

# 转动谱公式的综合研究\*

徐辅新<sup>1)</sup> 徐 霓

(安徽大学物理系, 合肥 230039)

## 摘 要

利用钢系和稀土偶偶核基转动带(GRB)的实验数据,对目前常用的原子核基转动谱的3类(共8个)公式进行了综合比较,指出了这些公式的转动谱计算值同实验转动谱之间的方均根差.还对 $I(I+1)$ 四参数展开公式的系数进行了分析,提出了四参数关系的新公式.本文关于 $\omega^2$ 展开公式的研究结果,得到了关于 $\omega^2$ 展开公式的新结论.对W-Z两参数和三参数公式的分析表明,该公式是一个很好的公式.所有这些结果对于原子核转动谱的深入研究都有着重要的参考价值.

## 一、引 言

原子核作为一个量子体系,只有在存在形变的情况下才有转动.若把原子核视为刚性转子,且令其转动惯量为 $J$ ,则原子核将绕垂直于对称轴的某一轴旋转,转动能为 $E(I) = \frac{1}{2J}I(I+1)$ ,式中 $I$ 为核的转动角动量.实验分析表明,稳定形变核,当 $I$ 很小时( $<10\hbar$ )基本符合上述规律.但当 $I$ 增大时,实验能谱偏离 $I(I+1)$ 的规律.当考虑振动的影响时,Bohr和Mottelson将转动谱公式修正为以下形式<sup>[1]</sup>,

$$E(I) = AI(I+1) + B[I(I+1)]^2, \quad (1)$$

随着更高 $I$ 值的能级被测定,(1)式与实验的偏离愈来愈大.为了说明实验结果,需要引入更高次项.Bohr和Mottelson根据对称性考虑,证明轴对称转子的转动能是 $I(I+1)$ 展开的函数<sup>[1]</sup>,

$$E(I) = AI(I+1) + B[I(I+1)]^2 + C[I(I+1)]^3, \quad (2)$$

$$E(I) = AI(I+1) + B[I(I+1)]^2 + C[I(I+1)]^3 + D[I(I+1)]^4, \quad (3)$$

.....

六十年代,Harris提出用 $\omega^2$ 展开代替 $I(I+1)$ 展开<sup>[2]</sup>,

$$E(\omega) = \alpha\omega^2 + \beta\omega^4, \quad (4)$$

\* 国家自然科学基金和省教委基金资助.

1) 中国科学院理论物理所客座研究员.

本文1992年3月26日收到.

$$E(\omega) = \alpha\omega^2 + \beta\omega^4 + \gamma\omega^6, \quad (5)$$

$$E(\omega) = \alpha\omega^2 + \beta\omega^4 + \gamma\omega^6 + \delta\omega^8, \quad (6)$$

其中,  $\omega$  为原子核绕垂直于对称轴的任一轴(如  $x$  轴)的转动频率.  $\omega$  不是直接可测量的. 但可由实验转动谱正则关系

$$\hbar\omega = \frac{dE}{dI_x}, \quad I_x = \left[ \left( I + \frac{1}{2} \right)^2 - K^2 \right]^{1/2} \quad (7)$$

得到. 其中  $K$  为原子核角动量沿对称轴投影. 七十年代, 分析结果表明  $\omega^2$  展开的收敛性优于  $I(I+1)$  展开. Mottelson 指出, 若认为  $\omega^2$  二参数公式(4)能拟合转动谱的实验数据, 则按  $I(I+1)$  展开的四参数展开式(3)中, 只有两个独立参数, 并可证明

$$\frac{C}{4A} = \left( \frac{B}{A} \right)^2, \quad \frac{D}{24A} = \left( \frac{B}{A} \right)^3, \quad (8)$$

Bohr 曾分析了  $^{168}\text{Er}$ ,  $^{178}\text{Hf}$ ,  $^{162}\text{Gd}$  三个核, 认为(8)式符合实验<sup>[1]</sup>.

吴崇试和曾谨言从 Bohr 哈密顿量出发, 计及稳定形变核较小的非轴对称性和振动效应的影响, 得到一个简单的封闭的二参数公式<sup>[3]</sup>

$$E(I) = a \{ [1 + bI(I+1)]^{1/2} - 1 \}, \quad (9)$$

(9)式即使在自旋值很高的情况下都与实验符合. 吴-曾还曾提出一个三参数公式<sup>[4]</sup>

$$E(I) = a \{ 1 + c[bI(I+1)]^{1/2} \} \{ [1 + bI(I+1)]^{1/2} - 1 \}, \quad (10)$$

(9)式对  $I(I+1)$  作幂级数展开可证明

$$\frac{AC}{4B^2} = \frac{1}{2}, \quad \frac{A^2D}{24B^3} = \frac{5}{24}, \quad (11)$$

由(9)式所得的(11)式与由 Harris 公式(4)所得的(8)式有很大的差别.

