用超对称量子力学思想构造适用于氢原子及其相关势的产生-湮没算子*

李富斌[1)]
(中国矿业大学数力系,徐州 221008)

摘 要

由本文构造出的新的产生与湮没算子可使人们用代数方法来确定氢原子及其相关势的本征值和本征函数. 该法类似于众所周知的谐振子方法.

一、产生-湮没算子的构造

首先让我们来研究径向薛丁格算子

$$H = -\frac{1}{r}\frac{d^2r}{dr^2} + V_-(r). \tag{1}$$

在上式中,我们曾假定有一个本征值为 E_0 的基态,该基态可表示为

$$\varphi_0(r) = \frac{1}{r}\exp(-w). \tag{2}$$

其中, $w = -is/h$, s 为粒子的作用量; $s = -Et + \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}$, 所以

$$\varphi_0(r) = \frac{1}{r}\exp(-w) = \frac{1}{r}e^{is/h} = \frac{1}{r}e^{-i\omega t+i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \frac{1}{r}e^{-iEt/h+i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/h};$$

同时,我们用 E_n 来表示其本征值. 依据超对称量子力学的思想[1],我们可将 $H_- \approx H - E_0$ 表示为

$$H_- = A^+A, \tag{3}$$

其中,

$$\left.\begin{aligned} A &= \varphi_0\frac{d}{dr}\varphi_0^{-1} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r + w', \\ A^+ &= -\varphi_0^{-1}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\varphi_0 = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r + w'; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

上式中的撇“′”表示其导数. 值得注意的是 A^+ 是 A 相对于标积的伴随,相应于如下的径向方程:

$$\langle\varphi,\phi\rangle \approx \int_0^\infty r^2\varphi^*(r)\phi(r)dr. \tag{5}$$

本文1991年7月31日收到.
* 国家自然科学基金资助.
1) 中国高科技中心成员.

为了对上式进行计算,就应对下述方程引起足够的注意:

$$\left(\frac{d}{dr}\right)^+ \neq -\frac{d}{dr}, \text{ 但 } \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\right)^+ = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r; \tag{6}$$

我们通过构造新的产生-湮没算子发现其最小的本征值等于零. 由方程(4)我们可以看出:对(3)式的明显的因式分解便等价于已知的模型的基态.

超对称量子力学的主要思想就是通过

$$H_+ \approx AA^+ \text{ (即 Darboux-Crum 变换)}. \tag{7}$$

定义一个新的算子. H_+ 就叫作 H_- 的超对称部分子,将 H_- 和 H_+ 可以合并写作

$$H_{\mp} = -\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r + (w')^2 \mp w''. \tag{8}$$

虽然 H_+ 的谱等于 H_- 的谱,但 H_- 没有等于零的最小本征值. H_+ 的重正化第 n 阶本征函数 $\varphi_{(+),n}$ 通过下式

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{(-),n+1} &= (E_{n+1} - E_0)^{-\frac{1}{2}} A^+ \varphi_{(+),n}, \\ \varphi_{(+),n} &= (E_{n+1} - E_0)^{-\frac{1}{2}} A \varphi_{(-),n+1}; \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

与 H_- 的重正化第 $(n+1)$ 阶本征函数 $\varphi_{(-),n+1}$ 相关. 我们察觉到 $\varphi_{(-),n+1}$ 和 $\varphi_{(+),n}$ 均相应于本征值 E_{n+1}.

其次,我们需要定义一类具体的算子: 考虑一簇依赖于参数 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_t)$ 的算子 $H_-(\alpha)$, 使得超对称部分子 $H_+(\alpha)$ 与 $H_-(\alpha)$ 具有相同的形式, 但对于不同的参数 $\alpha^{(1)}$ 有:

$$H_+(\alpha) = H_-(\alpha^{(1)}) + c(\alpha^{(1)}). \tag{10}$$

其中, $c(\alpha^{(1)})$ 是一个常数,而且按照某些意义明确的方法, $\alpha^{(1)}$ 依赖于 α:

$$\alpha^{(1)} = f(\alpha), \tag{11}$$

接着,我们构造了如下的算子序列[3]:

$$H^{(n)} \approx H_-(\alpha^{(n)}) + \sum_{k=0}^{n} c(\alpha^{(k)}), \tag{12}$$

其中,

$$\left.\begin{aligned} &\alpha^{(n)} \approx f(\alpha^{(n-1)}) = f^n(\alpha) = f\circ\cdots\circ f(\alpha); \\ &\alpha^{(0)} = \alpha, \quad c(\alpha^{(0)}) = E_0; \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

