第17卷 第9期
1993年9月

高能物理与核物理
HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS

Vol. 17, No. 9
Sept., 1993

量子张量偶及量子群的实现*

吴可 郭汉英
(中国科学院理论物理研究所,中国高等科学技术中心,北京 100080)

摘 要

本文明确提出了张量积偶的概念,从而给出了量子群和量子包络代数的简单明了的联系.

一、引 言

量子群和量子包络代数的关系,自量子群概念提出后,已有不少讨论[1—4]. 但如何由量子包络代数实现量子群,即用量子包络代数给出量子群的一个表示,如基础表示,至今未见明确答案[5]. 本文作者虽已讨论过此问题[6],仍感到不尽完善. 我们将继续[6]中的讨论,给出一个直接方法构造量子群,而不象文献[6]那样经过两次对偶关系.

尽管本文的讨论对任意矩阵量子群都成立,但为了让读者明了主要想法,仍用量子群 $SL_q(2)$和量子包络代数 $U_q(sl_2)$为例给出全部计算. 第二节将给出本文所用的符号和约定,即给出 $SL_q(2)$和 $U_q(sl_2)$的主要公式;第三节,我们采用和 Faddeev 等不同的对偶定义[2],把 $U_q(sl_2)$写成 $SL_q(2)$上的线性泛函;第四节,构造量子群 $SL_q(2)$,即给出它的基础表示,具体方法是做两个具有一定对偶关系的 Hopf 代数或量子包络代数的张量积,可简称为张量积偶方法,其原始想法已在 Woronowitz 等讨论量子 Lorentz 群时出现过.

二、量子群 $SL_q(2)$和量子包络代数 $U_q(sl_2)$

量子群 $SL_q(2)$是指由四个生成元 a,b,c,d 生成的具有单位的 C-代数,具有如下非交换且非余交换的 Hopf 代数,其代数关系定义如下

$$\begin{aligned} &ab = qba, ac = qca, bd = qdb, \\ &cd = qdc, bc = cd, ad - da = \lambda bc, \\ &ad - qbc = 1, \lambda = q - q^{-1}. \end{aligned} \tag{1}$$

此关系也可写成矩阵方程

$$R_{12}T_1T_2 = T_2T_1R_{12},$$

---

* 国家自然科学基金和科学院基金资助.

本文1992年9月4日收到.

$$\det_q T = 1, \tag{2}$$

其中

$$R_{12} = \begin{pmatrix} q^{\frac{1}{2}} & & & \\ & q^{-\frac{1}{2}} & & \\ & q^{-\frac{1}{2}}\lambda, & q^{-\frac{1}{2}} & \\ & & & q^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$T_1 = T \otimes 1, T_2 = 1 \otimes T_2,$$

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{4}$$

其余代数关系由代数同态余乘法 Δ，余单位 ε 以及代数反同态余逆 s 给出，具体定义如下：

$$\Delta\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\otimes a + b\otimes c & a\otimes b + b\otimes d \\ c\otimes a + d\otimes c & c\otimes b + d\otimes d \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\varepsilon\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$s\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -q^{-1}b \\ -qc & a \end{pmatrix}. \tag{7}$$

而量子包络代数 $U_q(sl_2)$ 是由 k, k^{-1}, e, f 生成的具有单位元 1 的非交换也非余交换的 Hopf 代数. 相应的乘法，余乘法，余单位、余逆运算定义如下：

$$\begin{aligned} & ke = qek, kf = q^{-1}fk, k^{-1}k = 1, \\ & [e,f] = \frac{k^2 - k^{-2}}{q - q^{-1}}, \\ & \Delta(k) = k \otimes k, \\ & \Delta(e) = e \otimes k^{-1} + k \otimes e, \\ & \Delta(f) = f \otimes k^{-1} + k \otimes f, \\ & \varepsilon(k) = 1, \varepsilon(e) = \varepsilon(f) = 0, \\ & s(k) = k^{-1}, s(e) = -q^{-1}e, s(f) = -qf. \end{aligned} \tag{8}$$

有关 $SL_q(2)$ 和 $U_q(sl_2)$ 作为 Hopf 代数，其运算要满足的一系列相容性条件可分别参阅文献[2]和[6].

三、$SL_q(2)$ 上的线性泛函和 $U_q(sl_2)$

量子包络代数作为量子群上的线性泛函已有很多讨论，例如见文献[2,3,4,6]，本文采用一种与上述文献不同的约定，其特点可以避免文献[6]中形变参数 q 到 q^{-1} 的变换，使全部讨论在同一形变参数 q 下进行.

