第13卷 第10期　高能物理与核物理　Vol. 13, No. 10
1989年10月　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　Oct., 1989

SU(3) 群平均元格内能的累积展开计算*

陈启洲　刘金明　薛　迅　郑维宏　郭硕鸿
(中山大学物理系，广州)

摘　要

本文对 d 维空间 $SU(3)$ 群的平均元格内能作了解析的累积展开计算．我们用多重级数展开和最陡下降法来计算 $SU(3)$ 单链积分．两种方法在高精确度下相符．计算结果表明累积展开适用于3维空间格点规范理论．

一、引　言

变分-累积展开法[1]是格点规范理论的一种行之有效的解析近似方法．此方法是在适当的零级近似作用量基础上，对规范场配分函数作系统的累积展开．用这方法来计算格点规范理论的平均元格内能[2]，都得到与 MC 数据自洽的结果．虽然目前还不能证明展开的收敛性，但从计算结果看来，展开式收敛于 MC 数据，一般计算到3—4级近似就可以得到比较满意的结果．

另一方面，我们还发展了一种有精确基态的哈密顿形式变分法[3]．这方法用于2＋1维格点规范理论时，由于在2维空间中的矩阵元都准确可积，就可对胶球质量得到一些可靠的结果．在3＋1维情形，由于3维空间的矩阵元不能准确求积，因而需要用 MC 方法或比较可靠的解析方法来近似计算这些矩阵元．

本文有两个目的．一方面是发展 $SU(3)$ 群的变分-累积展开计算方法；另一方面是检验此法在3维空间中的有效性．在第二节中导出 $SU(3)$ 群累积展开用单链积分表出的公式．第三节给出计算这些单链积分的两种方法：多重级数展开法和最陡下降法．这两种方法在相当高的精确度下得到了相符的结果．

二、SU(3) 群配分函数的累积展开

格点规范理论的累积展开为[1]

$$Z = e^{\langle S-S_0\rangle_0}\int [dU]e^{S_0}e^{S-S_0-\langle S-S_0\rangle_0}$$
$$= Z_0e^{\langle S-S_0\rangle_0}\left[1+\frac{1}{2}\langle(S-S_0-\langle S-S_0\rangle_0)^2\rangle_0+\cdots\right], \qquad (1)$$

* 此项研究计划得到国家教委科学基金会和中山大学高等学术中心基金会资助．
本文1989年1月3日收到．

其中

$$S=\frac{\beta}{2N}\sum_{p}\mathrm{Tr}(U_p+U_p^{+}),\tag{2}$$

$$S_0=\sum_{l}\mathrm{Tr}(J_l^{+}U_l+U_l^{+}J_l),\tag{3}$$

$$\langle\cdots\rangle_0=Z_0^{-1}\int[dU]e^{S_0}(\cdots).\tag{4}$$

由(1)式,

$$\ln Z=\ln Z_0+\langle S-S_0\rangle_0+\frac{1}{2}\langle(S-S_0-\langle S-S_0\rangle_0)^2\rangle_0+\cdots,\tag{5}$$

下面用 $Z(J)$ 代表单链积分

$$Z(J)=\int dU e^{\mathrm{Tr}(J^{+}U+U^{+}J)},\tag{6}$$

矩阵元 J_{ij} 和 J_{ij}^{+} 为变分参数. 我们只研究 $J_{ij}=z\delta_{ij}$ 的特殊情况,以 Z_0 表示

$$Z_0=Z(J)|_{J=zI}=\int dU e^{z\mathrm{Tr}(U+U^{+})}.\tag{7}$$

计算(5)式右边各量时,我们需要以下的单链积分

$$Z_0\langle U_{ij}\rangle_0=\int dU e^{z\mathrm{Tr}(U+U^{+})}U_{ij}=\left.\frac{\partial Z(J)}{\partial J_{ji}^{+}}\right|_{J=zI},\tag{8}$$

$$Z_0\langle U_{ij}U_{\alpha\beta}\rangle_0=\int dU e^{z\mathrm{Tr}(U+U^{+})}U_{ij}U_{\alpha\beta}=\left.\frac{\partial^2 Z(J)}{\partial J_{ji}^{+}\partial J_{\beta\alpha}^{+}}\right|_{J=zI},\tag{9}$$

$$Z_0\langle U_{ij}U_{\alpha\beta}^{+}\rangle_0=\int dU e^{z\mathrm{Tr}(U+U^{+})}U_{ij}U_{\alpha\beta}^{+}=\left.\frac{\partial^2 Z(J)}{\partial J_{ji}^{+}\partial J_{\beta\alpha}}\right|_{J=zI}.\tag{10}$$

