

序参量的自洽方程与手征对称性 恢复的相变*

刘保华 李家荣

(华中师范大学粒子物理研究所, 武昌)

摘 要

本文用解析方法研究了有限温度和密度下的手征相变。把零温情形下序参量的自洽方程加以推广,建立了有限温度情形下的相应方程。由此得到了序参量随温度的变化关系,证实了手征对称性恢复的相变的存在,求出了理论的相图。

一、引 言

手征对称性是强相互作用理论的一个十分重要的对称性,它在解释低能强作用现象时起着关键的作用。如所周知,在 $T=0$ 、 $\mu=0$ 的情形下,这种对称性是自发破缺的。最近几年,不少人用 Monte Carlo 方法研究了强相互作用体系在有限温度和密度下的行为,发现在足够高的温度和密度下,存在一个手征对称性恢复的相变^[1]。本文的目的是要利用解析的方法研究这种相变。

Lurie 等人曾经利用序参量的自洽方程研究了零温情形下的手征对称性自发破缺^[2]。我们将把这一方法推广到有限温度的情形,用它来研究序参量随温度变化的规律。

我们在第二节引入模型,并简单回顾 $T=0$ 时的自洽方程。利用这一方程和核子物理质量不为零的事实,我们确定了理论中的参数——动量切断 Λ 。在第三节,我们将在有限温度情形下建立序参量的自洽方程,利用它来详细地研究理论的相结构。

二、模型与 $T=0$ 时的自洽方程

考虑具有破缺手征对称性的如下模型^[2]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \quad (1)$$

$$\mathcal{L}_0 = -\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\mu\psi - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_p\partial_\mu\phi_p - \frac{1}{2}m^2\phi_p^2 - \frac{1}{2}\partial_\mu\phi_s\partial_\mu\phi_s - \frac{1}{2}m^2\phi_s^2, \quad (2)$$

1) 中国科学院科学基金资助课题。
本文1987年4月27日收到。

$$\mathcal{L}_I = g\bar{\psi}\psi\phi_s + ig\bar{\psi}\gamma_5\psi\phi_p, \quad (3)$$

其中 ϕ_s 是标量场, ϕ_p 是赝标量场, ψ 是核子场. 拉氏量在下述手征变换下是不变的.

$$\psi \rightarrow e^{i\gamma_5\alpha}\psi, \quad (4)$$

$$\phi_s \rightarrow \phi_s \cos 2\alpha + \phi_p \sin 2\alpha, \quad (5)$$

$$\phi_p \rightarrow \phi_p \cos 2\alpha - \phi_s \sin 2\alpha. \quad (6)$$

设 χ 是与手征不变性相联系的守恒荷, 并令

$$\varphi_s = \langle 0 | \phi_s | 0 \rangle, \quad \varphi_p = \langle 0 | \phi_p | 0 \rangle. \quad (7)$$

容易证明

$$\text{若 } \varphi_s = 0 \text{ 则 } e^{i\alpha\chi} | 0 \rangle = | 0 \rangle, \quad (8)$$

$$\text{若 } \varphi_s \neq 0 \text{ 则 } e^{i\alpha\chi} | 0 \rangle \neq | 0 \rangle. \quad (9)$$

在后一种情形下, 手征对称性是自发破缺的. 由此看出, φ_s 是 $T=0$ 时刻手征对称性自发破缺的“序参量”.

Lurie 等人建立了关于 φ_s 和 φ_p 的下述自洽方程^[2]:

$$m^2\varphi_s = -g\text{Tr}S_F(0), \quad (10)$$

$$m^2\varphi_p = -g\text{Tr}(i\gamma_5 S_F(0)), \quad (11)$$

其中 $S_F(x-y) = \langle 0 | T\psi(x)\bar{\psi}(y) | 0 \rangle$ 是费米传播子. 利用泛函方法, 可求得 $S_F(0)$ 的近似表达式为

$$S_F(0) = - \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \frac{1}{\gamma \cdot p + ig\varphi_s}. \quad (12)$$

由此可知, 虽然 ψ 场的裸质量为零, 但其物理质量为 $M = g\varphi_s$. 将 $S_F(0)$ 代入(10)式, 得到

$$\varphi_s \left(m^2 + \phi_i g^2 \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + g^2\varphi_s^2} \right) = 0. \quad (13)$$