设 L^+ 是量子群 $SL_q(2)$ 上的线性泛函，它满足

$$\langle l_{ij}^+, t_{ke} \rangle = (R^+)^{-1}_{ik,je}, \tag{9}$$

$$\langle l_{ij}^{-}, t_{ke}\rangle = R_{ik,je}. \tag{10}$$

其中，$(R^{+})^{-1}$，的记号见文献[2]，写出来

$$(R^{+})^{-1} = \begin{pmatrix} q^{-\frac{1}{2}} & & & \\ & q^{\frac{1}{2}}, & -q^{\frac{1}{2}}\lambda & \\ & 0 & q^{\frac{1}{2}} & \\ & & & q^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

把全部非0的对偶关系写下来，即为

$$\begin{aligned} &\langle l_{11}^{+}, a\rangle = q^{-\frac{1}{2}}, \langle l_{11}^{+}, d\rangle = q^{\frac{1}{2}}, \langle l_{12}^{+}, c\rangle = -q^{\frac{1}{2}}\lambda, \\ &\langle l_{22}^{+}, a\rangle = q^{\frac{1}{2}}, \langle l_{22}^{+}, d\rangle = q^{-\frac{1}{2}}, \\ &\langle l_{11}^{-}, a\rangle = q^{\frac{1}{2}}, \langle l_{11}^{-}, d\rangle = q^{-\frac{1}{2}}, \langle l_{21}^{-}, b\rangle = q^{-\frac{1}{2}}\lambda, \\ &\langle l_{22}^{-}, a\rangle = q^{-\frac{1}{2}}, \langle l_{22}^{-}, d\rangle = q^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{12}$$

于是不妨设

$$l_{21}^{+} = l_{12}^{-} = 0. \tag{13}$$

类似于文献[2]中讨论，可以证明 $L^{\pm}$ 满足如下的代数关系

$$R_{12}L_1^{\pm}L_2^{\pm} = L_2^{\pm}L_1^{\pm}R_{12}. \tag{14}$$

$$R_{12}L_1^{-}L_2^{+} = L_2^{+}L_1^{-}R_{12}. \tag{15}$$

以及由定义推出的它所满足的余乘法关系

$$\Delta L^{\pm} = L^{\pm} \otimes L^{\pm}. \tag{16}$$

由(14)(15)式知，其中非平凡的乘法关系为：

$$\begin{aligned} &l_{11}^{+}l_{12}^{+} = q l_{12}^{+}l_{11}^{+}, l_{12}^{+}l_{22}^{+} = q l_{22}^{+}l_{12}^{+}, \\ &l_{11}^{-}l_{21}^{-} = q l_{21}^{-}l_{11}^{-}, l_{21}^{-}l_{22}^{-} = q l_{22}^{-}l_{21}^{-}, \\ &l_{12}^{+}l_{11}^{-} = q l_{11}^{-}l_{12}^{+}, l_{11}^{+}l_{21}^{-} = q^{-1} l_{21}^{-}l_{11}^{+}, \\ &l_{12}^{+}l_{22}^{-} = q^{-1} l_{22}^{-}l_{12}^{+}, l_{22}^{+}l_{21}^{-} = q l_{21}^{-}l_{22}^{+}, \\ &l_{12}^{+}l_{21}^{-} - l_{21}^{-}l_{12}^{+} = \lambda(l_{22}^{+}l_{11}^{-} - l_{22}^{-}l_{11}^{+}). \end{aligned} \tag{17}$$

并可类似于[2]中设

$$l_{11}^{+}l_{22}^{+} = l_{11}^{-}l_{22}^{-} = l_{11}^{+}l_{11}^{-} = l_{11}^{-}l_{11}^{+} = l_{22}^{+}l_{22}^{-} = l_{22}^{-}l_{22}^{+} = 1. \tag{18}$$

于是可知 $L^{\pm}$ 的余逆运算由下式给出

$$s(L^{+}) = \begin{pmatrix} l_{22}^{+} & -q^{+} l_{12}^{+} \\ & l_{11}^{+} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

$$s(L^{-}) = \begin{pmatrix} l_{22}^{-} & \\ -q l_{21}^{-} & l_{11}^{-} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

如果设

$$L^{+} = \begin{pmatrix} k & \lambda e \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}, L^{-} = \begin{pmatrix} k^{-1} & 0 \\ -\lambda f & k \end{pmatrix}, \tag{21}$$

不难直接看出由 $\{1, L^{\pm}\}$ 生成的 Hopt 代数就是第二节中给出的量子包络代数 $U_q(sl_2)$.

