

# 具有排斥心的短程吸引力作用下的 三体系统内部运动的质量效应\*

段宜武 丘国春 鲍诚光  
(湘潭师范学院) (广西大学, 南宁) (中山大学, 广州)

## 摘 要

本文选择了一个三体模型, 研究了质量对其内部运动的影响, 发现了新的内部运动模式。

## 一、引 言

物质系统的结构和运动形态是物理学要研究的基本问题。对三体系统内部运动形态的研究是近年来量子力学、少体物理中的令人感兴趣的课题<sup>[1,4-6]</sup>。一般说来, 粒子间相互作用的性质和空间波函数对粒子交换的对称性决定了系统内部的粒子关联, 因而也决定了系统内部结构和运动形态的主要特征。对于在具有排斥心的短程吸引力作用下由三个全同玻色子组成的全对称体系的结构和内部运动, 已在文献[1]中作了系统地研究并发现了内部运动模式的存在。本文的目的主要是研究当系统由全同粒子系变为部分全同粒子系, 即考察在改变三个粒子中的一个粒子的质量时, 系统的结构和内部运动有何变化。为此, 我们选择了一个含有两个全同玻色子和一个质量待定粒子的三体模型。相互作用取为双高斯势, 其中考虑了不同力程和强度的多种情况, 利用简谐振子展开方法, 求解了系统  $0^+$  态的本征问题; 进一步利用形状密度, 系统地研究了该模型的结构和内部运动。研究结果表明质量对运动模式有显著的影响, 并发现了新的内部运动模式。

## 二、模型与理论

我们选择的三体模型是: 系统由两个全同的玻色子和一个质量待定的粒子组成, 诸粒子的自旋、内部构造等暂不考虑。其中两个全同粒子的质量取为  $\alpha$  粒子的质量 ( $m_\alpha = 3728\text{MeV}$ ); 另一个粒子的质量则有代表性地分别选择为  $1/4, 1, 6/4$  倍  $\alpha$  粒子的质量。

粒子之间的两体势选择为具有排斥心和吸引尾的双高斯势:

\* 国家自然科学基金资助课题。  
本文 1988 年 9 月 6 日收到。

$$V(r) = A \cdot \left\{ -300 \exp \left[ - \left( \frac{r}{2.105 \cdot B} \right)^2 \right] + 600 \exp \left[ - \left( \frac{r}{1.428 \cdot B} \right)^2 \right] \right\} \quad (1)$$

式中的  $A$  和  $B$  分别是调整作用强度和力程的参数。为了突出质量效应，在大多数情况下取  $A = B = 1.0$ 。能量和长度的单位分别取为 MeV 和 fm。

我们取定一组足够多的，其本征频率  $\omega$  经恰当选取的谐振子乘积波函数作为基矢来展开薛定谔方程的本征解，利用广义 Talmi-Moshinsky 交换系数<sup>[2,3]</sup> 计算出哈密顿矩阵元并将体系的哈密顿对角化后，得到了一系列  $0^+$  态解。其中可调参数谐振子频率  $\omega$  由使基态能量最低的条件定出。由于本模型对第一、第二粒子交换的对称性，为了计算简便，

Jacobi 坐标的选择如图 1 所示。所用基矢的数目为 95，其中第一、第二粒子间的相对角动量为偶数。这样计算出来的结果已很精确，例如对于基态能量，相对误差  $\Delta E/E$  约为千分之一。

由于内部运动表现为形状的变化，由于体系的几何结构和它的最可几形状相联系，为了研究内部运动和几何结构，在文献[1]中定义了形状密度；它是体系处于特定形状和特定取向的几率密度。在当前的情况下，考虑到体系只有两个全同粒子，形状密度  $\rho_s$  可定义如下：

$$\rho_s = 8\pi^2 |\psi|^2 r^2 R^2 \sqrt{r^2 + R^2} \sin \theta \quad (2)$$

其中  $r$ 、 $R$  即图 1 的  $r_a$ 、 $R_a$ ， $\theta$  为其间的夹角。为了方便地研究第三粒子的质量对体系的内部运动的效应，我们定义了形状密度的条件极大值  $\rho_s^{mc}$ ：

