

从么正性和解析性考察量子 场论的红外发散*

彭宏安¹⁾

(北京大学物理系, 100871)

摘 要

本文从 S 矩阵么正性和解析性要求的角度,考察了量子场论中红外发散问题.指出 QED 范围内在 α 的任何阶,任一泡泡图虚部的红外发散应该在此泡泡图按 Landau-Cutkosky 规则得出的切割泡泡图小集内相互对消.其次从散射振幅解析性的基本假定和广义光学定理概念出发,对“弹性朝前散射”么正性的普遍表达式引伸出有物理实际的内涵,并得出 QED 中判断某过程存在红外发散与否的一般准则.最后再以 $\pi(q^2)$ 的泡泡图在 q^2 平面上解析性随光子质量 λ 的变化,图示性地说明其中红外发散是如何对消的.此外简短最后讨论了推广到 QCD 时的困难和问题.

一、引 言

红外发散是量子场论中一个重要的理论问题,在量子电动力学(QED)中这问题已基本解决^[1],而在量子色动力学(QCD)中,虽也取得了一些进展^[2,3],但问题却远未解决^[4].其困难一方面来自色自由度和胶子的自作用使计算变得复杂,另一方面 QCD 中的色禁闭也带来一系列问题.

通常量子场论中讨论红外发散时,都是算出截面后才能看出结果的.对此我们有两点质疑:第一、能否有一般的判断,使得事先就知道那些过程不会有红外发散——即虚、实软光子的红外发散总是逐阶地对消——因而它们是物理上可测量的.第二、为什么讨论紫外发散总是在算振幅时进行,而红外发散要等到出截面后才有结果?对后者能否也在振幅阶段时进行?下面会看到如果从另一种角度观察,上两个问题将会有圆满的回答.

本文将从 S 矩阵的么正性和解析性角度来考察红外发散.对于 QED,利用广义光学定理和 S 矩阵元是多元解析函数边界值的概念.由朝前么正性普遍表达式的解析延拓,就能知道那些过程无红外发散.我们用类时光子极化张量 $\pi(q^2)$ 为例阐明了计算方法,指出红外发散的对消是在每一个泡泡图按 Landau-Cutkosky 规则得出的切割泡泡图

本文 1991 年 8 月 1 日收到.

* 国家自然科学基金资助项目.

1) 中国科学院理论物理研究所客座研究人员.

小集内部完成的。并图示性给出了当光子质量 $\lambda \rightarrow 0$ 时, $\pi(q^2)$ 在一 q^2 平面上解析性的变化,“直观”地显示红外发散对消过程.与此同时也清楚看出,和紫外发散一样,红外发散的抵消也是在振幅阶段上(不过应在振幅的虚部即切割泡泡图小集内)完成的。

对于 QCD, 只有个别情况能得到与上相似的结果。一般来说,由于 QCD 的非阿贝尔性和对色禁闭缺乏深刻了解,难以指望在微扰论框架和局限于部分子层次上解决其红外问题。

为了突出处理红外问题,文中没有讨论相应的紫外发散和重整化,在 QED 范围内,这是不成问题的^[4]。在此想强调一点,即本文的处理只是在形式上与通常微扰论算 Feynman 图振幅的办法稍有不同;仍离不开微扰论,且计算上的复杂性也未有所简化,但它是从另一方式来考察红外问题,对扩大和加深对它们的了解还是有益的。

二、么正性条件和红外时的 $\text{Im}\pi(q^2)$

熟知散射矩阵 $S \equiv 1 + iT$ 的么正性 $SS^+ = S^+S = 1$ 可表为 $i(T - T^+) = -TT^+$, 当嵌入到反应过程初态 $|i\rangle$ 、末态 $|f\rangle$ 矩阵中,并在等式右边插入有关的正交完备集后得

$$2\text{Im}T_{if} = \sum_n T_{in}T_{nf}^*, \quad (T_{if}^* \equiv T_{fn}^+) \quad (1)$$