由文献[4], $Z(J)$ 可表为四个不变量 X_k 的四重级数

$$Z(J)=Z(X_1,X_2,X_3,X_4),\tag{11}$$

$$\begin{aligned}
X_1&=\mathrm{Tr}JJ^{+},\\
X_2&=\frac{1}{2}[(\mathrm{Tr}J^{+}J)^2-\mathrm{Tr}(J^{+}J)^2],\\
X_3&=\det JJ^{+},\\
X_4&=\det J+\det J^{+}.
\end{aligned}\tag{12}$$

由(12)式直接计算得

$$\left.\frac{\partial X_k}{\partial J_{ji}^{+}}\right|_{J=zI}=f_k\delta_{ij},\tag{13}$$

$f_1=z$, $f_2=2z^3$, $f_3=z^5$, $f_4=z^2$.

令

$$Z_k\equiv\left.\frac{\partial Z(J)}{\partial X_k}\right|_{J=zI},\tag{14}$$

得

$$Z_0\langle U_{ij}\rangle_0=Z_kf_k\delta_{ij}=\frac{1}{6}Z_0'\delta_{ij},\tag{15}$$

其中 $Z_0' = \partial Z_0/\partial z$. 同样,令

$$Z_{kl} \equiv \left.\frac{\partial^2 Z(J)}{\partial X_l \partial X_k}\right|_{J=zI}, \tag{16}$$

直接计算得

$$\left.\frac{\partial^2 X_h}{\partial J^+_{\beta i} \partial J^+_{ji}}\right|_{J=zI} = h_k(\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} - \delta_{\alpha j}\delta_{\beta i}) \tag{17}$$

$$h_1 = 0,\ h_2 = z^2,\ h_3 = z^4,\ h_4 = z.$$

代入 $Z(J)$ 的二阶导数得

$$\left.\frac{\partial^2 Z}{\partial J^+_{ji} \partial J^+_{\beta\alpha}}\right|_{J=zI} = (Z_{kl}f_k f_l + Z_h h_k)\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} - Z_k h_k \delta_{\alpha j}\delta_{\beta i}$$

$$\equiv A\delta_{\alpha\beta}\delta_{ij} - B\delta_{\alpha j}\delta_{\beta i}, \tag{18}$$

同法可求出

$$\left.\frac{\partial^2 Z}{\partial J^+_{ji} \partial J_{\beta\alpha}}\right|_{J=zI} = F\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} + G\delta_{\alpha j}\delta_{\beta i}, \tag{19}$$

$$F = Z_{kl}f_h f_l + z^2 Z_2 + z^4 Z_3,$$

$$G = Z_1 + z^2 Z_2.$$

函数 A, B, F 和 G 可用 Z_0, Z_0', Z_0'' 和 Z_4 表出. 由

$$\int dU e^{\mathrm{Tr}(J^+U + U^+J)} U_{ij} U^+_{j\beta} = Z_0 \delta_{i\beta} = (F + 3G)\delta_{i\beta},$$

得

$$Z_0 = F + 3G, \tag{20}$$

同样得

$$Z_0'' = 6(3A - B + 3F + G). \tag{21}$$

由(18)和(19)式中 A, B, F 和 G 的表示式得

$$A = F + zZ_4, \tag{22}$$

$$B = -G + \frac{1}{6} Z_0'. \tag{23}$$

由(20)—(23)式可得到,用 Z_0, Z_0', Z_0'' 和 Z_4 来表示 A, B, F 和 G 的式子如下

$$G = \frac{3}{16}\left(2Z_0 - \frac{1}{18z} Z_0' - \frac{1}{18} Z_0'' + zZ_4\right),$$

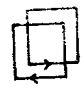
$$B = \frac{1}{6z} Z_0' - G,$$

$$F = Z_0 - 3G,$$

$$A = Z_0 - 3G + zZ_4. \tag{24}$$

用以上公式可以求得对应于(5)式的各种图形的平均值.