又如果设

$$L^{+}=\begin{pmatrix} k & \lambda e \\ & k^{-1} \end{pmatrix}, L^{-}=\begin{pmatrix} \bar{k}^{-1} & \\ -\lambda f & \bar{k} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

那末由$\{1,L^{+}\}$生成的 Hopf 代数正是文献[8,9]给出的 B^{+}，而$\{1,L^{-}\}$生成的 Hopf 代数正是上面文献中给出的 B^{-}. 其中各自的代数关系分别由(14)式中的＋，－两式给出. 而它们之间的对偶关系，根据文献[8—9]知，可用 l_{ij}^{+} l_{ij}^{-} 表成如下关系式

$$\begin{aligned} \langle l_{11}^{+}, l_{11}^{-}\rangle &= \langle l_{22}^{+}\, l_{22}^{-}\rangle = q^{\frac{1}{2}}, \\ \langle l_{22}^{+}, l_{11}^{-}\rangle &= \langle l_{11}^{+}\, l_{22}^{-}\rangle = q^{-\frac{1}{2}}, \\ \langle l_{12}^{+}, l_{21}^{-}\rangle &= q^{-\frac{1}{2}}\lambda. \end{aligned} \tag{23}$$

排成矩阵，其元素为

$$\langle l^{+}, l^{-}\rangle_{ik,je} = \langle l_{ij}^{+}, l_{ke}^{-}\rangle. \tag{24}$$

写出来

$$\begin{pmatrix} q^{\frac{1}{2}} & & & \\ & q^{-\frac{1}{2}} & q^{-\frac{1}{2}}\lambda & \\ & & q^{-\frac{1}{2}} & \\ & & & q^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix},$$

正好是 R^{+}.

由量子偶的定义知

$$l_{kl}^{-} l_{ij}^{+} = \sum \langle l_{im}^{+}, s(l^{-})_{kp}\rangle l_{mn}^{+} l_{pq}^{-} \langle l_{nj}^{+}, l_{ql}^{-}\rangle. \tag{25}$$

也就是说

$$l_{kl}^{-} l_{ij}^{+} = (R^{+})^{-1}_{ik,mp} l_{mn}^{+} l_{pq}^{-} R^{+}_{nq,je},$$

即

$$R^{+}_{mp.ik} l_{ke}^{-} l_{ij}^{+} = l_{mn}^{+} l_{pq}^{-} R^{+}_{nq,je},$$

$$R_{pm,ki} l_{ke}^{-} l_{ij}^{+} = l_{mn}^{+} l_{pq}^{-} R_{qn,ej},$$

就是

$$R_{12} l_{1}^{-} L_{2}^{+} = L_{2}^{+} L_{1}^{-} R_{12}. \tag{26}$$

由此我们证明了量子偶的全部公式可由方程(14,15,16,19,20)给出.

四、Hopf 代数的张量积偶

由上节讨论可知由 Hopf 代数 L^{+}和 L^{-}. 按通常的量子偶方法构造出量子包络代数 $U_{q}(sl_{2})$. 本节我们用张量积偶的方法，来构造量子群 $SL_{q}(2)$.

我们定义，2×2 矩阵 $T'=L^{+}\dot{\otimes}L^{-}$

$$T' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11}^{+}\otimes l_{11}^{-} + l_{12}^{+}\otimes l_{21}^{-} & l_{12}^{+}\otimes l_{22}^{-} \\ l_{22}^{+}\otimes l_{21}^{-} & l_{22}^{+}\otimes l_{22}^{-} \end{pmatrix}. \tag{27}$$