\sum_n 对完备集 $\{|n\rangle\}$ 中分立和连续变量求和求积,选择定则和相空间限制了集中只有部分态有贡献。当初、末态全同时,(1)式是

$$2\text{Im}T_{ii} = \sum_n |T_{in}|^2, \quad (2)$$

对于两体初态,它是熟知的光学定理。对一般的初态,后面会看到它所表的物理内涵。可用图 1 表示 (2) 式。

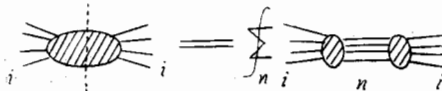


图 1 “弹性朝前散射”的么正性

图 1 左边切割虚线表示取 T_{ii} 的虚部,通常用微扰论算过程截面时的作法就是(2)式(或图 1)在 $i = 2$ 时右边的实现。么正性指出这也可以从(2)式左边来处理,这时要计算的是“弹性朝前散射”振幅的虚部,它们对应的是一些切割泡泡图^[5]。

先以 QED 中 $\pi_{\mu\nu}(q)$ 为例,由(2)式左边计算红外发散,由于

$$\pi_{\mu\nu}(q) = (q_\mu q_\nu - q^2 \delta_{\mu\nu})\pi(q^2) = i \int d^4x \langle 0 | T(j_\mu(x)j_\nu(0)) | 0 \rangle, \quad (q^2 \leq 0) \quad (3)$$

将它按 $\alpha \left(= \frac{e^2}{4\pi} \right)$ 逐阶展开,相应于图 2。

下面来计算最低阶辐射修正时的 $\text{Im}\pi(q^2)$ 。其相应的切割泡泡图是从图 2 右边 3 个

$$\pi_{\mu\nu} = \text{bubble} + \text{bubble} + \text{bubble} + \text{bubble} + \dots$$

图 2 $\pi_{\mu\nu}(q)$ 按 α 阶次逐项展开时的泡泡图

有单光子内线的图作各种不同切割(画虚线)后得到的 10 个图, 见图 3. 所有被虚线所截, 断的内线都取质壳值. 按光子线附挂方式又可分为 3 组进行讨论.

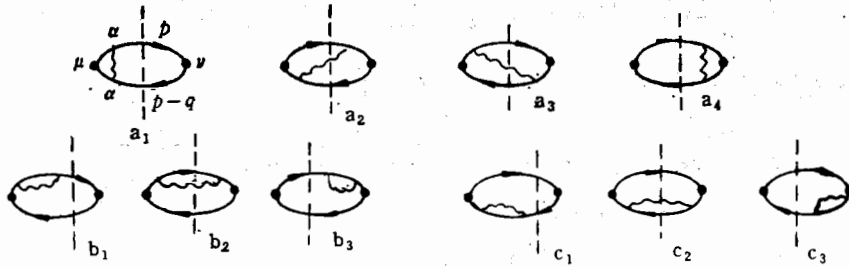


图 3 最低阶辐射修正时 $\pi_{\mu\nu}(q)$ 的切割泡泡图

先看图 3 中 a 组 4 个图, 它们光子内线两端分别挂在电子线和正电子线上. 我们来证明这 4 个图的红外发散相互抵消. 按通常的 Feynman 规则¹⁾, 图 3a₁ 为

$$\begin{aligned} \text{Im}^{(a_1)}\pi(q^2) &\equiv \frac{-1}{3q^2} \text{Im}^{(a_1)}\pi_{\mu\mu}(q) = \frac{e^2}{3iq^2(2\pi)^8} \int d^4k \left\{ d^4p \text{Tr}\{\gamma_\mu(i(\hat{p} + \hat{k}) - m)\gamma_\alpha \right. \\ &\cdot (i\hat{p} - m)\gamma_\mu(i(\hat{p} - \hat{q}) - m)\gamma_\alpha(i(\hat{p} - \hat{q} + \hat{k}) - m)\} \\ &\cdot \frac{2\pi\delta(p^2 + m^2)2\pi\delta((p - q)^2 + m^2)\theta(p_0)\theta(q_0 - p_0)}{((p + k)^2 + m^2 - i\epsilon)((p - q + k)^2 + m^2 - i\epsilon)(k^2 + \lambda^2 - i\epsilon)} \Big\}, \quad (4) \end{aligned}$$

λ 为引入的光子质量. 因为我们只讨论 $k_\mu \rightarrow 0$ 时的红外行为, 分子中 $\text{Tr}\{\dots\}$ 内的 k 都可略掉, 容易得知这时 (4) 式中

$$\text{Tr}^{(a_1)}\{\gamma_\mu \dots\} \triangleq -16q^4 \left(1 - \left(\frac{2m^2}{q^2}\right)^2\right), \quad (5)$$