我们发现

$$\begin{aligned} H^{(n+1)} &= H_-(\alpha^{(n+1)}) + c(\alpha^{(n+1)}) + \sum_{k=0}^{n} c(\alpha^{(k)}) \\ &= H_+(\alpha^{(n)}) + \sum_{k=0}^{n} c(\alpha^{(k)}), \end{aligned} \tag{14}$$

上式意味着 $H^{(n+1)}$ 的谱与 $H^{(n)}$ 的谱相同,但不等于零的最小本征值. 通过迭代法,我们可以求得 $H^{(n+1)}$ 的第零阶本征值等于 $H^{(n)}$ 的第1阶本征值,也等于 $H^{(0)}$ 的第 $(n+1)$ 阶本征值,也恒等于 H. 由于 $H_-(\alpha^{(i)})$ 的最小本征值总是为零,这就意味着[2]

$$E_n = \sum_{k=0}^{n} c(\alpha^{(k)}), \tag{15}$$

最后，我们将计算本征函数．其方法如下：令 $\varphi_{(-),n}^{(\alpha)}$ 和 $\varphi_{(+),n}^{(\alpha)}$ 分别为 $H_{-}(\alpha)$ 和 $H_{+}(\alpha)$ 的重正化本征函数．方程 (10) 意味着

$$\varphi_{(+),n}^{(\alpha)}=\varphi_{(-),n}^{(f(\alpha))}, \tag{16}$$

将上式与方程 (9) 联立，便可解出：

$$\begin{aligned}\varphi_{(-),n+1}^{(\alpha)}&=(E_{n+1}-E_0)^{-\frac{1}{2}}A_\alpha^+\varphi_{(+),n}^{(\alpha)},\\&=(E_{n+1}-E_0)^{-\frac{1}{2}}A_\alpha^+\varphi_{(-),n}^{(f(\alpha))};\end{aligned} \tag{17}$$

如果通过如下基矢：

$$U\varphi_{(-),n}^{(\alpha)}\approx\varphi_{(-),n}^{(f(\alpha))}, \tag{18}$$

上 U 的作用量，我们便可定义一个等矩算子 U，从而可将方程 (17) 重新写为：

$$\varphi_{(-),n+1}^{(\alpha)}=(E_{n+1}-E_0)^{-\frac{1}{2}}A_\alpha^+U\varphi_{(-),n}^{(\alpha)}, \tag{19}$$

因此，就有

$$\varphi_{(-),n}^{(\alpha)}=\nu_n(A_\alpha^+U)^n\varphi_{(-),0}^{(\alpha)}, \tag{20}$$

其中

$$\nu_n=\prod_{k=1}^{n}(E_k-E_0)^{-\frac{1}{2}}, \tag{21}$$

已规范化．方程 (20) 便对原有的氢原子问题定义了一个产生算子 a^+，若沿用相同的宗量便可构造出湮没算子 a：

$$a^+\equiv A_\alpha^+U,\quad a\equiv U^{-1}A_\alpha; \tag{22}$$

为了明显地计算出本征函数，我们可将方程 (20) 重新写作：

$$\begin{aligned}\varphi_{(-),n}^{(\alpha)}&=\nu_nA_\alpha^+U\cdots A_\alpha^+U\varphi_{(-),0}^{(\alpha)}\\&=\nu_nA_\alpha^+A_{f(\alpha)}^+A_{f^2(\alpha)}^+\cdots A_{f^{n-1}(\alpha)}^+\varphi_{(-),0}^{(f^n(\alpha))}.\end{aligned} \tag{23}$$

上式表明：当基态 $\varphi_{(-),0}^{(f^n(\alpha))}$ 一旦已知，则用 $f^n(\alpha)$，$n=0, 1,\cdots$ 的一组参数便足以确定所有的本征函数．