$Z_0^4\Big\langle$  $\Big\rangle_0 = 9A^4 - 12A^3B + 54A^2B^2 - 12AB^3 + 9B^4,$ (25)

$$Z_0^4\left\langle \right.$$  $$\left.\right\rangle_0 = 9F^4 + 12F^3G + 54F^2G^2 + 108FG^3 + 81G^4, \tag{26}$$

$$Z_0^7\langle\square\square\rangle_0 = \left(\frac{1}{6}Z_0'\right)^6 Z_0'', \tag{27}$$

$$Z_0^4\langle\square|\rangle_0 = \left(\frac{1}{6}Z_0'\right)^3 Z_0'', \tag{28}$$

$$Z_0\langle\|\rangle_0 = Z_0''. \tag{29}$$

把这些结果代入(5)式得 d 维空间的自由能

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N_p}\ln Z &= \frac{2}{d-1}\ln Z_0 + \beta\left(\frac{1}{6}\frac{Z_0'}{Z_0}\right)^4 - \frac{2}{d-1}z\left(\frac{Z_0'}{Z_0}\right) \\
&+ \frac{2}{d-1}\frac{z^2}{2}\left(\frac{Z_0''}{Z_0} - \frac{Z_0'^2}{Z_0^2}\right) - \frac{1}{2}\beta^2\left(\frac{Z_0'}{6Z_0}\right)^8 \\
&+ \frac{\beta^2}{6^2}\{9A^4 - 12A^3B + 54A^2B^2 - 12AB^3 + 9B^4 \\
&+ 9F^4 + 12F^3G + 54F^2G^2 + 108FG^3 + 81G^4\} \\
&+ 2(2d-3)\beta^2\frac{1}{6^8}\left(\frac{Z_0''}{Z_0} - \frac{Z_0'^2}{Z_0^2}\right)\left(\frac{Z_0'}{Z_0}\right)^6 \\
&- 4\beta z\frac{1}{6^4}\left(\frac{Z_0''}{Z_0} - \frac{Z_0'^2}{Z_0^2}\right)\left(\frac{Z_0'}{Z_0}\right)^3.
\end{aligned} \tag{30}$$

平均元格内能为

$$E_p = 1 - \frac{1}{N_p}\frac{\partial \ln Z}{\alpha\beta}. \tag{31}$$

由 $\ln Z_0 + \langle S - S_0\rangle_0$ 的极值条件得变分参数 z 的方程

$$\beta = \frac{3z}{(d-1)\left(\frac{Z_0'}{6Z_0}\right)^3}, \tag{32}$$

此式有两支解．由自由能最低条件，当 $\beta < \beta_c = 18.535/(d-1)$ 时取平庸解 $z = 0$，当 $\beta > \beta_c$ 时取非平庸解．代入(30)和(31)式即得平均元格内能．

(30)式依赖于 Z_0，Z_0'，Z_0'' 和 Z_4．下一节给出这些量的计算方法．

三、Z_0，Z_0'，Z_0'' 和 Z_4 的计算

1. 级数展开法

由 $Z(J)$ 的四重级数展开式

$$Z(J) = 2\sum_{j,k,l,n=0}^{\infty}\frac{1}{(j+2k+3l+n+2)!(k+2l+n+1)!}\frac{X_1^j}{j!}\frac{X_2^k}{k!}\frac{X_3^l}{l!}\frac{X_4^n}{n!}. \tag{33}$$

令 $J = zI$，就得 Z_0 表为 z 的级数．由此可直接求出 Z_0'，Z_0'' 和 Z_4． 当 z 大时这些级数收敛很慢．在 $\beta \lesssim 3$ 时，需取到 300 项，才能得到较准确的数值．

2. 最陡下降法

最近我们发展一种有很高精确度的 $SU(3)$ 群单链积分计算方法[5]. 由 $Z(J)$ 的围道积分表示式

$$Z(J) = -\frac{i}{\pi}\oint dx e^{xQ}\sqrt{\frac{x}{P}}\, I_1\left(2\sqrt{\frac{P}{x}}\right), \tag{34}$$