本文根据钢系和稀土偶偶核转动谱的最新实验数据, 用最小二乘法和阻尼最小二乘法对上述各种转动谱公式及其主要结论作了科学的分析, 得出了更符合实验事实的新结论.

## 二、分析方法、结果及结论

1. 用钢系和稀土区偶偶核基转动带(GRB)的实验数据, 用最小二乘法, 由(1)、(2)和(3)式分别求出  $A, B; A, B, C; A, B, C, D$  等参数(见表 1).

Bohr 和 Mottelson 在七十年代曾认为公式(3)中,  $A, B, C, D$  四个参数的关系应符合(8)式, 即应有

$$\frac{AC}{4B^2} - \frac{A^2D}{24B^3} = 0, \quad (8)'$$

而根据(11)式, 得到四参数关系应为

$$\frac{AC}{4B^2} - \frac{A^2D}{24B^3} = \frac{7}{24}, \quad (11)'$$

用表 1 中的数据极易得出(11)'式更符合实验的结论(见图 1). 可见, 用最小二乘法拟合所得的  $I(I+1)$  展开系数值与由二参数  $\omega^2$  公式(4)所预言的值(8)'式有重大偏离, 而  $I(I+1)$  展开系数与由吴-曾二参数公式(9)所得的(11)'非常接近.

表1 镧系区14个核和稀土区15个核的参数

核	A	B	C	D	$I_m$	核	A	B	C	D	$I_m$
$^{248}\text{Cm}$	6.9876	-1.7138			28	$^{178}\text{Hf}$	15.3935	-10.1963			16
	7.2232	-2.7013	0.9018				15.5628	-12.2639	5.4815		
	7.2212	-2.6856	0.8674	0.0225			15.5424	-11.7912	2.4164	5.9119	
$^{244}\text{Pu}$	7.1521	-1.7421			26	$^{176}\text{Hf}$	14.4808	-9.0143			14
	7.3189	-2.5481	0.8488				14.7370	-13.0456	13.7482		
$^{242}\text{Pu}$	7.4204	-3.4594	3.1463	-1.7300	24	$^{174}\text{Hf}$	14.7742	-14.1717	23.2669	-23.8595	20
	7.1878	-1.8341	1.1830				14.1216	-8.0299	13.1639		
$^{240}\text{Pu}$	7.4299	-3.5428	3.3767	-1.9291	14	$^{172}\text{Hf}$	15.1465	-16.7394	17.9105	-5.9424	16
	7.0877	-2.5748					15.0576	-11.2082	18.8567		
	7.1472	-3.5113	3.1937				15.6403	-18.3213	18.8567		
$^{238}\text{Pu}$	7.1611	-3.9318	6.7486	-8.9121	18	$^{170}\text{Hf}$	15.8470	-23.1203	50.0259	-60.1884	16
	7.2338	-2.0163					15.1612	-13.4119	35.5262		
$^{236}\text{Pu}$	7.3278	-2.9331	1.9449		16	$^{176}\text{Yb}$	16.2590	-26.8130	102.0780	-128.5062	16
	7.3689	-3.6894	5.8433	-5.9853			16.7005	-37.0606	13.6799	-6.1076	
$^{238}\text{U}$	7.3147	-2.7969	1.5947		28	$^{174}\text{Yb}$	13.7235	-6.6399	1.4111		20
	7.3523	-3.1265	-0.1691	3.4027			13.7127	-6.3887	-0.2158	3.1358	
$^{236}\text{U}$	7.0528	-1.8765			28	$^{172}\text{Yb}$	12.4826	-3.6365			16
	7.3516	-3.1289	1.1438				12.7220	-5.5476	3.3193		
$^{234}\text{U}$	7.4305	-3.7415	2.4816	-0.8725	28	$^{170}\text{Yb}$	12.7769	-6.3694	6.7705	-4.3207	14
	7.4403	-3.3613	1.3541				12.9296	-4.3563	6.0482		
$^{232}\text{U}$	7.5130	-3.9258	2.5870	-0.8040	28	$^{168}\text{Yb}$	13.1164	-6.6377	11.9301	-11.3621	16
	6.6272	-1.6958					13.1554	-7.5428	14.0050	-8.6827	
$^{230}\text{U}$	7.0319	-3.3922	1.5492		20	$^{166}\text{Er}$	13.9588	-7.9550	2.4817		14
	7.2021	-4.7150	4.4380	-1.8841			14.0890	-11.2232	23.9482	-53.7949	
$^{228}\text{U}$	7.5834	-3.0357			20	$^{164}\text{Er}$	14.0834	-10.3603	15.1207		16
	7.8371	-5.0608	3.5173				14.5507	-16.0640	14.6788	-19.0394	
$^{230}\text{Th}$	7.9261	-6.3935	9.1143	-7.0071	16	$^{162}\text{Er}$	13.1832	-8.4180	34.4468	-37.3212	16
	8.2829	-4.5536					13.4634	-11.8384	9.0675		
$^{232}\text{Th}$	8.5621	-7.9616	9.0346		28	$^{164}\text{Dy}$	13.4777	-12.1708	11.2302	-4.1813	14
	8.6394	-9.7576	20.7006	-22.5283			14.9084	-9.7837	14.4795		
$^{230}\text{Th}$	7.3522	-2.0967			22	$^{162}\text{Dy}$	15.1784	-14.0294	47.1506	-81.8689	14
	7.8930	-4.3631	2.0698				12.1191	-5.8231	7.4619		
$^{228}\text{Th}$	8.1148	-6.0878	5.8363	-2.4567	14	$^{156}\text{Gd}$	12.2582	-8.0111	11.2696	-9.5486	18
	8.1863	-3.2668					12.2731	-8.4613	13.0494	-5.4256	
$^{228}\text{Th}$	8.6105	-6.0894	4.0890		14	$^{156}\text{Gd}$	13.3688	-8.5423	6.6115		14
	8.7832	-8.2372	11.5828	-7.7996			13.4425	-9.8982	13.6015	-10.7318	
	9.1471	-7.4647					14.1989	-11.6020	23.8711		
$^{228}\text{Th}$	9.5003	-13.0204	18.9472		14	$^{156}\text{Gd}$	14.6438	-18.6015	77.6286	-134.701	14
	9.6635	-17.9601	60.6784	-104.5656			14.8541	-21.9647			