二、将构造出的新算子应用于氢原子

现在，我们可将本文构造的产生-湮没算子首先应用于氢原子问题．我们可将上述方法应用于氢原子的径向算子：

$$H=-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}r+\frac{l(l+1)}{r^2}-\frac{2\gamma}{r},\quad l=0,1,\cdots; \tag{24}$$

我们首先通过扦入法证明将 H 可因式分解为方程 (3) 和 (4) 以及

$$\left.\begin{aligned}E_0&=-\gamma^2/(l+1)^2,\\w'&=\frac{\gamma}{l+1}-\frac{l+1}{r};\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

如果我们用 α 来表示 l，则方程 (25) 就等价于有关基态的如下叙述：

$$\varphi_{(-),0}^{(l)}=\frac{1}{r}\mathrm{e}^{-w}=\left(\frac{2\gamma}{l+1}\right)^{l+3/2}([2l+2]!)\gamma^l\mathrm{e}^{-\gamma r/(l+1)}, \tag{26}$$

我们也可证明 H 是属于由 (10) 式所定义的一类算子：

$$H_+(l)=-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}r+\frac{(l+1)(l+2)}{r^2}-\frac{2\gamma}{r}+\frac{\gamma^2}{(l+1)^2}$$
$$=H_-(l+1)-\frac{\gamma^2}{(l+2)^2}+\frac{\gamma^2}{(l+1)^2}, \tag{27}$$

我们认为:

$$\alpha^{(1)}=f(\alpha)=l+1,\ 即\ \alpha^{(k)}=l+k; \tag{28}$$

因此有

$$\left.\begin{aligned} c(\alpha^{(1)})&=-\frac{\gamma^2}{(l+2)^2}+\frac{\gamma^2}{(l+1)^2}=-\frac{\gamma^2}{(\alpha^{(1)}+1)^2}+\frac{\gamma^2}{(\alpha^{(1)})^2},\\ c(\alpha^{(k)})&=-\frac{\gamma^2}{(l+k+1)^2}+\frac{\gamma^2}{(l+k)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

若将上式扦入到方程(15)中,我们便可求得其本征值:

$$E_n=\sum_{k=0}^{n}c(\alpha^{(k)})=-\frac{\gamma^2}{(l+n+1)^2}, \tag{30}$$

通过方程(23)可给出其本征函数与

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{(-),0}^{(f^n(\alpha))}&=\left(\frac{2\gamma}{l+n+1}\right)^{l+n+\frac{3}{2}}\cdot([2l+2n+2]!)^{-\frac{1}{2}}\cdot r^{l+n}\cdot \mathrm{e}^{-\gamma r/(l+n+1)},\\ A_{fj(l)}^{+}&=-\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}r+\frac{\gamma}{l+j+1}-\frac{l+j+1}{r} \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

我们还可证明,由此也可导出包含拉盖尔多项式的通常表示式.

三、讨 论

本文的方法有别于处理微观量子系统的其它方法:

(1) 该方法依据超对称量子力学思想构造出一系列简化的算子和算子序列,使其最小本征值为零.从而可用因式分解等代数方法求解本征值及其本征函数,因而较其它方法简便得多.

(2) 该方法可以使用迭代法及扦入法,所以只要构造出相应的算子和算子序列,对于复杂的计算便可编制计算程序.用计算机快速处理.

(3) 该法类似于谐振子方法.因而可全面推广到经典场论与线性量子场论中去,会促进场论方法大为快速简化,拟可取代重整化方法.

参 考 文 献

[1] P. A. Deift, *Duke Math. J.*, **45**(1978), 267.

[2] L. E. Gendenshtein, *JETP Lett.*, **38**(1983), 356.

[3] L. Infeld and T. E. Hull, *Rev. Mod. Phys.*, **23**(1951), 21.

Construction of the Creation-Annihilation Operators for the Hydrogen Atom and Related Potentials with the Concepts of Supersymmetric Quantum Mechanics

LI FUBIN

(*The Mathematical-Mechanical Department, China University of Mining Technology, Xuzhou* 221008)

ABSTRACT

Using new creation-annihilation operators constructed in this work, we are able to determine the eigenvalues and eigenfunctions of the hydrogen alien by algebraic method, which is analogous to the well-known procedure for is Eudying the harmonic oscillator.