其中

$$Q = \det J + \det J^{+} = X_4, \tag{35}$$

$$P = \det(1 + xJ^{+}J). \tag{36}$$

并用虚宗量贝塞尔函数的表示式

$$I_1(w) = \frac{w}{\pi}\int_0^{\pi} e^{w\cos\varphi}\sin^2\varphi d\varphi, \tag{37}$$

令 $J = zI$，就可以把 Z_0 表为

$$Z_0 = -\frac{2i}{\pi}\int_0^{\pi} d\varphi\sin^2\varphi \oint dx e^{2z^3 f(x)}, \tag{38}$$

$$f(x) = x + \cos\varphi x^{-\frac{1}{2}}\left(x + \frac{1}{z^2}\right)^{3/2}. \tag{39}$$

当 z 大时，对 x 的积分可用最陡下降法求出. 在文献[5]中给出主要公式的推导，结果为

$$Z_0 = \frac{a_0}{z^{5/2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi e^{zf_1(\varphi)} f_0(\varphi)\left(1 - \frac{a_1(\varphi)}{z} - \frac{a_2(\varphi)}{z^2} + \cdots\right), \tag{40}$$

$$Z_0' = \frac{a_0}{z^{5/2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi e^{zf_1(\varphi)} f_0(\varphi)\left(P_0(\varphi) + \frac{P_1(\varphi)}{z} + \frac{P_2(\varphi)}{z^2} + \cdots\right), \tag{41}$$

$$Z_0'' = \frac{a_0}{z^{5/2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi e^{zf_1(\varphi)} f_0(\varphi)\left(D_0(\varphi) + \frac{D_1(\varphi)}{z} + \frac{D_2(\varphi)}{z^2} + \cdots\right), \tag{42}$$

$$Z_4 = \frac{a_0}{z^{5/2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi e^{zf_1(\varphi)} f_0(\varphi)\left(\frac{Q_2(\varphi)}{z^2} + \frac{Q_3(\varphi)}{z^3} + \cdots\right), \tag{43}$$

式中

$$a_0 = \frac{4}{\pi^{3/2}3^{1/2}}, \quad f_1 = \frac{6(1 + y_0\cos\varphi)}{y_0^2 - 1},$$

$$f_0 = \frac{y_0^{1/2}\sin^2\varphi}{(\cos\varphi)^{\frac{1}{2}}(y_0^2-1)^{3/2}}, \quad y_0 = \left(\frac{1+\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1-\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$a_1 = \frac{1}{36\cos\varphi\cdot y_0^3(y_0^2-1)}(5y_0^4 + 5y_0^2 - 1),$$

$$a_2 = \frac{1}{\cos^2\varphi\cdot y_0^6(y_0^2-1)^2}\frac{5}{2^5\cdot 3^4}(7y_0^8 + 14y_0^6 + 21y_0^4 - 22y_0^2 + 7),$$

$$P_0 = f_1(\varphi), \quad P_1 = -\frac{5}{2} - a_1(\varphi)f_1(\varphi),$$

$$P_2 = \frac{7}{2} a_1(\varphi) - a_2(\varphi) f_1(\varphi), \quad D_0 = f_1^2(\varphi),$$

$$D_1 = -5 f_1(\varphi) - a_1(\varphi) f_1^2(\varphi),$$

$$D_2 = -5 + 6 a_1(\varphi) f_1(\varphi) - c_2(\varphi) f_1^2(\varphi),$$

$$Q_2 = \frac{1}{y_0^2 - 1},$$

$$Q_3 = -\frac{a_1}{y_0^2 - 1} - \frac{1}{6\cos\varphi \cdot y_0 (y_0^2 - 1)^2} (5 y_0^2 + 1).$$

(40)—(43)式可用数值积分求出．当 $z = 2$ 时，取到公式中写出的项，所得结果与级数展开法在 5 位有效数字以内相符．z 愈大时，最陡下降法给出愈精确的结果，反过来又可以判断级数展开法中应取到多少项．