注:  $A(\text{keV})$ ;  $B(\times 10^{-3} \text{keV})$ ;  $C(\times 10^{-6} \text{keV})$ ;  $D(\times 10^{-9} \text{keV})$ .

$I_m$  为拟合数据时的最大角动量.

从表1可以看出,  $I(I+1)$  展开系数很有规律性, 除  $^{236}\text{Pu}$  之外, 全部  $A, C$  均大于0; 除  $^{248}\text{Cm}$ ,  $^{236}\text{Pu}$ ,  $^{178}\text{Hf}$  和  $^{176}\text{Yb}$  之外, 全部  $B, D$  均小于0. 这与由吴-曾二参数公式所得之(9)式基本一致. 因为从(9)式可得

$$A = \frac{ab}{2}, \quad B = -\frac{1}{8}b^2a, \quad C = \frac{b^3}{16}a, \quad D = -\frac{5}{128}b^4a,$$

又因为  $a, b$  均为正数, 故  $A, C > 0$ ;  $B, D < 0$ . 少数核例外的原因可能是由实验误差所引起

的。

以上分析与我们以往有关分析<sup>[5]</sup>相比,不仅完全一致,而且由于所利用的实验数据更新,因此结论更为可靠。

2. 利用表 1 的参数,根据公式(1)、(2)和(3)计算出钢系和稀土区 29 个核的基转动带能谱(限于篇幅,文中未给出具体值).并根据下式,

$$\sigma = \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |(E_{\text{cal}} - E_{\text{exp}})_i|^2 \right]^{1/2}, \quad (12)$$

求出计算值和实验能谱(29 个核,共 280 条能级)之间的方均根差(见表 2 中  $\sigma_1 - \sigma_3$ ).