由于 L^{+}和 L^{-}都满足方程(14)，因此他们的张量积也满足同一方程

$$R_{12}T'_{1}T'_{2} = T'_{2}T'_{1}R_{12}. \tag{28}$$

也可以直接验证. 如

$$
\begin{aligned}
a'b' &= (l_{11}^{+} \otimes l_{11}^{-} + l_{12}^{+} \otimes l_{21}^{-}) \cdot (l_{12}^{+} \otimes l_{22}^{-}) \\
&= l_{11}^{+} l_{12}^{+} \otimes l_{11}^{-} l_{22}^{-} + l_{12}^{+} l_{12}^{+} \otimes l_{21}^{-} l_{22}^{-} \\
&= q l_{12}^{+} l_{11}^{+} \otimes l_{22}^{-} l_{11}^{-} + q l_{12}^{+} l_{12}^{+} \otimes l_{22}^{-} l_{21}^{-} \\
&= q (l_{12}^{+} \otimes l_{22}^{-})(l_{11}^{+} \otimes l_{11}^{-} + l_{12}^{+} \otimes l_{21}^{-}) \\
&= q b' a' ,
\end{aligned}
\tag{29}
$$

及

$$
\begin{aligned}
& a'd' - q b'c' \\
&= (l_{11}^{+} \otimes l_{11}^{-} + l_{12}^{+} \otimes l_{21}^{-}) \cdot (l_{22}^{+} \otimes l_{22}^{-}) - q (l_{12}^{+} \otimes l_{22}^{-}) \cdot (l_{22}^{+} \otimes l_{21}^{-}) \\
&= l_{11}^{+} l_{22}^{+} \otimes l_{11}^{-} l_{22}^{-} + l_{12}^{+} l_{22}^{-} \otimes l_{21}^{-} l_{22}^{-} - q l_{12}^{+} l_{22}^{+} \otimes l_{22}^{-} l_{21}^{-} \\
&= 1 \otimes 1 \\
&= 1 .
\end{aligned}
\tag{30}
$$

若要证明 $T' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ 确实给出量子群 $SL_q(2)$ 还须给出它的余代数结构和余逆运算. 显然 T' 上的余乘法不能象代数乘法那样, 由 $L^{\pm}$ 的余乘法

$$
\begin{aligned}
\Delta L^{+} &= \begin{pmatrix} l_{11}^{+} \otimes l_{11}^{-}, & l_{11}^{+} \otimes l_{12}^{+} + l_{12}^{+} \otimes l_{22}^{+} \\ & l_{22}^{+} \otimes l_{22}^{+} \end{pmatrix}, \\
\Delta L^{-} &= \begin{pmatrix} l_{11}^{-} \otimes l_{11}^{-} & \\ l_{21}^{-} \otimes l_{11}^{-} + l_{22}^{-} \otimes l_{21}^{-}, & l_{22}^{-} \otimes l_{22}^{-} \end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{31}
$$

简单地拼在一起得到. 据[6—7]的讨论需引入非平凡的交换性质 $\sigma^{\otimes}$, 加上标 $\otimes$ 用以说明它是定义上张量积偶的交换关系, 以区别通常张量空间的交换 σ

$$
\sigma^{\otimes}. : L^{+} \dot{\otimes} L^{-} \longrightarrow L^{-} \dot{\otimes} L^{+} .
\tag{32}
$$

具体为

$$
\begin{aligned}
\sigma^{\otimes} (l_{11}^{+} \otimes l_{11}^{-} + l_{12}^{+} \otimes l_{21}^{-}) &= l_{11}^{-} \otimes l_{11}^{+} , \\
\sigma^{\otimes} (l_{12}^{+} \otimes l_{22}^{-}) &= l_{11}^{-} \otimes l_{12}^{+} , \\
\sigma^{\otimes} (l_{22}^{+} \otimes l_{21}^{-}) &= l_{21}^{-} \otimes l_{11}^{+} , \\
\sigma^{\otimes} (l_{22}^{+} \otimes l_{22}^{-}) &= l_{21}^{-} \otimes l_{12}^{+} + l_{22}^{-} \otimes l_{22}^{+} .
\end{aligned}
\tag{33}
$$

于是, 类似于[7]中讨论定义

$$
\Delta = (id \otimes \sigma^{\otimes} \otimes id)(\Delta_{L^{+}} + \otimes \Delta_{L^{-}})
\tag{34}
$$

不直接验证

$$
\begin{aligned}
\Delta \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} &= (id \otimes \sigma^{\otimes} \otimes id)(\Delta_{L^{+}} \otimes \Delta_{L^{-}})(L^{+} \dot{\otimes} L^{-}) \\
&= (id \otimes \sigma^{\otimes} \otimes id)(L^{+} \dot{\otimes} L^{+} \dot{\otimes} L^{-} \dot{\otimes} L^{-}) \\
&= (L^{+} \dot{\otimes} L^{-}) \dot{\otimes} (L^{+} \dot{\otimes} L^{-}) \\
&= \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \dot{\otimes} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} .
\end{aligned}
\tag{35}
$$

