子映像，由(3.14—3.17)式，$k=1$ 时给出 $SP(6)$ 精确的 sd 玻色子映像与文献结果[5]一致，进而 $k=2$ 时，给出 $SP(10)$ 精确的 sdg 玻色子映像. 其生成元的玻色子映像有与式(2.4a—4c)同构的代数对易关系. 类似地在 i-active 情形中，其映像结果相当于将(3.14—3.17)式中 k 代换成 i 就给出 $SO(4i+2)$ 精确的玻色子映像. $i=\frac{5}{2}$ 时给出 $SO(12)$ 玻色子映像.

玻色子映像哈密顿 $H_{SP(10)}^B$ 一般是非厄米的，只有在各项对力相互作用强度参数相等时，才转化为厄米的形式. $H_{SO(12)}^B$ 也是如此. 在 $SO(8)$ 模型中，已证明存在一个相似变换可使 $H_{SO(8)}^B$ 厄米化[13]，而在 $SP(6)$ 模型中不存在变换 $f(n_s,n_d)H_{SP(6)}^Bf^{-1}(n_s,n_d)$ 使之厄米化[5]，是否存在某种变换形式可将 $H_{SP(10)}^B$ 及 $H_{SO(12)}^B$ 厄米化同时保持其单体加两体相互作用形式仅是一个待研究的问题.

在极限情形下，多极矩算符的玻色子映像 $(P_\mu^r)^B(r=1、2、3、4)$ 与 sdg IBM $SU(5)$ 子群生成元相对应，沿着这条群链能将 $H_{SP(10)}^B$ 约化成为厄米的 sdg IBM $SU(5)$ 玻色子哈密顿的形式，这与在 $SO(8)$ 模型中，$(P_\mu^r)^B(r=1、2、3)$ 对应 sd IBM $SO(6)$ 生成元以及在 $SP(6)$ 模型中 $(P_\mu^r)^B(r=1、2)$ 对应 sd IBM $SU(3)$ 生成元类似，其各自模型的玻色子映像哈密顿都存在一条约化到厄米的与 IBM 哈密顿相对应的途径. 另外，在 SO

(12) 对称群中，其多极矩算符 $P^r_u(r=1、2、3、4、5)$ 的玻色子映像与 sdg IBM $SU(6)$ 生成元相对应。而重要的 sdg IBM 转动极限 $SU(3)$ 子群生成元与含G对的 FDSM 生成元的玻色子映像缺乏对应，因此 sdg IBM 中的 $SU(3)$ 子群能否被含G对 FDSM 覆盖就成了一个问题。

参 考 文 献

[1] J.N. Ginocchio, *Ann. Phys.*, **126**(1980) 234.
[2] C.-L. Wu, D.H.Feng, X.-G. Chen and M.W. Guidry, *Phys. Rev.*, **C36**(1987)1157.
[3] A.Klein and E.R. Marshalek, *Rev. Mod. Phys.*, **63**(1991)375.
[4] F. Iachello and A.Arima, The Interacting Boson Model, (Cambridge University Press, 1987).
[5] E.A. de kock and H.B. Geyer, *Phys. Rev.*, **C43**(1991)1177.
[6] A.Arima, *Nucl. Phys.*, **A421**(1984)63C.
[7] 潘峰，曹雨芳，潘桢镛，高能物理与核物理，**15**(1991)647.
[8] D.Janssen, F. Donau, S.Frauendorf and R.V. Jolos, *Nucl. Phys.*, **A224**(1971)93.
[9] H.B. Geyer and F.J.W. Hahne, *Nucl. Phys.*, **A363**(1981)45.
[10] G.-K.Kim and C.M. Vincent, *Phys. Rev.*, **C37**(1988)2176.
[11] A.Arima, H.Horie and Y. Tanabe, *Prog. Theor. Phys.*, **11**(1954)143.
[12] 凌寅生，高能物理与核物理，**6**(1982)77.
[13] G.-K. Kim and C.M. Vincent, *Phys. Rev.*, **C35**(1987)1517.

Dyson Boson Realization of the Fermion Dynamical Symmetry *SP*(10) Model with G Pairs

Shao Bin

(*Department of Physics, Capital Normal University, Beijing* 100037)

Received on May 25, 1992

Abstract

The $SP(10)$ or $SO(12)$ fermion dynamical symmetry group is constructed when G pairs are included in the fermion dynamical symmetry model. In this paper, an exact boson realization of the $SP(10)$ group is shown by the application of the generalized Dyson boson mapping. The boson images of the $SU(5)$ subgroup generators are the same as the generators of the sdg interacting boson model (IBM) $SU(5)$ limit. The formula of the $SU(5)$ energy spectra in the phenomenological sdg IBM can be expressed in the microscopic parameters of the fermion dynamical symmetry model.

Key Words Generalized dyson mapping, Dynamical symmetry, Pseudospin, Pseudo-orbital angular momentum.