上式中的积分是发散的, 为使讨论有意义, 必须引入动量切断. 进行一个 Wick 转动, 引入三动量切断 Λ , 完成积分

$$\begin{aligned} i \int \frac{d^4P}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + g^2\varphi_s^2} &= - \int \frac{d^3P}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_0}{2\pi} \frac{1}{p_0^2 + \mathbf{P}^2 + g^2\varphi_s^2} \\ &= - \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{d|\mathbf{P}| |\mathbf{P}|^2}{\sqrt{|\mathbf{P}|^2 + g^2\varphi_s^2}} \\ &= - \frac{1}{8\pi^2} \left[\Lambda \sqrt{\Lambda^2 + g^2\varphi_s^2} - g^2\varphi_s^2 \ln \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + g^2\varphi_s^2}}{g\varphi_s} \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

自洽方程(13)最后可以写成

$$\varphi_s F(\varphi_s) = 0, \quad (15)$$

$$F(\varphi_s) = m^2 - \frac{g^2}{2\pi^2} \left[\Lambda \sqrt{\Lambda^2 + g^2\varphi_s^2} - g^2\varphi_s^2 \ln \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + g^2\varphi_s^2}}{g\varphi_s} \right]. \quad (16)$$

方程(15)有两个解. 平凡解 $\varphi_s = 0$ 对应着手征对称性不破缺的情形, 而非平凡解由 $F(\varphi_s) = 0$ 决定. 如果在有限温度情形下建立起相应的方程, 就可以研究序参量随温度的变化关系. 这正是本文的目的.

(3)

的.

(4)

(5)

(6)

(7)

(8)

(9)

对称性

(10)

(11)

0) 的

(12)

)式,得

(13)

运动,引

(14)

(15)

(16)

平凡解由
量随温度

为了将来的方便,我们还应当确定理论中的参数 Λ . 注意到 $M = g\varphi_s$ 是核子的物理质量,方程 $F(\varphi_s) = 0$ 应当有一个非零解: $\varphi_s = \frac{M}{g}$. 将它代入 $F(\varphi_s) = 0$, 则该方程变成一个关于 Λ 的方程. 取 M 为核子的物理质量, g 为 π - N 耦合常数,此外, Nambu 在文献[3]中已经证明,在这一唯象模型中,标量粒子的质量为 $m = 2M$. 所以有: $M = 1000\text{MeV}$, $m = 2000\text{MeV}$, $g = 15$. 利用这些参数,我们求得

$$\Lambda = 860\text{MeV}. \quad (17)$$

这里刻画手征对称破缺的序参量是 φ_s , 而文献上通常采用的序参量是 $\langle 0 | \bar{\psi}(x)\psi(x) | 0 \rangle$, 我们来研究一下二者之间的联系. 根据自洽方程(10), 并利用

$$\langle 0 | \bar{\psi}(x)\psi(x) | 0 \rangle = -\text{Tr}S_F(x-x) = -\text{Tr}S_F(0), \quad (18)$$

我们得到

$$\varphi_s = \frac{g}{m^2} \langle 0 | \bar{\psi}(x)\psi(x) | 0 \rangle. \quad (19)$$

所以两种序参量之间只相差一个常数因子.

三、 $T=0$ 时的自洽方程与理论的相结构

我们首先考虑化学势 μ 为零的正则系综. 定义如下的统计平均值:

$$\varphi_{s\beta}(x) = \frac{\text{Tr}e^{-\beta H}\phi_s(x)}{\text{Tr}e^{-\beta H}} \quad (20)$$

$$\varphi_{p\beta}(x) = \frac{\text{Tr}e^{-\beta H}\phi_p(x)}{\text{Tr}e^{-\beta H}} \quad (21)$$

$$S_{F\beta}(x-y) = \frac{\text{Tr}e^{-\beta H}T\phi(x)\bar{\psi}(y)}{\text{Tr}e^{-\beta H}} \quad (22)$$