$$\rho_s^{mc}(R, \theta) = \rho_s(r_s^{mc}(R, \theta), R, \theta) \quad (3)$$

式中  $r_s^{mc}(R, \theta)$  是在给定  $R$ 、 $\theta$  下使形状密度  $\rho_s$  取条件极大值的  $r$  值。它可视为在  $R$ 、 $\theta$  给定后两个全同粒子之间的最可几距离。作为  $R$ 、 $\theta$  的函数， $r_s^{mc}$  的变化说明了全同粒子如何对第三粒子的运动作出反应，因而形象地给出了诸粒子之间的关联。在求得诸  $0^+$  态波函数的基础上，以下将对  $\rho_s$  和  $\rho_s^{mc}$  进行仔细的研究。

### 三、总势的分析

在给出对  $\rho_s$  和  $\rho_s^{mc}$  的研究结果之前，先讨论一下总势是很有益的。总势的定义是：

$$V(r, R, \theta) = \sum_{i < j} V(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (4)$$

它是形状  $r$ 、 $R$ 、 $\theta$  的函数。文献[1]中已就  $\theta = 90^\circ$  时总势的形状进行了讨论；预示了体系可能存在着呼吸、折叶等模式的内部运动，还存在着单个粒子的逃跑通道等。

作为对总势的补充，与  $\rho_s^{mc}$  的定义相类似，我们又定义了一个总势的条件极小值：

$$V^{mc}(R, \theta) = V(r_v^{mc}(R, \theta), R, \theta) \quad (5)$$

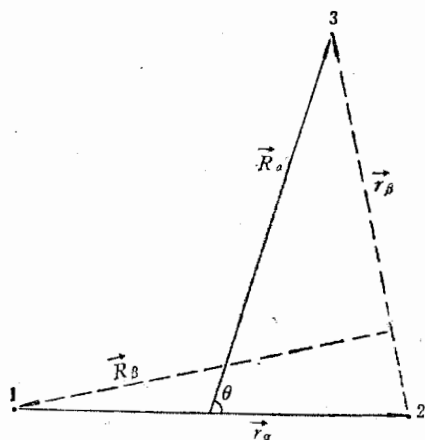


图 1 三体系统及其 Jacobi 坐标

式中

放置  
2.04  
我们  
ii)

沿 C  
这说  
种可  
体系  
相应  
在 R  
围。  
体，

的结

同的  
仔细  
 $\rho_s$  最

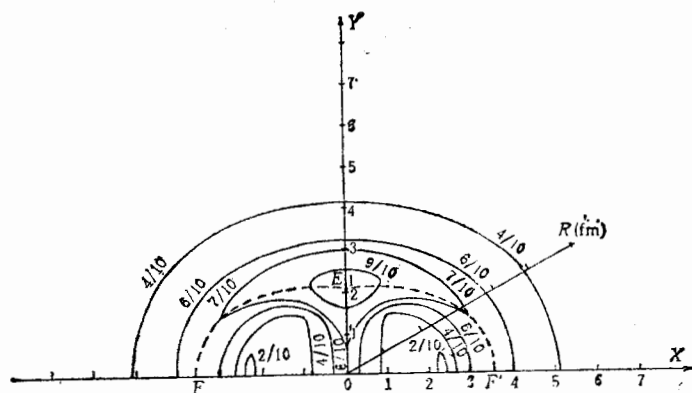


图 2 总势的条件极小值  $V^{mc}(R, \theta)$ . 其中  $A = B = 1.0$ , 而  $\sqrt{X^2 + Y^2} = R$ ,  $\tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) = \theta$ . 以  $V^{mc}$  的最小值  $-138.83 \text{ MeV}$  为单位标记各等势曲线

式中  $r_{\text{vc}}^c(R, \theta)$  的意义与  $r_{\text{vc}}^c(R, \theta)$  类似, 是在给定  $R, \theta$  下使总势  $V$  取条件极小值的  $r$  值.