表 2 钢系和稀土区核能谱计算值和实验值的方均根差

	<sup>248</sup> Cm	<sup>244</sup> Pu	<sup>242</sup> Pu	<sup>240</sup> Pu	<sup>238</sup> Pu	<sup>236</sup> Pu	<sup>238</sup> U	<sup>236</sup> U	<sup>234</sup> U	<sup>232</sup> U	<sup>230</sup> U	<sup>232</sup> Th	<sup>230</sup> Th	<sup>228</sup> Th
$\sigma_1$	12.99	8.42	7.20	0.87	2.27	1.01	16.68	19.64	22.96	7.45	5.30	30.64	15.11	5.26
$\sigma_2$	0.49	2.73	1.66	0.11	0.52	0.40	2.67	2.42	5.44	1.42	0.83	7.15	3.51	1.29
$\sigma_3$	0.48	0.19	0.28	0.01	0.04	0.39	1.06	0.85	1.08	0.13	0.24	1.71	1.09	0.28
$\sigma_4$	5.91	2.50	1.21	0.05	0.08	0.47	6.21	5.72	1.19	1.49	0.42	3.16	1.61	0.50
$\sigma_5$	1.17	0.87	0.35	0.03	0.08	0.17	1.56	0.80	0.41	0.19	0.26	0.47	0.25	0.16
$\sigma_6$	0.52	0.73	0.30	0.01	0.07	0.16	0.74	0.38	0.36	0.18	0.05	0.33	0.20	0.15
$\sigma_7$	2.28	1.99	1.38	0.33	0.96	0.61	0.74	2.69	8.18	1.89	2.04	9.69	4.19	1.60
$\sigma_8$	1.83	1.99	1.10	0.33	0.96	0.61	0.69	1.27	2.10	0.50	1.13	1.21	0.86	1.41

	<sup>178</sup> Hf	<sup>176</sup> Hf	<sup>174</sup> Hf	<sup>172</sup> Hf	<sup>170</sup> Hf	<sup>176</sup> Yb	<sup>174</sup> Yb	<sup>172</sup> Yb	<sup>170</sup> Yb	<sup>168</sup> Yb	<sup>166</sup> Er	<sup>164</sup> Er	<sup>164</sup> Dy	<sup>162</sup> Dy	<sup>156</sup> Gd
$\sigma_1$	3.19	3.72	27.40	11.15	21.10	0.83	6.96	3.53	0.93	8.86	5.25	4.02	2.01	7.59	6.64
$\sigma_2$	0.34	0.34	1.32	2.25	4.71	0.11	0.94	0.41	0.65	1.38	0.21	1.00	0.13	1.08	1.68
$\sigma_3$	0.28	0.17	0.64	0.72	1.33	0.08	0.39	0.06	0.05	0.42	0.12	0.11	0.04	0.52	0.45
$\sigma_4$	6.43	1.01	7.93	3.02	3.31	11.05	0.87	0.08	2.87	4.03	12.24	1.11	1.61	0.94	1.12
$\sigma_5$	1.40	0.11	1.06	0.92	0.53	0.42	0.17	0.02	0.47	0.87	0.51	0.32	0.30	0.77	0.49
$\sigma_6$	0.35	0.10	1.06	0.24	0.18	0.37	0.14	0.02	0.13	0.24	0.19	0.09	0.08	0.22	0.13
$\sigma_7$	5.94	0.36	5.18	0.95	3.94	2.69	3.00	1.87	2.10	1.69	2.03	0.82	0.37	1.87	1.16
$\sigma_8$	4.79	0.15	4.35	0.85	3.45	1.91	1.58	1.44	2.10	1.49	2.03	0.81	0.11	0.48	1.1

从表 2 可以看出,  $\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$ , 对于钢系和稀土区 29 个核无一例外, 这就表明钢系和稀土偶偶核的最新实验数据支持了  $I(I+1)$  展开公式, 说明  $I(I+1)$  三参数和四参数展开式是较好的公式. 文献[6]曾指出: “当角动量较大时三参量(ABC)公式和四参量(ABCD)公式与实验能谱的符合情况常常比二参量(AB)公式与实验能谱的符合情况还差”. 该文中的系数是由基转动带最低的一些能级定出的, 其侧重点是研究展开式的收敛性, 而本文侧重于研究公式的计算精度, 因此两个结论不仅不矛盾, 而且互相补充。

3.  $\omega^2$  三参数、四参数拟合比  $\omega^2$  二参数拟合有明显改进. 本文按  $\omega^2$  二、三、四参数展开(4)、(5)、(6)式, 利用最新实验数据, 用阻尼最小二乘法分别拟合出  $\alpha, \beta; \alpha, \beta, \gamma; \alpha, \beta, \gamma, \delta$  参数(见表 3).