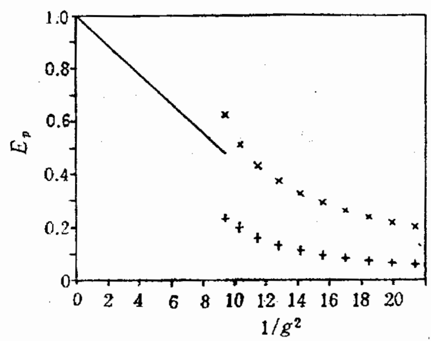


图 1　3维 $SU(3)$ 群平均元格内能
＋为二级近似累积展开结果，×为平均场结果，实线为强耦合展开结果

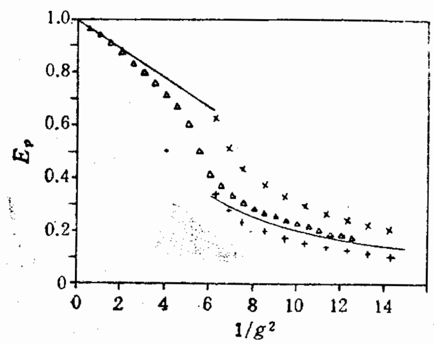


图 2　4维 $SU(3)$ 群平均元格内能
＋为二级近似累积展开结果，×为平均场结果，实线为强耦合展开和弱耦合展开结果 △ 为 Monte Carlo 计算结果[6]

我们分别用级数展开法(取到 z^{300} 次项)和最陡下降法计算了单链积分，所得结果相符．3 维和 4 维元格内能的累积展开(到二级近似)结果如图 1 和 2 所示．为了比较，我们同时给出 4 维的 MC 结果[6]．

四、讨　　论

由图 1 和 2 看出，3 维空间的累积展开与 4 维情形有类似的行为，但展开式摆动的幅度较大，收敛可能较慢．可以认为，累积展开法适用于 3 维空间格点规范理论．

与 4 维情形类似，二级累积展开与 MC 数据仍有较大偏离．最少到三级展开，才能得到比较满意的结果。我们对 3 维 $SU(2)$ 群计算过三级展开，结果验证了这一点．我们将进一步计算 $SU(3)$ 群的三级展开．

在哈密顿形式的胶球质量变分计算中，除了元格内能外，还需计算各种 Wilson 圈的平均值．我们将研究用累积展开计算这些量的可能性．

参考文献

[1] T. C. Hsien, X. H. He, Y. S. Song, *Phys. Lett.*, **153**B (1985), 417.
[2] 吴济民，赵佩英，高能物理与核物理，**10**(1986)，297;
X. T. Zheng, Z. G. Tan and J. Wang, *Nucl. Phys.*, B**287** (1987), 171.
[3] S. H. Guo, J. M. Liu, Q. Z. Chen, *Chinese Phys. Lett.*, **2** (1985), 409.
S. H. Guo, W. H. Zheng, and J. M. Liu, *Chin. Phys. Lett.* **3** (1986), 445.
郑维宏,刘金明,郭硕鸿,高能物理与核物理，**1**(1988),134.
刘金明,郑维宏,郭硕鸿,高能物理与核物理,**12**(1988),420.
S. H. Guo, W. H. Zheng, and J. M. Liu,*Phys. Rev.*, D**38** (1988), 2591.
[4] R. Brower and M. Nauenberg, *Nucl. Phys.*, B**180** (1981), 221.
R. Brower, P. Rossi and C. I. Tan, *Nucl. Phys.*, B**190** (1981), 699.
K. Eriksson, N. Svartholm and B. Skagerstam, *J. Math. Phys.*, **22** (1981), 2276.
C. Lang, P. Salomonson and B. Skagerstam, *Phys. Lett.*, **100**B (1981), 29.
何翔皓,李铁忠,冼鼎昌,高能物理与核物理,**8**(1984),772.
[5] 刘金明,官蒂,中山大学学报,单链 $SU(3)$ 群积分的定积分表示,(待发表)
[6] M. Creutz, K. J. M. Moriarty, *Phys. Rev.*, D**26** (1982), 2166.

THE MEAN-PLAQUETTE INTERNAL ENERGY FOR $SU(3)$ GAUGE THEORY IN CUMULANT EXPANSION

Chen Qizhou Liu Jinming Xue Xun
Zheng Weihong Guo Shuohong
(Department of physics, Zhongshan University, Guangzhou)

Abstract

The cumulant expansion is used to calculate the mean-plaquette internal energy for d-dimensional $SU(3)$ gauge theory. We use the methods of series expansion and steepest descent to calculate $SU(3)$ one-link invariant group integral. These two methods agree accurately with each other. The results show that the cumulant expansion is effective for 3-dimensional lattice gauge theory.