这里以及以后,时间变量均延拓到 $0 \leq ix_0, iy_0 \leq \beta$ 的区域^[4]. 显然,当 $T \rightarrow 0$ 时, $\varphi_{s\beta} \rightarrow \varphi_s$, $\varphi_{p\beta} \rightarrow \varphi_p$, $S_{F\beta} \rightarrow S_F$. 取下述运动方程的统计平均值

$$(\square - m^2)\phi_s = -g\bar{\psi}\phi, \quad (23)$$

$$(\square - m^2)\phi_p = -ig\bar{\psi}\gamma_5\phi, \quad (24)$$

并利用 $\varphi_{s\beta}$ 和 $\varphi_{p\beta}$ 与 x 无关的事实^[5], 得到

$$m^2\varphi_{s\beta} = -g\text{Tr}S_{F\beta}(0), \quad (25)$$

$$m^2\varphi_{p\beta} = -g\text{Tr}(i\gamma_5 S_{F\beta}(0)). \quad (26)$$

为了求出 $S_{F\beta}(0)$, 我们来建立 $S_{F\beta}$ 满足的方程. 在拉氏量中加上外源项

$$\mathcal{L}_J = J_s\phi_s + J_p\phi_p. \quad (27)$$

这里 J_s 和 J_p 与 x 无关. 将算子 $\gamma \cdot \partial$ 作用在(22)式的两边, 并利用运动方程

$$\gamma \cdot \partial\psi = g\psi\phi_s + ig\gamma_5\psi\phi_p \quad (28)$$

和恒等式

$$T\psi(x)\bar{\psi}(y) = \frac{1}{2} [\psi(x), \bar{\psi}(y)] + \frac{1}{2} \varepsilon(x_0 - y_0)\{\psi(x), \bar{\psi}(y)\}, \quad (29)$$

其中 $\varepsilon(x_0 - y_0) = \theta(x_0 - y_0) - \theta(y_0 - x_0)$, $\theta(x)$ 为阶跃函数. 我们得到 $S'_{F\beta}(x - y)$ 满足的方程

$$\begin{aligned} \gamma \cdot \partial S'_{F\beta}(x - y) = & -i\delta^{(4)}(x - y) + \frac{1}{\text{Tr}e^{-\beta H}} \text{Tr}e^{-\beta H} T(g\psi(x)\bar{\psi}(y)\phi_s(x) \\ & + ig\gamma_5\psi(x)\bar{\psi}(y)\phi_p(x)), \end{aligned} \quad (30)$$

进一步利用配分函数 Z^J 和 $S'_{F\beta}$ 的路径积分表示^[4]:

$$Z^J = \text{Tr}e^{-\beta H} = \int [d\phi_p][d\phi_s][d\bar{\psi}][d\psi] \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} [\mathcal{L} + J_s\phi_s + J_p\phi_p]\right\}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} S'_{F\beta}(x - y) = & \frac{1}{Z^J} \int [d\phi_p][d\phi_s][d\bar{\psi}][d\psi] \psi(x)\bar{\psi}(y) \\ & \times \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int d\mathbf{x} [\mathcal{L} + J_s\phi_s + J_p\phi_p]\right\}, \end{aligned} \quad (32)$$

可以把(30)式改写成

$$\left(\gamma \cdot \partial - g\varphi'_{s\beta} - g \frac{\delta}{\delta J_s} - ig\gamma_5\varphi'_{p\beta} - ig\gamma_5 \frac{\delta}{\delta J_p}\right) S'_{F\beta}(x - y) = -i\delta^{(4)}(x - y) \quad (33)$$

为求出近似解,略去含有 $\frac{\delta}{\delta J_s}$ 和 $\frac{\delta}{\delta J_p}$ 的项(这些项对应着费米子自能对传播子的贡献^[2]), 得到

$$(\gamma \cdot \partial - g\varphi'_{s\beta} - ig\gamma_5\varphi'_{p\beta}) S'_{F\beta}(x - y) = -i\delta^{(4)}(x - y). \quad (34)$$

注意到 $S'_{F\beta}(x - y)$ 满足的边界条件^[4]

$$S'_{F\beta}(x - y)|_{x_0=0} = -S'_{F\beta}(x - y)|_{x_0} = -i\beta, \quad (35)$$

作如下的傅立叶展开

$$\begin{aligned} S'_{F\beta}(x - y) = & \frac{i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d\mathbf{P}}{(2\pi)^3} S'_{F\beta}(p) e^{i p \cdot (x-y)} \\ p_0 = \omega_n, \quad \omega_n = & \frac{(2n+1)\pi i}{\beta}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \end{aligned} \quad (36)$$