“ \triangleq ”是红外意义上的等号. 将 (5) 代入 (4) 式后由于 δ 因子限制和积分的 Lorentz 协变性, 得知红外时 (4) 式中对 p 与对 k 的积分是因子化的. 先对 p 积分, 取 $q = 0$ 的参照系后算出是

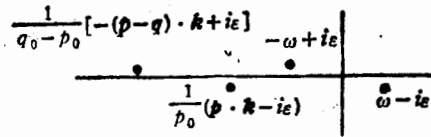
$$\int d^4p \delta(p^2 + m^2)\delta((p - q)^2 + m^2)\theta(p_0)\theta(q_0 - p_0) = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{4m^2}{q_0^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (6)$$

由积分的 Lorentz 不变性, 右边可用 $q^2 (\equiv q^2 - q_0^2)$ 代替 $-q_0^2$, 这样

$$\begin{aligned} \text{Im}^{(a_1)}\pi(q^2) &\triangleq \frac{-2e^2}{3i(2\pi)^5} q^2 \left(1 + \frac{4m^2}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \left(\frac{2m^2}{q^2}\right)^2\right) \\ &\cdot \int d^4k \frac{1}{(2p \cdot k - i\epsilon)(2(p - q) \cdot k - i\epsilon)(k^2 + \lambda^2 - i\epsilon)} \Big|_{p^2=(p-q)^2=m^2}, \quad (7) \end{aligned}$$

图 4 画出了积分在 k_0 平面上的极点. 对 k_0 积分可表为绕 $k_0 = -\omega + i\epsilon$ 点的 c_1 圈

1) 本文所用符号与规则和 [4] 中的一致, 并且采用 Feynman 规范.

图4 (7)式被积函数在 k_0 平面中的极点

与绕 $k_0 = \frac{-(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{k} + i\varepsilon}{q_0 - p_0}$ 点的 c_2 圈之和, 由于(4)式中的 $\delta(p^2 + m^2)$ 和 $\delta((p-q)^2 + m^2)$ 在 $\mathbf{q} = 0$ 系中有 $q_0 = 2p_0 = 2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$, 故算出

$$\int d^3k \int_{c_1} dk_0 \frac{1}{(2\mathbf{p}\cdot\mathbf{k} - i\varepsilon)(2(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{k} - i\varepsilon)(k^2 - i\varepsilon)} - \frac{2\pi^2 i}{q^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{k} \int_{-1}^1 \frac{dz}{1 - \left(\frac{|\mathbf{p}|}{p_0}\right)^2 z^2}, \quad (8a)$$

$$\int d^3k \int_{c_2} dk_0 \frac{1}{(2\mathbf{p}\cdot\mathbf{k} - i\varepsilon)(2(\mathbf{p}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{k} - i\varepsilon)(k^2 - i\varepsilon)} - \frac{2\pi^2 i}{q^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{k} \int_{-1}^1 \frac{dz}{1 - \left(\frac{|\mathbf{p}|}{p_0}\right)^2 z^2} \cdot \frac{1}{\frac{|\mathbf{p}|}{p_0} z - i\varepsilon}, \quad (8b)$$

其中 $k \equiv |\mathbf{k}| = \omega|_{z=0}$, $z = \frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{p}||\mathbf{k}|}$. 将(8a), (8b)相加代入(7)式得

$$\text{Im}^{(a_1)}\pi(q^2) \triangleq \frac{-e^2}{3(2\pi)^3} \left(1 + \frac{4m^2}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \left(\frac{2m^2}{q^2}\right)^2\right) \int \frac{d\mathbf{k}}{k} \int_{-1}^1 \frac{dz}{1 - \left(\frac{|\mathbf{p}|}{p_0}\right)^2 z^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{|\mathbf{p}|}{p_0} z - i\varepsilon}\right) \quad (9)$$

(9)式右边出现虚数部分是由于图3a₁中类时 ($-q^2 > 0$) 光子变为正负电子对产生的库伦相移^[4], 下面将见到它们会对消. 图3中的 a₄ 显然是 a₁ 的共轭图, 因此 $\text{Im}^{(a_4)}\pi(q^2)$ 是 $\text{Im}^{(a_1)}\pi(q^2)$ 的复共轭, 利用 $\frac{1}{a \mp i\varepsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{a} \pm i\pi\delta(a)$ 公式, 立刻看出它们之和是

$$\text{Im}^{(a_1+a_4)}\pi(q^2) \triangleq \frac{-2e^2}{3(2\pi)^3} \left(1 + \frac{4m^2}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \left(\frac{2m^2}{q^2}\right)^2\right) \int \frac{d\mathbf{k}}{k} \int_{-1}^1 \frac{dz}{1 - \left(\frac{|\mathbf{p}|}{p_0}\right)^2 z^2} dz, \quad (10)$$