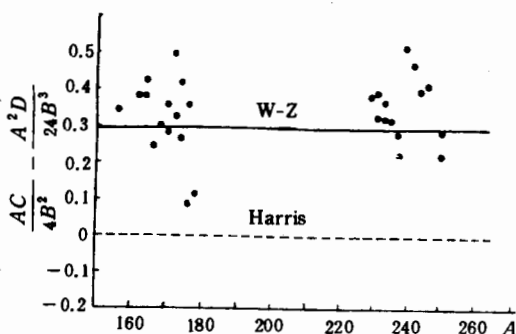


图 1  $I(I+1)$  展开系数的关系

表3 用阻尼最小二乘法拟合所得 Harris 公式参数值

核	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	核	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
$^{248}\text{Cm}$	3.3998	.3308			$^{178}\text{Hf}$	1.5774	.0752		
	3.4505	.1640	.4078			1.6101	.0221	.0656	
	3.4492	.1859	.2347	.2659		1.5975	.0630	-.0782	.1109
$^{244}\text{Pu}$	3.3394	.2892			$^{176}\text{Hf}$	1.6801	.0749		
	3.3655	.2102	.1868			1.6886	.0580	.0268	
	3.3607	.2365	.0334	.1979		1.6860	.0679	-.0127	.0348
$^{242}\text{Pu}$	3.3419	.2823			$^{174}\text{Hf}$	1.5981	.1232		
	3.3625	.2187	.1606			1.6441	.0476	.1007	
	3.3581	.2405	.0387	.1548		1.6391	.0649	.0364	.0516
$^{240}\text{Pu}$	3.4895	.2923			$^{172}\text{Hf}$	1.5410	.1162		
	3.4909	.2831	.0469			1.5637	.0745	.0620	
	3.4909	.2862	-.0246	.2758		1.5537	.1098	-.0781	.1223
$^{238}\text{Pu}$	3.3927	.2376			$^{170}\text{Hf}$	1.4345	.1787		
	3.3928	.2377	-0.0011			1.4638	.1176	.1077	
	3.3926	.2373	.0075	-0.0182		1.4565	.1467	-.0275	.1391
$^{236}\text{Pu}$	3.3693	.3042			$^{176}\text{Yb}$	1.8010	.0592		
	3.3808	.2431	.2621			1.8249	.0265	.0359	
	3.3818	.2391	.2177	.2692		1.8190	.0453	-.0280	.0476
$^{238}\text{U}$	3.2922	.4001			$^{174}\text{Yb}$	1.9504	.0536		
	3.3344	.2439	.4096			1.9548	.0473	.0069	
	3.3324	.2763	.1545	.3965		1.9551	.0469	.0072	.0001
$^{236}\text{U}$	3.2625	.3991			$^{172}\text{Yb}$	1.8986	.0500		
	3.3072	.2379	.4196			1.8980	.0512	-.0015	
	3.3055	.2599	.2444	.2726		1.8979	.0515	-.0026	.0008
$^{234}\text{U}$	3.4034	.5260			$^{170}\text{Yb}$	1.7631	.0693		
	3.4246	.4441	.2308			1.7758	.0451	.0358	
	3.4262	.4339	.2939	-0.0849		1.7694	.0699	-.0686	.0960
$^{232}\text{U}$	3.1267	.4162			$^{168}\text{Yb}$	1.6711	.1294		
	3.1411	.3410	.2721			1.7016	.0651	.1111	
	3.1414	.3406	.2646	.0268		1.6925	.1032	-.0639	.1758
$^{230}\text{U}$	2.8731	.4229			$^{166}\text{Er}$	1.8243	.1189		
	2.8788	.3874	.1608			1.8566	.0536	.1091	
	2.8758	.4031	.0552	.1474		1.8509	.0781	-.0063	.1188
$^{232}\text{Th}$	2.9850	.4813			$^{164}\text{Er}$	1.6226	.0772		
	3.0172	.3717	.2825			1.6313	.0616	.0223	
	3.0200	.3519	.4139	-0.1839		1.6274	.0755	-.0317	.0460
$^{230}\text{Th}$	2.7838	.4154			$^{164}\text{Dy}$	2.0286	.0870		
	2.8035	.3444	.2049			2.0365	.0699	.0310	
	2.7994	.3660	.0069	.1972		2.0343	.0779	-.0046	.0348
$^{228}\text{Th}$	2.5554	.5300			$^{162}\text{Dy}$	1.8450	.0751		
	2.5665	.4658	.3049			1.8525	.0632	.0155	
	2.5642	.4830	.1627	.2554		1.8490	.0726	-.0130	.0188
				$^{156}\text{Gd}$	1.6590	.1366			
					1.6693	.1130	.0444		
					1.6613	.1473	-.1238	.1827	

注,  $\alpha(\times 10^{-2}\text{keV}^{-1}\hbar^2)$ ;  $\beta(\times 10^{-6}\text{keV}^{-3}\hbar^4)$ ;  $\gamma(\times 10^{-11}\text{keV}^{-5}\hbar^6)$ ;  $\delta(\times 10^{-16}\text{keV}^{-7}\hbar^8)$ .