$A = B = 1.0$  时的  $V^{mc}(R, \theta)$  作为  $R, \theta$  的函数如图 2 所示. 其中第一, 第二粒子被放置在  $\pm X$  轴上, 其坐标分别为  $(\pm r_{\text{vc}}^c/2)$ . 从图中, 很容易看到: i) 在  $\theta = 90^\circ$ ,  $R = 2.04 \text{ fm}$  处总势有一最小值  $-138.83 \text{ MeV}$ , 此时  $r_{\text{vc}}^c = 2.36 \text{ fm}$ , 对应于一个正三角形. 我们发现体系的基态波函数将分布在这一几何构形附近, 这一构形显然是相当稳定的; ii) 图 2 表明沿  $\pm X$  轴有两个峰. 为了避开这些峰, 第三粒子的运动有两种可能. 一是沿  $OY$  轴的运动. 这时相应的  $r_{\text{vc}}^c(R, 90^\circ)$  基本上满足关系式  $\sqrt{(r_{\text{vc}}^c/2)^2 + R^2} = \text{const.}$ . 这说明折叶模式是一种容易被激发的模式, 将有可能在低激发态中出现. 第三粒子另一种可能的运动是沿着  $\widehat{FEF'}$  弧运动, 此时  $r_{\text{vc}}^c(R, \theta)$  的值几乎保持在  $2.4 \text{ fm}$  不变, 说明体系的运动是由  $\theta$  的变化而不是由径向的变化来表征. 注意到当  $R$  发生转动时  $r$  必须相应地作逆向转动以保持总角动量守恒. 因此, 此时的运动模式是扭摆运动; iii) 最后, 在  $R$  大区 ( $R > 4.5 \text{ fm}$ ), 总势随  $R, \theta$  的变化较微, 这给第三粒子提供了广阔的运动范围. 此时  $r_{\text{vc}}^c(R, \theta)$  的值恒为  $2.4 \text{ fm}$ . 这预示着单个粒子可以在  $R$  大区逃离而使体系解体, 剩下一个束缚的两体子系统.

以上三点, 对于相互作用为三对具有排斥心的短程吸引力的三体系统来说是普遍性的结论. 改变相互作用的力程 ( $B$ ) 和强度 ( $A$ ) 之后, 定性结论还是一致的.

#### 四、基态结构的质量效应

我们对体系在第三粒子取不同质量 ( $m_3$ ) 以及第三粒子与一、二粒子的相互作用取不同的强度 ( $A$ ) 和力程 ( $B$ ), 一、二粒子间的相互作用保持不变的各种情况下的基态作了仔细的计算. 各种情况下基态的最可几形状始终是一个等腰三角形. 其能量和相应于  $\rho_3$  最大值的可几形状如表 1 所列. 从表 1 中我们可以发现:

表1 基态能级以及最可几结构 (长度单位: fm)

系 统			基态能量	结 构		
$m_3$	$A$	$B$	$E0_1^+(MeV)$	$r$	$R$	$\rho_1^{\max}(r, R, 90^\circ)$
$\frac{1}{4}m_\alpha$	0.5	1.0	-36.280	2.56	2.66	0.88
	1.0	1.0	-60.691	2.57	2.43	1.51
		1.5	-77.117	2.57	3.67	1.93
$m_\alpha$	1.0	1.0	-77.439	2.58	2.24	2.76
		1.5	-95.439	3.76	3.25	3.71
$6/4m_\alpha$	0.5	1.0	-47.052	2.61	2.30	1.97
	1.0		-80.432	2.60	2.20	3.09
	1.5		-116.79	2.60	2.16	3.91

(1) 质量效应. 当  $m_3 = m_\alpha$  时最可几结构为正三角形, 边长为 2.58fm; 若  $m_3 > m_\alpha$ , 最可几结构为一个略扁的等腰三角形; 当  $m_3 < m_\alpha$  时, 则正好相反, 形成尖等腰三角形.

(2) 与相互作用强度和力程的关系. 由式(1)可知强度和力程分别正比于参数  $A$  和  $B$ . 当  $A$  增大(减小)时, 相应的边长略有缩短(伸长). 反之, 当  $B$  增大(减小)时, 相应的边长明显地增长(缩短), 二者几乎成正比.