具体有

$$
\begin{aligned}
\Delta a' &= (id \otimes \sigma^{\otimes} \otimes id)(\Delta_{L^+} \otimes \Delta_{L^-})a' \\
&= (id \otimes \sigma^{\otimes} \otimes id)(l_{11}^{+} \otimes l_{11}^{+} \otimes l_{11}^{-} \otimes l_{11}^{-} \\
&\qquad + (l_{11}^{+} \otimes l_{12}^{+} + l_{12}^{+} \otimes l_{22}^{+}) \otimes (l_{21}^{-} \otimes l_{11}^{-} + l_{22}^{-} \otimes l_{21}^{-})) \\
&= l_{11}^{+} \otimes l_{11}^{-} \otimes l_{11}^{+} \otimes l_{11}^{-} + l_{11}^{+} \otimes_{11}^{-} \otimes l_{12}^{+} \otimes l_{11}^{-} \\
&\quad + l_{11}^{+} \otimes l_{21}^{-} \otimes l_{11}^{+} \otimes l_{11}^{-} + l_{12}^{+} \otimes l_{21}^{-} \otimes l_{12}^{+} \otimes l_{21}^{-} \\
&\quad + l_{12}^{+} \otimes l_{22}^{-} \otimes l_{22}^{+} \otimes l_{21}^{-} \\
&= a' \otimes a' + b' \otimes c'.
\end{aligned} \tag{36}
$$

而余单位定义是显然的,即

$$
\varepsilon = \varepsilon_{L_+} \otimes \varepsilon_{L_-}. \tag{37}
$$

于是,不难验证

$$
\varepsilon \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{38}
$$

最后来看余逆定义由下述给出

$$
s = \sigma(s_{L_-} \otimes s_{L_+})\sigma^{\otimes}。 \tag{39}
$$

直接验证

$$
\begin{aligned}
sa' &= \sigma(s_{L_-} \otimes s_{L_+})\sigma^{\otimes} a' \\
&= \sigma(s_{L_-} \otimes s_{L_+}) \cdot l_{11}^{-} \otimes l_{11}^{+} \\
&= \sigma(l_{22}^{-} \otimes l_{22}^{+}) \\
&= l_{22}^{+} \otimes l_{22}^{-} = d', \qquad (40) \\
sb' &= \sigma(s_{L_-} \otimes s_{L_+})\sigma^{\otimes} b' \\
&= \sigma(s_{L_-} \otimes l_{L_+}) l_{11}^{-} \otimes l_{12}^{+} \\
&= \sigma(l_{22}^{-} \otimes (-q^{-1} l_{12}^{+})) \\
&= -q^{-1} l_{12}^{+} \otimes l_{22}^{-} \\
&= -q^{-1} b.
\end{aligned}
$$

类似可知

$$
\begin{aligned}
sc' &= -qc', \\
sd' &= a'.
\end{aligned} \tag{41}
$$

于是我们完成了由量子包络代数 $U_q(sl_2)$ 到量子群 $SL_q(2)$ 的实现. 这种实现和通常李代数到李群的关系完全不同. 其原因之一在于, $SL_q(2)$ 表示的不是形变群本身,而是形变群上的连续函数.

参　考　文　献

[1] V. G. Drinfeld, Quantum Groups, Proc. I. C. M. Berkeley (1986), 798.

[2] L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin and L. A. Takhatajan, *Leningrad Math.* J., **1**(1990), 193.

[3] S. Majid, *Inter. J. Mod. Phys.*, **A5**(1990), 1.

[4] N. Burroughs. *Comm. Math. Phys.*, **133**(1990), 91.

[5] P. Kulish, Private communication.

[6] 吴可,郭汉英,章人杰,高能物理与核物理,**17**(1993),262.

[7] P. Podles and S. L. Woronowicz,*Comm. Math. Phys.*,**130**(1990),381.

[8] M. Jimbo,in Nankai Lecture Notes Series,ed. M. L. Ge,World Scientific Pub. (1992).

[9] 马中骐,在CCAST"量子群和低维场论"工作月的报告(1992).

Quantum Tensor Double and Realization of Quantum Groups

WU KE GUO HANYING

(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica, Beijing* 100080)

ABSTRACT

We propose the conception of quantum tensor-product double whereupon we show a simple and explicit relation between a given quantum group and its quantum algebra.