本文还用表3中的参数按公式(4)、(5)、(6)算出铀系和稀土偶偶核的转动谱(限于篇幅,文中未给出),并按(12)式计算了理论计算值和实验能谱之间的方均根差(见表2中 $\sigma_4$ 、 $\sigma_5$ 、 $\sigma_6$ ),不难看出, $\sigma_6 < \sigma_5 < \sigma_4$ ,无一例外,这个结果告诉我们,从铀系和稀土偶偶核的情况看 $\omega^2$ 三参数和四参数展开式优于 $\omega^2$ 二参数展开式.这个结论有助于和 Saethre 等人<sup>[7]</sup>

的结论作比较.

4.  $\omega^2$  四参数展开公式参数间的关系. 因为转动能可按角频率平方来展开, 根据  $\omega$  的定义(7)式, 并考虑吴-曾公式(9)式, 不难得到  $E$  用  $\omega^2$  的表示式<sup>[8]</sup>

$$E \approx a \left[ \left( 1 - \frac{\hbar^2 \omega^2}{a^2 b} \right)^{-1/2} - 1 \right], \quad (13)$$

将上式展开, 并和公式(6)作比较, 不难得到

$$\alpha = \frac{\hbar^2}{2ab}, \quad \beta = \frac{3\hbar^4}{8a^3b^2}, \quad \gamma = \frac{\hbar^6}{16a^3b^3}, \quad \delta = \frac{35\hbar^8}{128a^7b^4}. \quad (14)$$

因为  $a, b$  均为正值(见表 4), 故从(14)式可知,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  均应为正值. 计算表明(见表 3),  $\alpha, \beta$  确实为正值, 无一例外. 在 29 个核中,  $\gamma$  值有 15 个为正值, 其余为负值, 而  $\delta$  的值绝大

表 4 用阻尼最小二乘法拟合所得  $W-Z$  公式的参数值

核	$a$	$b$	$c$	核	$a$	$b$	$c$
$^{248}\text{Cm}$	7.5740	1.9330		$^{178}\text{Hf}$	6.5909	4.8454	
	8.6572	1.7341	-2.8524		8.5775	3.9321	-5.8986
$^{244}\text{Pu}$	8.6041	1.7184		$^{176}\text{Hf}$	7.7150	3.8268	
	8.6041	1.7181	0.0099		6.6789	4.2705	3.6642
$^{242}\text{Pu}$	8.7002	1.6975		$^{174}\text{Hf}$	5.4782	5.5854	
	6.5741	2.1221	6.4340		4.6041	6.4944	3.1457
$^{240}\text{Pu}$	7.7689	1.8352		$^{172}\text{Hf}$	5.1940	6.1061	
	7.7688	1.8350	0.0100		5.4867	5.8438	-1.2035
$^{238}\text{Pu}$	9.8202	1.4860		$^{170}\text{Hf}$	3.6811	8.9714	
	9.8202	1.4862	-0.0100		3.4723	9.4163	1.1707
$^{236}\text{Pu}$	7.0335	2.1019		$^{176}\text{Yb}$	10.6216	2.6144	
	7.0336	2.1022	-0.0100		16.3588	1.9059	-11.2531
$^{238}\text{U}$	6.5907	2.2666		$^{174}\text{Yb}$	14.2903	1.7817	
	6.6902	2.2385	-0.3028		12.0083	2.0162	5.0623
$^{236}\text{U}$	6.6161	2.2710		$^{172}\text{Yb}$	14.2053	1.8398	
	5.2790	2.7494	1.3979		11.4043	2.1404	6.9342
$^{234}\text{U}$	6.5011	2.1572		$^{170}\text{Yb}$	8.5968	3.2924	
	3.1884	4.0232	12.7570		8.5971	3.2928	-0.0100
$^{232}\text{U}$	5.4489	2.8854		$^{168}\text{Yb}$	4.9682	5.9601	
	3.4736	4.1562	9.9441		5.3636	5.5804	-1.4306
$^{230}\text{U}$	4.7264	3.5928		$^{166}\text{Er}$	5.9167	4.6184	
	2.7778	5.4946	12.2684		5.9164	4.6178	0.0100
$^{232}\text{Th}$	5.8716	2.6972		$^{164}\text{Er}$	7.4510	4.0822	
	2.7258	5.4068	12.2801		7.4510	4.0824	-0.0000
$^{230}\text{Th}$	5.3106	3.2438		$^{164}\text{Dy}$	9.2595	2.6460	
	2.7211	5.8092	12.1324		6.1673	3.5988	10.7426
$^{228}\text{Th}$	3.2376	5.8489		$^{162}\text{Dy}$	10.0927	2.6442	
	2.9715	6.2726	1.8414		6.3330	3.8373	10.7534
				$^{156}\text{Gd}$	4.9515	5.9499	
					4.7323	6.1733	0.9700

注:  $a(\times 10^3 \text{keV}); b(\times 10^{-3} \text{keV}); c(\times 10^{-2} \text{keV})$ .