## 五、内部运动的质量效应

少体系统的内部运动表现为形状的变化. 在经典力学的情况下, 形状的变化由相空间内的一条轨迹来描写, 不同的轨迹表示不同的运动模式. 在量子力学的范畴内, 没有严格的轨道. 但在文献[1]中发现形状密度在相空间的分布很不均匀, 它是沿着一些特定的轨道进行分布的, 属于不同的态的分布有很大差异, 这就揭示了在少体系统内部存在着特定的运动模式, 不同的态与不同的一些运动模式相联系. 本文将沿用文献[1]的方法, 对  $\rho_1$  在相空间的分布进行仔细的观察, 并着重研究第三粒子的质量对体系内部运动的影响.

当  $A = B = 1.0$  时各  $0^+$  态的能量本征值如表 2 所列. 当  $m_3$  取作  $m_\alpha$  时, 我们只挑选对三个粒子间的交换全对称的态(有五条), 比其余情况少. 一般说来, 在相互作用假定不变时, 质量愈重的体系束缚态愈多. 这是由于动能减少导致整个能谱往下移动的缘故. 这一点可明显地从表 2 中看到.

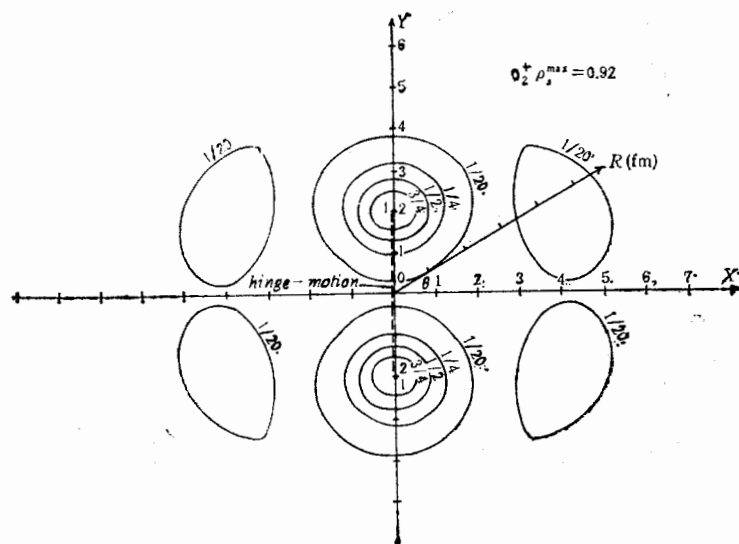
下面先就  $m_3 = 1/4m_\alpha$  的情形下体系各  $0^+$  态的内部运动进行逐一的分析:

(1) 此时基态 ( $0_1^+$ ) 的最可几形状是一个底角为  $62.13^\circ$  的尖等腰三角形, 其底边为 2.57fm, 腰长为 2.75fm. 基态中的内部运动主要是围绕这一最可几形状的小扭动或小摆动. 质量效应主要表现在轻粒子(第三粒子)的运动幅度显著地大于重粒子.

(2) 第一激发态 ( $0_2^+$ ) 的  $\rho_1$  作为  $R, \theta, r$  的函数分布在两个区域上. 一个区域在  $r = 3.65\text{fm}$  附近(简称为上区), 另一个区域在  $r = 2.60\text{fm}$  附近(简称为下区).  $\rho_1$  的最大极值为 0.92, 出现在上区;  $\rho_1$  的次极大值为 0.54, 出现在下区. 总的说来体系处于上区

表 2  $0^+$  态能量本征值 (单位: MeV,  $A = B = 1.0$ )

$m_3$ \ 态	$0_1^+$	$0_2^+$	$0_3^+$	$0_4^+$	$0_5^+$	$0_6^+$	$0_7^+$	$0_8^+$	$0_9^+$	$0_{10}^+$	$0_{11}^+$
$1/4 m_\alpha$	-60.691	-33.13	-28.92	-14.26	-7.23	-3.12					
$m_\alpha$	-77.439	-47.45	-35.67	-18.70	-11.38						
$6/4 m_\alpha$	-80.432	-58.11	-51.03	-42.09	-40.03	-27.60	-24.45	-21.56	-17.61	-12.56	-4.49