令 $J_s \rightarrow 0$, $J_p \rightarrow 0$, 求得

$$S_{F\beta}(0) = \frac{i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d\mathbf{P}}{(2\pi)^3} \frac{-\gamma \cdot p + ig\varphi_{s\beta} + g\gamma_5\varphi_{p\beta}}{p^2 + g^2\varphi_{\beta}^2}, \quad (37)$$

$$\varphi_{\beta}^2 = \varphi_{s\beta}^2 + \varphi_{p\beta}^2.$$

由(37)式可知,在有限温度情形下,费米子的质量 $M = g\varphi_{\beta}$ 与温度有关. 将(37)式代入(25)和(26)式,得到

$$\varphi_{i\beta} F_{\beta}(\varphi_{\beta}) = 0, \quad (38)$$

其中

$$\begin{aligned} \varphi_{1\beta} = \varphi_{s\beta}, \quad \varphi_{2\beta} = \varphi_{p\beta} \\ F_{\beta}(\varphi_{\beta}) = m^2 + \frac{4g^2}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \frac{d\mathbf{P}}{(2\pi)^3} \frac{1}{p^2 + g^2\varphi_{\beta}^2}. \end{aligned} \quad (39)$$

利用恒等式^[4]

- y)

$$\begin{aligned} & \frac{i}{\beta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\left(\omega_n, \omega_n = \frac{(2n+1)\pi i}{\beta}\right) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty+\varepsilon}^{i\infty+\varepsilon} dp_0 \frac{f(p_0)}{1+e^{\beta p_0}} - \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty-\varepsilon}^{i\infty-\varepsilon} dp_0 \frac{f(p_0)}{1+e^{-\beta p_0}} + \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} dp_0 f(p_0), \quad (40) \end{aligned}$$

(30)

并引入三动量切断 Λ , 可以把 $F_\beta(\varphi_\beta)$ 写成

$$\begin{aligned} F_\beta(\varphi_\beta) &= m^2 - \frac{g^2}{2\pi^2} \left(\Lambda \sqrt{\Lambda^2 + g^2\varphi_\beta^2} - g^2\varphi_\beta^2 \ln \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + g^2\varphi_\beta^2}}{g\varphi_\beta} \right) \\ &+ \frac{2g^2}{\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{P}| \frac{|\mathbf{P}|^2}{\sqrt{|\mathbf{P}|^2 + g^2\varphi_\beta^2}} \frac{1}{1 + \exp(\beta\sqrt{|\mathbf{P}|^2 + g^2\varphi_\beta^2})}. \quad (41) \end{aligned}$$

(32)

当 $T \rightarrow 0$ 时, 这一表式回到(16)式。我们用数值方法求解了方程 $F_\beta(\varphi_\beta) = 0$, 结果如图 1 所示。当 T 的值较小时, 方程具有非零解, 但是, 当 T 的值逐渐增大时, φ_β 的值逐渐变小。当 $T > T_c$ 时, 方程 $F_\beta(\varphi_\beta) = 0$ 没有实数解, 自治方程(38)只有零解。在这种情形下, ϕ 场的质量为零, 手征对称性得以恢复。

(33)

在方程 $F_\beta(\varphi_\beta) = 0$ 中令 $\varphi_\beta = 0$, 便得到决定临界温度的方程

$$m^2 - \frac{g^2\Lambda^2}{2\pi^2} + \frac{2g^2}{\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{P}| |\mathbf{P}| \frac{1}{1 + \exp(\beta_c|\mathbf{P}|)} = 0. \quad (42)$$

(34)

由此求得

$$T_c = \sqrt{6\left(\frac{\Lambda^2}{2\pi^2} - \frac{m^2}{g^2}\right)} = 340 \text{ MeV}. \quad (43)$$

(35)

我们再来考虑 $\mu \neq 0$ 的情形。自治方程仍然可以写成

$$\varphi_{i\beta} F_\beta(\varphi_\beta) = 0,$$

(36)