多数为正值, 只有 3 个核的  $\delta$  值为负. 这种  $\gamma$  和  $\delta$  小于零的现象尚需进一步研究. 但初步分析可能有以下原因, 一是(14)式为一近似展开, 可能导致误差; 二是阻尼最小二乘法本

身也是一种近似计算;三是 $\gamma$ 和 $\delta$ 的量级甚小,故有些 $\gamma$ 和 $\delta$ 的值尽管为负,但距离正值的绝对误差并不大.因此可以认为 $\omega^2$ 四参数展开公式和吴-曾公式是基本符合实验事实的.估计吴-曾三参数公式有可能改进结果.

5.  $h\omega$  值的计算.用阻尼最小二乘法从 Harris 公式拟合得出  $h\omega$  值(见表 5).

表 5 由 Harris 公式拟合所得  $h\omega$  值

核 $I$	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28
$^{248}\text{Cm}$	35.55	63.91	90.37	114.94	137.60	158.46	177.64	195.32	211.62	226.69	240.68	253.73	265.99	277.61
	35.36	63.95	91.04	116.34	139.48	160.31	178.86	195.34	209.97	223.00	234.69	245.26	254.90	263.81
	35.35	63.91	90.95	116.28	139.54	160.53	179.21	195.69	210.17	222.93	234.22	244.28	253.35	261.62
$^{244}\text{Pu}$	36.33	65.25	92.40	117.66	140.98	162.49	182.34	200.70	217.74	233.60	248.40	262.22	275.02	
	36.22	65.26	92.72	118.35	141.93	163.42	182.93	200.60	216.63	231.20	244.49	256.62	267.62	
	36.23	65.23	92.62	118.24	141.88	163.52	183.17	200.91	216.87	231.22	244.10	255.66	265.98	
$^{242}\text{Pu}$	36.32	65.25	92.48	117.79	141.19	162.76	182.71	201.17	218.31	234.27	249.17	263.07		
	36.23	65.26	92.74	118.33	141.90	163.41	183.00	200.79	216.98	231.74	245.22	257.56		
	36.25	65.24	92.66	118.23	141.84	163.46	183.16	201.01	217.15	231.73	244.89	256.74		
$^{240}\text{Pu}$	34.86	62.70	88.94	113.44	136.19	157.26	176.77							
	34.85	62.71	88.97	113.48	136.18	157.15	176.46							
	34.85	62.71	88.98	113.51	136.21	157.06	176.08							
$^{238}\text{Pu}$	35.88	64.65	91.89	117.47	141.36	163.62	184.33	203.66	221.66					
	35.88	64.65	91.89	117.47	141.36	163.62	184.35	203.68	221.70					
	35.88	64.65	91.89	117.47	141.35	163.60	184.33	203.69	221.76					
$^{236}\text{Pu}$	36.16	64.47	91.52	116.49	139.49	160.60	180.00	197.84						
	36.13	64.55	91.78	116.83	139.64	160.18	178.61	195.11						
	36.13	64.56	91.83	116.92	139.70	160.08	178.15	194.08						
$^{238}\text{U}$	36.67	65.49	92.00	116.21	138.20	158.20	176.42	193.12	208.47	222.65	235.77	247.99	259.42	270.18
	36.51	65.61	92.72	117.54	139.84	159.68	177.24	192.83	206.70	219.13	230.30	240.44	249.69	258.21
	36.50	65.54	92.60	117.46	139.94	159.98	177.68	193.27	206.99	219.09	229.80	239.36	247.94	255.73
$^{236}\text{U}$	36.97	66.00	92.71	117.05	139.17	159.23	177.40	194.12	209.44	223.56	236.69	248.92	260.42	271.33
	36.80	66.12	93.47	118.45	140.88	160.76	178.22	193.77	207.56	219.88	230.99	241.08	250.34	258.91
	36.80	66.08	93.39	118.41	140.96	160.98	178.54	194.09	207.77	219.86	230.64	240.32	249.09	257.12
$^{234}\text{U}$	35.43	63.02	88.13	110.77	131.11	149.46	166.09	181.27	195.24	208.18	220.26	231.60	242.26	252.33
	35.35	63.06	88.43	111.31	131.80	150.12	166.53	181.32	194.74	207.02	218.31	228.77	238.47	247.54
	35.35	63.07	88.46	111.35	131.82	150.10	166.48	181.24	194.64	206.93	218.25	228.77	238.56	247.74
$^{232}\text{U}$	38.63	68.58	95.83	120.36	142.37	162.18	180.13	196.51	211.55	225.40				
	38.60	68.72	96.24	120.92	142.80	162.15	179.33	194.66	208.43	220.85				
	38.59	68.72	96.25	120.94	142.82	162.17	179.33	194.62	208.35	220.69				
$^{230}\text{U}$	41.89	73.89	102.29	127.43	149.70	169.57	187.47	203.78						
	41.89	73.99	102.50	127.60	149.62	169.01	186.24	201.70						
	41.90	73.96	102.44	127.58	149.67	169.16	186.46	201.94						
$^{232}\text{Th}$	40.19	70.92	98.29	122.52	144.00	163.15	180.36	195.97	210.28	223.47	235.75	247.22	258.06	268.27
	40.05	71.05	98.89	123.52	145.13	164.09	180.81	195.67	209.01	221.07	232.10	242.22	251.61	260.34
	40.05	71.09	98.97	123.57	145.10	163.97	180.61	195.44	208.82	221.00	232.22	242.62	252.36	261.52
$^{230}\text{Th}$	43.14	75.90	104.90	130.44	152.99	173.09	191.15	207.57	222.55	236.36	249.18			
	43.06	76.05	105.39	131.13	153.59	173.29	190.67	206.17	220.04	232.61	244.06			
	43.07	76.00	105.31	131.08	153.65	173.45	190.87	206.32	220.03	232.32	243.40			
$^{228}\text{Th}$	46.52	80.31	108.96	133.35	154.45	172.95	189.34							
	46.52	80.53	109.30	133.47	154.01	171.64	186.95							
	46.51	80.48	109.26	133.51	154.11	171.78	187.04							