不再出现虚部. 现在再看图3中的 a₃,

$$\text{Im}^{(a_3)}\pi(q^2) = \frac{e^2}{3q^2} \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4k \left[d^4p \text{Tr} \{ \gamma_\mu(i(\hat{p} + \hat{k}) - m) \gamma_\alpha(i\hat{p} - m) \cdot \gamma_\mu(i(\hat{p} - \hat{q}) - m) \cdot \gamma_\alpha(i(\hat{p} - \hat{q} + \hat{k}) - m) \} \cdot \frac{2\pi\delta(p^2 + m^2)2\pi\delta((p-q+k)^2 + m^2)2\pi\delta(k^2)\theta(p_0)\theta(q_0 - p_0 + k_0)\theta(k_0)}{((p+k)^2 + m^2 - i\varepsilon)((p-q)^2 + m^2 - i\varepsilon)} \right], \quad (11)$$

上式右边 $\text{Tr}\{\gamma_\mu \cdots\}$ 在 $k_\mu \rightarrow 0$ 时仍为 (5) 式。在求对 k 积分时注意 δ 函数对分母的限制和红外近似下 $p \cdot q = \frac{1}{2} q^2$ 。取 $q = 0$ 参照系后得

$$-\frac{\pi}{q^2} \int \frac{dk}{k} \int_{-1}^1 \frac{dz}{1 - \left(\frac{|p|}{p_0}\right)^2 z^2} \delta((p-q)^2 + m^2) \theta(q_0 - p_0), \quad (12)$$

将 (12) 代入 (11) 式得知对 p 的积分也是 (6) 式, 故由 (11)、(12)、(5) 和 (6) 式得

$$\text{Im}^{(a_1)} \pi(q^2) \triangleq \frac{e^2}{3(2\pi)^3} \left(1 + \frac{4m^2}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \left(\frac{2m^2}{q^2}\right)\right) \int \frac{dk}{k} \int_{-1}^1 \frac{dz}{1 - \left(\frac{|p|}{p_0}\right)^2 z^2}, \quad (13)$$

图 3 中 a_2 又是 a_3 共轭, 故 $\text{Im}^{(a_2)} \pi(q^2)$ 的红外近似也是 (13) 式。因此

$$\text{Im}^{(a_1+a_2)} \pi(q^2) + \text{Im}^{(a_2+a_3)} \pi(q^2) \triangleq 0, \quad (14)$$

证明了图 3 中 a_1 到 a_4 ——它们都是从图 2 右边的第二个泡泡图用不同切割方式得出的红外发散在内部对消掉。

同样可证明光子线两端都挂在同一条(电子)线上的图 3 中 b 组 3 个图的红外发散也在内部对消。先看图 b_2 :

$$\begin{aligned} \text{Im}^{(b_2)} \pi(q^2) &= \frac{e^2}{3q^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k \int d^4p \text{Tr}\{\gamma_\mu(i\hat{p} - m)\gamma_\alpha(i(\hat{p} - \hat{k}) - m) \\ &\quad \cdot \gamma_\alpha(i\hat{p} - m) \cdot \gamma_\mu(i(\hat{p} - \hat{q}) - m)\} \\ &\quad \cdot \frac{2\pi\delta((p-k)^2 + m^2)2\pi\delta(k^2)2\pi\delta((p-q)^2 + m^2)\theta(p_0 - k_0)\theta(k_0)\theta(q_0 - p_0)}{(p^2 + m^2 - i\epsilon)(p^2 + m^2 + i\epsilon)}, \end{aligned} \quad (15)$$

上式右边求进因子在红外近似下

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu \cdots\} \triangleq -16m^2 q^2 \left(1 - \frac{2m^2}{q^2}\right), \quad (16)$$

注意到 $\delta((p-k)^2 + m^2)$ 限制, 在红外近似下先对 k 积分, 再在 $q = 0$ 系中对 p 积分后得出

$$\text{Im}^{(b_2)} \pi(q^2) \triangleq \frac{2e^2 m^2}{3(2\pi)^3 q^2} \left(1 + \frac{4m^2}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2m^2}{q^2}\right) \int \frac{dk}{k} \int_{-1}^1 \frac{dz}{\left(1 - \left(\frac{|p|}{p_0}\right)^2 z^2\right)^2}. \quad (17)$$