图 3  $0_2^+$  态的形状密度  $\rho_2$  在  $r = 3.65 \text{ fm}$  的情况下作为  $R, \theta$  的函数在  $XY$  平面上的分布图。

其中  $\sqrt{X^2 + Y^2} = R$ ,  $\tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right) = \theta$ 。第一、第二粒子被对称地放在  $\pm X$  轴上 ( $\pm r/2$ ), 以  $\rho_2$  的最大值  $\rho_2^{\max}$  作为单位标记各等几率线。以下各图均如此

的几率比处于下区的几率大。当  $r$  给定为  $3.65 \text{ fm}$  时,  $\rho_2$  的分布作为  $R, \theta$  的函数如图 3 所示。该图表明沿着  $OY$  轴有两个互相靠近的峰, 峰值给出  $\rho_2$  的最大值。由峰的位置得知  $0_2^+$  态的最可几形状是一个腰长为  $2.72 \text{ fm}$ , 底边长为  $3.65 \text{ fm}$  的扁等腰三角形, 其底边显著地长于基态。与之相联系的内部运动是由两个靠近的峰所表征的振动(该图的原点是振动的节点)。这种振动属于折叶模式, 但和文献[1]所讨论过的有所不同。因为目前大部分动能被集中到轻粒子上, 使得轻粒子能够穿越底边(即穿越重粒子的连线)而形成振幅较大的上下振动。当轻粒子在作上下振动时, 通过对  $r_i^{\text{mc}}(R, \theta)$  的研究表明  $r_i^{\text{mc}}$  不随轻粒子的位置变化而变化, 而是保持在  $3.65 \text{ fm}$  附近。这表明轻粒子运动对重粒子的干扰是轻微的。

$\rho_2$  在下区的典型分布如图 4 所示。这对应于一种以角度的变化(转动)为主的运动模式——类摆模式(或扭摆模式)。当轻粒子沿图中的折线运动时,  $r_i^{\text{mc}}$  保持在  $2.6 \text{ fm}$  附近。这说明在扭摆运动中沿径向的运动是轻微的。

类摆模式在文献[1]所研究的  $0_2^+$  态中很不显著, 但在当前则上升为仅次于折叶模式

$m_\alpha$   
和  
Z的

控  
严  
的  
特  
对  
影

挑  
定  
女。

为  
摆

在  
大  
区

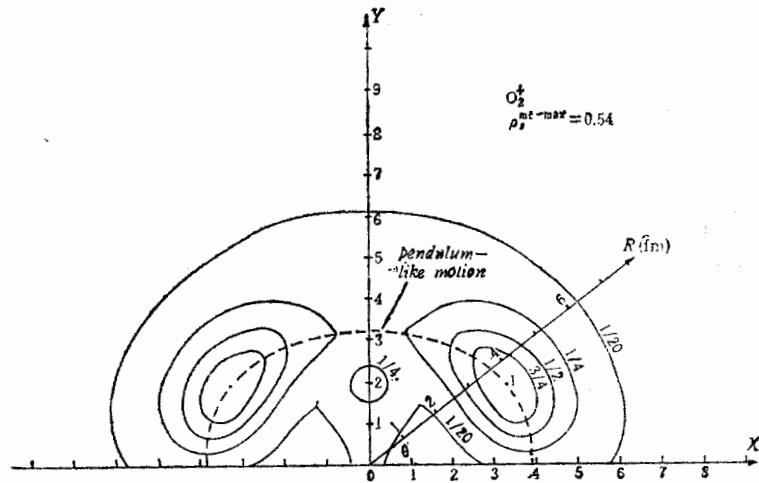


图4  $0_2^+$  态的形状密度的条件极大值  $\rho_2^{max}(R, \theta)$ 。其中  $r_2^{max}(R, \theta)$  的值被限制在下区 (2.6 fm 附近)