为了检验拟合的正确性,本文将拟合所得  $h\omega$  和直接用实验数据按公式<sup>[8]</sup>

$$h\omega(I) = \frac{\sqrt{I^2 - I + 1}}{(2I - 1)} E_{\gamma}(I + 1 \rightarrow I - 1) \quad (14)$$

求出的  $\hbar\omega$  值进行比较,式中  $I$  是参数,  $I=1, 3, 5, 7, \dots$ . 结果表明,两种结果完全符合. 本文对镧系和稀土区 29 个核作出了比较图,但限于篇幅只给出两个核的比较图(见图 2).

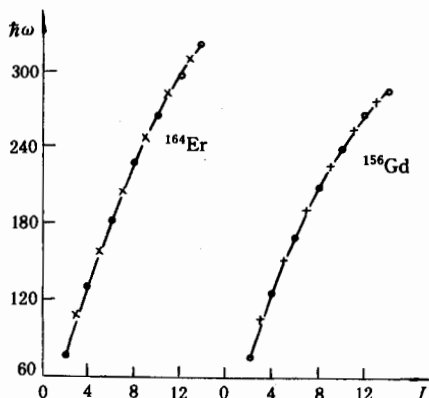


图 2  $\hbar\omega$  值的比较

· 表示根据阻尼最小二乘法拟合所得  
+ 表示按公式  $E_\gamma$  求出的  $\hbar\omega$

### 参 考 文 献

- [1] A. Bohr, B. R. Mottelson, Nuclear Structure. Vol. II (Benjamin, New York, 1975).
- [2] S. M. Harris, *Phys. Rev. Lett.*, **13**(1964), 663; *Phys. Rev.*, **B138**(1965), 509.
- [3] C. S. Wu, J. Y. Zeng, *Commun. in Theoret. Phys.* (Beijing), **8**(1987), 51.
- [4] 吴崇试等, 高能物理与核物理, **1**(1986), 85.
- [5] F. X. Xu, C. S. Wu, J. Y. Zeng, *Phys. Rev.*, **40**(1989), 2337.
- [6] 廖继志, 近代原子核模型, 四川大学出版社, 1989年.
- [7] Saethre et. al., *Nucl. Phys.*, **A207**(1973), 486.
- [8] 曾谨言, 孙洪洲, 原子核结构理论, 上海科学技术出版社, 1986年.

## A Comprehensive Analysis for Eight Formulas for Rotational Spectra

XU FUXIN XU NI

(Anhui University, Hefei 230039)

### ABSTRACT

All the data now available for the ground rotational bands of actinide even-even nuclei and rare-earth even-even nuclei are analyzed with eight formulas for rotational spectra. It can be seen from calculated results that the four-parameter  $I(I+1)$  expansion, the four-parameter  $\omega^2$  expansion and W-Z formula can fit the GRB's of well-deformed nuclei very well.