对于图 3 中的 b_1 , 不能照图写出 $\text{Im}^{(b_1)} \pi(q^2)$, 而先得对嵌入 b_1 中的自能部分 $\Sigma^{(2)}(i\hat{p})$ 在质壳点作质量重整化。即将

$$\Sigma^{(2)}(i\hat{p}) = e^2 \int d^4k \frac{\gamma_\alpha(i(\hat{p} - \hat{k}) - m)\gamma_\alpha}{((p-k)^2 + m^2 - i\epsilon)(k^2 - i\epsilon)},$$

在 $i\hat{p} = -m$ 处作展开:

$$\Sigma^{(2)}(i\hat{p}) = \Sigma^{(2)}(-m) + \Sigma_1^{(2)} S_F^{-1}(p) + \Sigma_2^{(2)} S_F^{-2}(p),$$

在去掉 $\Sigma^{(2)}(-m)$ 项后, 用 $\Sigma_1^{(2)} S_F^{-1}(p) \equiv \left. \frac{d\Sigma^{(2)}(i\hat{p})}{d(i\hat{p})} \right|_{i\hat{p}=-m} \cdot S_F^{-1}(p)$ 的一半代替图 3 b_1 中

的 $\Sigma^{(2)}(i\hat{p})$ 部分。注意 $\frac{d}{d(i\hat{p})} \equiv \frac{-i\hat{p}}{p^2} p_\mu \frac{\partial}{\partial P_\mu}$, 在红外近似下得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{di\beta} \Sigma^{(2)}(i\beta) \Big|_{i\beta=-m} \cdot S_F^{-1}(p) \triangleq S_F^{-1}(p) \cdot 2e^2 m^2 \int d^4k \frac{1}{(2p \cdot k)^2 (k^2 - i\epsilon)}, \quad (18)$$

这样

$$\begin{aligned} \text{Im}^{(b_1)} \pi(q^2) &\triangleq \frac{2e^2 m^2}{3i q^2} \frac{1}{(2\pi)^8} \int d^4p \int d^4k \text{Tr} \{ \gamma_\mu (i\beta - m)(i\beta + m) \\ &\cdot (i\beta - m) \gamma_\nu (i(\beta - \hat{q}) - m) \} \\ &\cdot \frac{2\pi \delta(p^2 + m^2) 2\pi \delta((p - q)^2 + m^2) \theta(p_0) \theta(q_0 - p_0)}{(p^2 + m^2 - i\epsilon)(2p \cdot k)^2 (k^2 + \lambda^2 - i\epsilon)}, \end{aligned} \quad (19)$$

通过求迹并对 k 和 p 变量积分后,得

$$\text{Im}^{(b_1)} \pi(q^2) \triangleq \frac{-e^2 m^2}{3(2\pi)^3} \left(1 + \frac{4m^2}{q^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2m^2}{q^2}\right) \int \frac{dk}{k} \int_{-1}^1 \frac{dz}{\left(1 - \frac{|\mathbf{p}|}{p_0} z\right)^2}, \quad (20)$$

考虑到图3中的 b_3 是 b_1 的共轭图后,得知 $\text{Im}^{(b_3)} \pi(q^2)$ 也等于(20)式。这样,由(17)和(20)得出

$$\text{Im}^{(b_1+b_3)} \pi(q^2) + \text{Im}^{(b_2)} \pi(q^2) = 0, \quad (21)$$

从而证明了 b 组的3个图的红外发散也是内部对消掉。

图3中第三组 c_1, c_2 和 c_3 都是从图2右边第四个泡泡图以不同切割方式得出的,其光子内线两端都挂在正电子线上,证明它们的红外发散也会彼此对消的方法与上全同,不再重复。这样我们不但证明了在 α^1 阶时 $\pi(q^2)$ 的切割泡泡图之和不存在红外发散,并且证明了这种红外对消是在与每一个泡泡图相应的切割泡泡图小集内部完成的。

对于 $\text{Im}\pi(q^2)$ 的 α 高阶计算、原则上同样处理,其基本步骤是:

1. 求出 α^n 阶时 $\pi(q^2)$ 的全部泡泡图。它们是图2的电子迴路上以各种可能方式嵌入光子内线和电子迴路,而得到的顶点数为 $2n + 2$ 的全部泡泡图。
2. 按 Landau-Cutkosky 讨论振幅奇异性规则^[6], 对所有泡泡图进行切割,得出每个泡泡图切割后的切割泡泡图小集。
3. 对每个切割泡泡图,先将其自能部分在电子质壳上作质量重整化和利用范围不变性去掉光子极化张量中的发散项,再照 Feynman 规则写出相应的 $\text{Im}\pi(q^2)$ 。
4. 用 [1、4] 中证明红外因子指数化的方法,对切割泡泡图在红外近似 ($k_\mu \rightarrow 0$) 下,求出领头对数近似 (LLA) 时的 $\text{Im}\pi(q^2)$ 、并验明红外发散在每个切割泡泡图小集内部对消。

三、由么正性引伸出的物理内涵和从解析性考察红外发散的对消; QCD 的红外问题

上节的 $\text{Im}\pi(q^2)$ 是计算电子对经单光子的湮没截面时的核心部分,在这种意义上讲,它就是(2)式单粒子初态的例子。通常的两粒子初态,(2)式就是熟知的光学定理。实验上无法实现三个(或多个)初态粒子的碰撞,因此在 $i \geq 3$ 时(2)式本身并没有实际价值。但是通过广义光学定理和振幅的解析性,却可以由它引伸出有物理意义的内涵。

先回忆高能碰撞中的内含过程。如 $a + b \rightarrow c + X, a + b \rightarrow c + d + X$, 等等。

它们都是两粒子初态,相应的内含截面 $E_c \frac{d\sigma^{(ab)}}{d\mathbf{p}_c}$, $E_c E_d \frac{d^2\sigma^{(ab)}}{d\mathbf{p}_c d\mathbf{p}_d}$ 等正比于图 5 代表的表达式

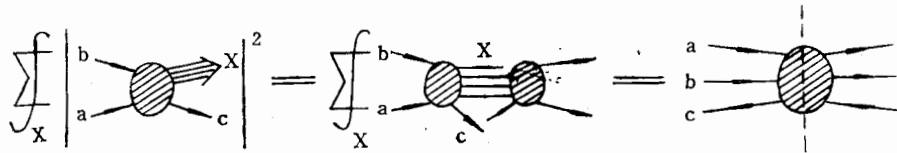


图 5 单粒子内含过程对应的广义光学定理

\sum_X 是对 X 道(即 $(a + b + \bar{c})$ 道)中所有允许态的求和求积. $M_X^2 = -(p_a + p_b - p_c)^2$. 对于与图 5 相应的表达式

$$E_c \frac{d\sigma^{(ab)}}{d\mathbf{p}_c} \propto \text{Im}^{(ab\bar{c})} T(M_X^2)$$

通常称为广义光学定理^[7]

公理式场论的一个基本假定就是认为 S 矩阵元或 Green 函数是某多元复变函数的边界值,且全部奇异性都是由各道中么正性条件确定.因此如图 6 中的两个 6 点 Green 函数 G_A 和 G_B ,就应该属于同一解析函数,但定义在不同的变数区上.原则上讲,可以用解析延拓从 G_A 定义区到 G_B 定义区去.

照此我们在将 $|i\rangle = |p_a, p_b, p_c\rangle$ 看作是 $|p_a, p_b, -p_c\rangle$ 后,认为与此相应的(2)式是表示与 $a + b \rightarrow \bar{c} + X$ 的单粒子内含过程的推广么正条件:等式左边是 a、b、 (\bar{c}) (照 $c \equiv (\bar{c})$ 理解)三粒子初态的

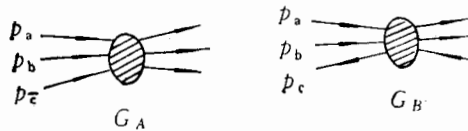


图 6 两个 6 点 Green 函数 G_A 和 G_B .

“弹性朝前散射”振幅虚部,右边对相应的中间态 X 道 ($M_X^2 = -(p_a + p_b - p_c)^2$) 的变数求和求积,这正是图 5 中用 \bar{c} 代替 c 后所表达的内容.当我们把这种理解与泡泡图展开方案相结合,就得知在 QED 范围内,由(2)式计算任何初态 $|i\rangle$ 的切割泡泡图中红外发散问题,实质上就是计算与 $|i\rangle$ 态相适应的某个内含截面的红外发散问题.由于所有内含截面均是物理可测的,不可能出现红外发散——即计算过程中出现的红外发散必然会内部对消.这样就得出了有关红外发散与否的一般性判断:凡能从推广么正条件计算得的截面以及由它们对各种非软变量微分而得出的截面,都不存在红外发散.熟知的 Bloch-Nordsieck 截面就是最简单的例子.