的另一重要模式,可见质量效应是重要的,它改变了每一模式的细节,同时又改变了不同模式间的相对重要性。

(3) 第二激发态 ( $0_3^+$ ) 的内部运动和  $0_2^+$  态类似,仍以折叶模式和类摆模式为主。虽然折叶模式仍是最重要的,但类摆模式显得比在  $0_2^+$  态中更为重要,而且类摆运动的摆幅也比  $0_2^+$  态中稍大。折叶模式则和  $0_2^+$  态的有较大区别。 $0_2^+$  态的折叶模式中  $r$  几乎不变,主要是  $R$  的变化;与之相反,  $0_3^+$  态的  $r$  值有较激烈的变化而  $R$  的变化甚微(见图5)。换言之,在  $0_3^+$  的折叶模式中以重粒子的相对振动为主。

(4) 对于更高的激发态,除了以上提到的以  $R$  的振动为主和以  $r$  的振动为主的两种折叶模式以及类摆模式外,没有发现新的模式。当然,对于较高的态,振幅也更大。值得一提的是类摆模式(轻粒子在两个重粒子连线的一侧来回摆动)和旋转模式(轻粒子绕两

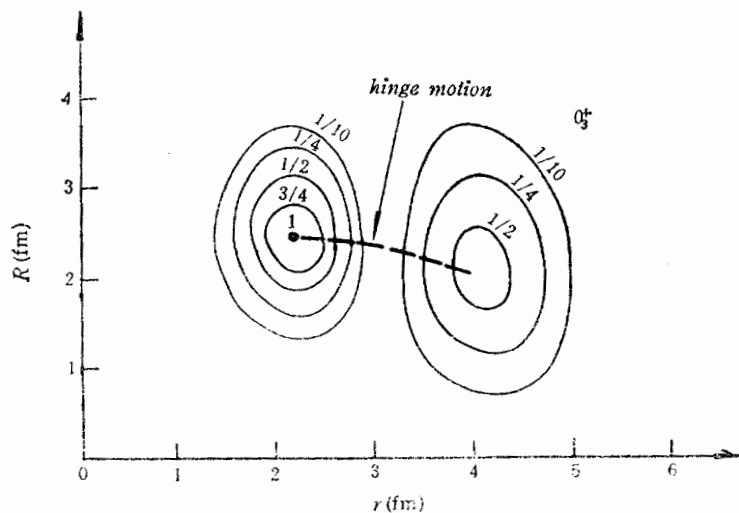


图5  $0_3^+$  态的形状密度  $\rho_3$ , 其中  $\theta = 90^\circ$ ,  $\rho_3^{max} = 0.81$

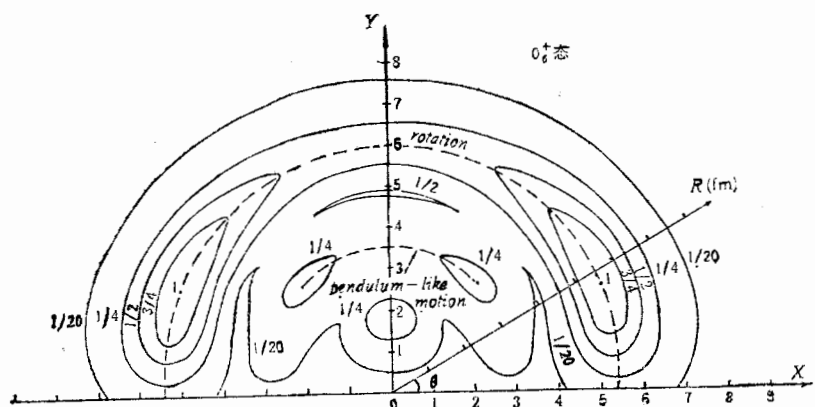


图 6  $0_1^+$  态的形状密度的条件极大值  $\rho_m^{mc}(R, \theta)$ , 对  $r_m^{mc}$  的取值范围未作任何限制.  $\rho_m^{mcmax} = 0.97$

个重粒子旋转) 实际上是难以区分的; 旋转成分的相对重要性将随着激发能的增高而增大. 再者, 当能量增高时, 可以观测到摆动(或旋转)与振动的结合, 这可以从图 6 的复杂结构中看出.