不过由于传播子有所改变(在 $\mu = 0$ 时的传播子中作代换 $\omega_n \rightarrow \omega_n + \mu$, 便得到 $\mu \neq 0$ 时的传播子^[4]), $F_\beta(\varphi_\beta)$ 现在为

$$\begin{aligned} F_\beta(\varphi_\beta) &= m^2 - \frac{g^2}{2\pi^2} \left(\Lambda \sqrt{\Lambda^2 + g^2\varphi_\beta^2} - g^2\varphi_\beta^2 \ln \frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + g^2\varphi_\beta^2}}{g\varphi_\beta} \right) \\ &+ \frac{g^2}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{d|\mathbf{P}| |\mathbf{P}|^2}{\sqrt{|\mathbf{P}|^2 + g^2\varphi_\beta^2}} \left(\frac{1}{1 + \exp[\beta(\sqrt{|\mathbf{P}|^2 + g^2\varphi_\beta^2} - \mu)]} \right) \end{aligned}$$

(37)

代入

(38)

(39)

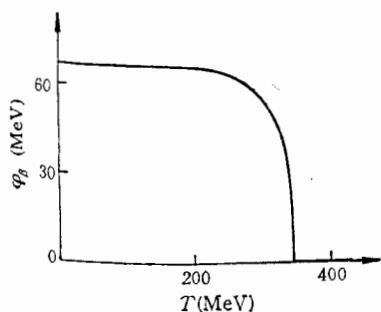


图 1 序参量作为温度的函数

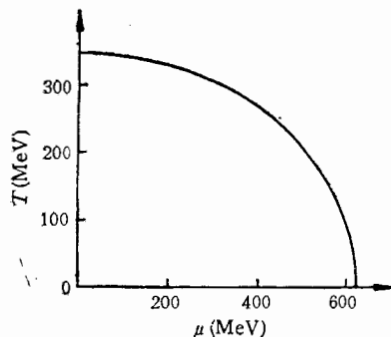


图 2 手征相变的相图

$$+ \frac{1}{1 + \exp[\beta(\sqrt{|\mathbf{P}|^2 + g^2\varphi_\beta^2 + \mu})]} \quad (44)$$

对于确定的 $\mu (< \mu_c)$, 由方程 $F_\beta(\varphi_\beta) = 0$ 可解出 φ_β 作为 T 的函数, 其形状均与图 1 相似. 在方程 $F_\beta(\varphi_\beta) = 0$ 中令 $\varphi_\beta = 0$, 便得到决定相曲线的方程

$$m^2 - \frac{g^2\Lambda^2}{2\pi^2} + \frac{g^2}{\pi^2} \int_0^\infty d|\mathbf{P}| |\mathbf{P}| \left(\frac{1}{1 + \exp[\beta_c(|\mathbf{P}| - \mu_c)]} + \frac{1}{1 + \exp[\beta_c(|\mathbf{P}| + \mu_c)]} \right) = 0, \quad (45)$$

由此求得的相曲线如图 2 所示, 其形状与人们在多年前的预言相一致^[6].

四、结 论

我们用解析方法研究了一个手征对称破缺理论在高温下的行为. 根据序参量的自治方程, 得到了序参量随温度的变化规律, 求出了手征相变的相图. 这表明序参量的自治方程是研究手征相变的有力工具, 我们期待能够用它来研究 QCD 中的手征相变.

作者感谢刘连寿同志和吴济民同志的有益讨论.

参 考 文 献

- [1] J. Cleymans, R. V. Gavai and E. Suhonen, *Phys. Rep.*, **130**(1986), 217.
- [2] D. Lurie, *Particles and Fields*, Interscience Publisher 1968, 470.
- [3] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.*, **112**(1961), 345.
- [4] P. D. Morley and M. B. Kislinger, *Phys. Rep.*, **51**(1979), 64.
- [5] J. D. Anand et al., *Phys. Rev.*, **D34**(1986), 2133.
- [6] See e. g. G. Baym, in: *Quark matter formation and heavy ion collisions*, M. Jacob, H. Satz, eds. Singapore: World Scientific 1982.

SELF-CONSISTENCY EQUATIONS FOR THE ORDER PARAMETER AND THE RESTORATION OF THE CHIRAL SYMMETRY

LIU BAOHUA LI JIARONG

(*Institute of Particle Physics Huazhong Normal University, Wuhan*)

ABSTRACT

An analytical method is used to investigate the chiral symmetry restoring phase transition at finite temperature and density. The self-consistency equations for the order parameter at $T=0$ are generalized and the corresponding equations at finite temperature and density are established. The order parameter as a function of the temperature and the phase diagram are obtained.

大量

说明

ΔI

克穆

的張

给出

得到

2π