下面仍以 $\pi(q^2)$ 为例看如何从振幅解析性考察红外发散的抵消.通常认为 $\pi(q^2)$ 有下面的色散关系:

$$\pi(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-(2m)^2}^{-\infty} \frac{\text{Im}(q'^2)}{q^2 + q'^2 - i\epsilon} dq'^2$$

在 $-q^2$ 平面上,它沿实轴有系列的右割缝伸向 ∞ .这些割缝的阈值分别是 $(2m)^2$, $(2m + \lambda)^2$, $(2m + 2\lambda)^2$, \dots , 它们是图 2 右边系列泡泡图按 Landau-Cutkosky 规则切割后,相应的在质壳上的中间态 4 动量平方的最小值.我们只要考察对应图 3 的 α^1 阶的 $\pi(q^2)$ 解析性就能说明问题了.

先看图3的 a_1 和 a_4 , 它们在 $-q^2$ 中的阈值显然是 $-q^2 = (2m)^2$. 见图7. 设 B 、 A 是这割缝旁两紧邻点 $-q^2 \pm i\epsilon$, $\pi(q^2)$ 沿割缝的不连续性 (discontinuity) $\text{disc}^{(B-A)}\pi(q^2) \equiv {}^{(B)}\pi(q^2) - {}^{(A)}\pi(q^2)$, 由于 ${}^{(A)}\pi(q^2) = ({}^{(B)}\pi(q^2))^*$, 因而 $\frac{1}{2i} \text{disc}^{(B-A)}\pi(q^2) \equiv \text{Im}^{(a_1+a_4)}\pi(q^2)$. 再看 a_2 和 a_3 图, 它们有从 $-q^2 = (2m + \lambda)^2$ 起的另一右割缝, 设 C 、 B 是其旁的两紧邻点, 则 $\frac{1}{2i} \text{disc}^{(C-B)}\pi(q^2) \equiv \text{Im}^{(a_2+a_3)}\pi(q^2)$,

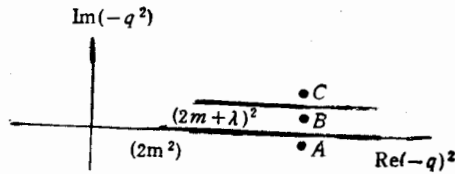


图7 $\pi(q^2)$ 在 $-q^2$ 平面上解析性(只画了
了两条最小阈值的割缝,并有意画开了一些)

$\text{Im}^{(a_1+a_4)}\pi(q^2)$ 和 $\text{Im}^{(a_2+a_3)}\pi(q^2)$ 分别都有红外发散, 其和(14)式则正好对消. 与之对应图7两割缝重合, B 点从物理叶上消失. A 点不能再解析延拓到 B 去, 而 B 点也不能由解析延拓到 C 点上来. 因而 $\frac{1}{2i} \text{disc}^{(B-A)}\pi(q^2)$ 和 $\frac{1}{2i} \text{disc}^{(C-B)}\pi(q^2)$ 都发散. 但 C 、 A 两点都在物理叶上, 显然可互作延拓, 其不连续性 $\frac{1}{2i} \text{disc}^{(C-A)}\pi(q^2)$ 为有限. 以上讨论显然也适用于图3中的 b 组图和 c 组图. 一般地讲对于 $\pi(q^2)$ 的任一泡泡图按规则得出的切割泡泡图小集来说, 当 $\lambda \neq 0$ 时它们在 $-q^2$ 平面内, 对应一组有不同阈值的割缝, 其上的 $\frac{1}{2i} \text{disc}\pi(q^2)$ 值都是有限; 而当 $\lambda \rightarrow 0$ 时这些割缝的阈值粘合到一点, 单条割缝上的

$\frac{1}{2i} \text{disc}\pi(q^2)$ 都变得红外奇异, 但它们全部相加后, 这些奇异性必然对消. 不难想像对于各种能由广义光学定理描绘的内含过程, 都会有这种结果.