另一方面, 在文献[1]对  $0_1^+$  态的研究中, 曾发现了显著的呼吸模式(保持三角形按比例增大和缩小的模式). 但在当前的情况下, 呼吸模式不存在. 这也是质量效应的表现.

研究表明, 如果改变力程 ( $B$ ) 和作用强度 ( $A$ ), 上面的结论在定性上并无多大改变, 所不同的是内部运动的幅度和范围会随  $A, B$  的变化而变化. 但若改变力的基本性质(例如去掉排斥心), 则预期系统的结构和内部运动形态会有剧烈的变化.

对于第三粒子较重的情况, 我们取  $m_3 = 6/4m_a$ . 在  $A = B = 1.0$  条件下进行了计算. 结果可归纳如下: 观察到了呼吸模式(注意此时  $m_3$  与  $m_1 = m_2$  相差不大,  $0_1^+$  态), 在以  $r$  的振动为主的折叶运动中出现了明显的线结构(轻粒子在两端); 在以  $R$  为主的折叶运动中, 第三粒子不一定通过中点(除非激发能很高); 类摆运动的摆幅明显变小, 因而旋转模式更难出现.

## 六、结 束 语

综合我们的结果, 可以认为折叶模式仍是重要的和最易于被激发的模式. 但在第三粒子质量很轻的情况下, 发现了两种重要的内部运动模式, 即类摆模式和旋转模式. 内部运动与第三粒子的质量的关系大致是: 当  $m_3 \ll m_a$  时, 轻粒子的运动相当重要, 呼吸模式很难出现, 而以轻粒子的运动为主的折叶运动和类摆运动(甚至旋转模式)则容易出现并占重要地位. 反之, 当  $m_3$  略大于  $m_a$  时, 以重粒子的运动为主的类摆和旋转模式较难出现, 重粒子会跑到轻粒子之间形成一种以线结构为基础的振动.

若是粒子间相互作用的基本特征(排斥心加吸引尾)不改变, 力程和强度的改变不足以改变定性的结论.

本文仅仅研究了三体束缚态中的质量效应, 由于所选择的模型和相互作用具有普遍性, 可以期望, 我们的结论不仅对于核三体, 而且对分子、原子少体系统也是适用的. 作为

进一步的研究,我们可以在第三粒子与一、二粒子的相互作用中去掉排斥心而考虑第三粒子的粘胶效应,也可以研究总角动量  $L \neq 0$  的态的空间取向并进行  $K$  分类,还可以对具体的物理系统作同样的研究。总之,对少体系统内部运动模式的研究还是一个很少被人涉及的领域,值得我们做大量的工作。

感谢曹亨道、吴宗恩同志对本工作给予的热情帮助和关怀。对黎弋同志所进行的有益讨论表示感谢。

### 参 考 文 献

- [1] C. G. Bao, et al., *Few-Body Systems*, 2(1987), 81.
- [2] W. Tobocman, *Nucl. Phys.*, **A357** (1981), 293.
- [3] Y. P. Gan, et al., *Computer Physics Communications*, 34(1985), 387.
- [4] C. G. Bao, *Nucl. Phys.*, **A373**(1982), 1.
- [5] C. G. Bao, et al., *Nucl. Phys.*, **A493**(1985), 456.
- [6] M. C. L. Orlowski, et al., *Z. Phys. A-Atoms and Nuclei*, 305(1982), 249.

## MASS EFFECT ON THE INTERNAL MOTIONS IN THREE-BODY SYSTEMS UNDER THE PAIRWISE INTERACTION WITH A REPULSIVE CORE AND AN ATTRACTIVE TAIL

DUAN YIWU

(Xiangtan Teachers' College)

QIU GUOCHUN

(Guangxi University, Nanning)

BAO CHENGGUANG

(Zhongshan University Guangzhou)

### ABSTRACT

In this paper, the mass effect on the internal motions in modeled three-body systems has been analysed in detail. Two new modes of internal motion in three-body systems have been found.