最后简单讨论一下 QCD 中红外发散问题. 首先, 前面描述的做法, 在 QCD 中只有极少数情况(例如由虚光子、色中性流算符或束缚态导致的真空极化张量)可以适用. 在 $\alpha_s \left(= \frac{g_{\text{QCD}}^2}{4\pi} \right)$ 最低阶, 计算上与 QED 的一样, 只是还要对色指标求和, QED 时红外对消的结论这时仍成立. 在 α_s 高阶时, 胶子极化张量中出现 3 胶子顶点和鬼粒子态贡献, 计算比较复杂. 由于 [8] 中已经证明在 LLA 下 $\gamma^* \rightarrow q + \bar{q}$ 顶角的红外因子指数化在任意微扰阶均成立, 所以推测, QCD 中各个泡泡图按规则得出的切割泡泡图小集内部, 红外发散仍将内部对消. 但对 QCD 的一般过程, 本文所用方法可能失效, 主要原因是:

1. QCD 是非阿贝尔规范理论, 胶子在任何时刻始终有自作用、不可能像 QED 那样定义 Fock 空间中的渐近态, 也不可能“绝热地”引入相互作用, 因而得不到(2)式.

2. 实验上碰到的都是强子, 而 QCD 的基本客体是带色部分子. 至今未能从基本理

论上搞清楚如何由带色部分子构成出无色的强子。

因此我们认为,很难在微扰论框架下根本解决 QCD 中的红外问题。

四、小 结

运用 S 矩阵的么正性和散射振幅的解析性,我们可以从另一种角度考察量子场论中的红外问题,由上面讨论可以知道:

1. 和紫外发散一样,红外发散也可以在散射振幅阶段上处理.而且这里指出,在 QED 中的 LLA 下,过程中的红外发散在各切割泡泡图小集中就已相互对消掉。

2. 判断某过程是否存在红外发散的准则,是看它们能否纳入由(2)式引伸出的“推广么正条件”之中。得知除总截面及有关分布外,各内含过程截面都是不存在红外发散的,即其红外发散总是在内部对消掉。

3. 散射振幅泡泡图解析性的图示,提供了其中的红外发散项内部对消的“直观”图像。

4. 联系到本文的基本出发点(2)式,能清楚看出现今解决 QCD 红外问题时存在的困难。

参 考 文 献

- [1] D. R. Yennie, S. R. Frautschi and H. Surra, *Ann. of Phys.*, **13**(1961), 379.
- [2] J. Cornwall and G. Tiktopoulos, *Phys. Rev.*, **D13** (1976), 3370; Y. P. Yao, *Phys. Rev. Lett.*, **36** (1976), 542; A. Sugamoto, *Phys. Rev.*, **D15** (1977), 1065.
- [3] 吴咏时、戴元本, *Scientia Sinica*, **19** (1976), 65. J. Cornwall and G. Tiktopoulos, *Phys. Rev.*, **D13** (1976), 3370.
- [4] 戴元本,相互作用的规范理论,科学出版社,1987.
- [5] 彭宏安,北京大学学报(自然科学版), No. 5 1984, 36.
- [6] L. D. Landau, *Nucl. Phys.*, **13** (1959), 181. R. E. Cutkosky, *J. Math. Phys.*, **1** (1960), 429.
- [7] A. H. Mueller, *Phys. Rev.*, **D2** (1970), 2963; **D4** (1971), 150. P. D. B. Collins, "An introduction to Regge theory and high energy physics", Cambridge Univ. Press, 1977.
- [8] J. Frenkel, M-L. Frenkel and J. C. Taylor, *Nucl. Phys.*, **B124** (1977), 268.

Investigations of Infrared Divergence in Quantum Field Theory from Unitarities and Analyticities

PENG HONGAN

(Department of Physics, Peking University, 100871)

ABSTRACT

In this paper we have investigated the infrared divergence in QFT from the point of view of unitarities and analyticities. We have shown that in QED, the infrared divergence for the imaginary part of a bubble diagram at any order of α would be canceled each other between the set of cutting-bubble diagrams got from cutting rules of Landau Cutkosky. From the concept of generalized optical theorem and the hypothesis of analyticities of the scattering amplitude, we have drawn the physical connotation from the general formula of unitarity. for "forward scattering processes", and thus getting a criterion in QED for whether in a process there exist infrared divergence or not. Also from the variation of thresholds of a bubble diagram of $\pi(q^2)$ in the $-q^2$ plane as the photon mass λ approaches to zero, we have shown diagrammatically how the infrared divergence in the corresponding cutting-bubble diagrams be canceled between them. At last we give a short discussion about difficulties and problems for treating infrared divergence in QCD.