第12卷 第4期 高能物理与核物理 Vol.12, No.4
1988年7月 HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS July, 1988

格点规范理论中 $|\Delta S|=2$ 的弱作用矩阵元*

陈启洲 李志兵 何宝鹏** 罗向前 郭硕鸿
(中山大学，广州)

摘 要

本文用格点规范理论的强耦合展开方法，计算 $|\Delta S|=2$ 的弱作用矩阵元。由此得到的 K_L-K_S 质量差是和介子质量谱的强耦合展开计算结果相容的，并且与实验结果接近。

一

人们认为量子色动力学（QCD）是描述基本粒子强相互作用理论的候选者。一方面的原因是 QCD 所得到的许多预言至少与实验结果没有尖锐的矛盾，另一方面是从 Wilson 提出格点规范理论[1]后，基本粒子的强作用以及弱作用中的强作用修正可以严格计算。近几年来，人们广泛应用 Monte Carlo 模拟方法计算强子能谱、强衰变和强子的弱衰变矩阵元，其中利用格点规范理论估计强子弱衰变中强作用的影响，对于弄清弱作用中的一些经验规则$\left(\text{例如 } |\Delta I|=\frac{1}{2}\right)$是有很重要意义的[2-8]。在文献[6—8]中，采用 Monte Carlo 方法得到各类弱作用矩阵元。但它们不能给出解析表示式，因而难以弄清问题的物理机制。我们利用格点 QCD 的强耦合展开和 Pade′ 近似技巧，计算与长寿命和短寿命的K介子(即 K_L 和 K_S)质量差[4]有关的矩阵元 $\mathscr{M}=\langle K^0|\bar{d}\gamma_\mu(1+\gamma_5)S\bar{d}\gamma_\mu(1+\gamma_5)S|\bar{K}^0\rangle$ 和 $\mathscr{M}$ 的真空饱和值[2] $\mathscr{M}_{vac}=\langle K^0|\bar{d}\gamma_\mu(1+\gamma_5)S|0\rangle\langle 0|\bar{d}\gamma_\mu(1+\gamma_5)S|\bar{K}^0\rangle$ 以及两者的比值，得到较为满意的结果。

采用 Wilson 方案作强耦合展开[9]时，有质量参数 m 和 Wilson 参数 r，在强子质量谱的计算[9]中，对一定的 m，有一临界 Wislon 参数 r_c，当 r 稍大于 r_c 时，给出具有手征对称自发破缺特点的与实验相符的质量谱。本文的计算结果表明，$|\Delta S|=2$ 的弱作用矩阵元 $\mathscr{M}$，当 $r<r_c$ 时有大幅度的变化，当 $r\gtrsim r_c$ 时，结果才趋于稳定。这是和强子质量谱的计算相容的。而 $\mathscr{M}$ 与 $\mathscr{M}_{vac}$ 的比值则表现出非常好的参数 r 无关性，给出与实验相符的结果。

---

* 国家教委科学基金和中山大学高等学术研究中心资助的课题。
** 华南师范大学访问学者。
本文1987年4月21日收到。

二

在四种夸克的 Weinberg-Salam 模型中，长寿命和短寿命 K 介子的质量差依赖于 $|\Delta S| = 2$ 的等效弱作用矩阵元[4]:

$$m_L - m_S = [G_F m_C \sin\theta_C \cos\theta_C / 4\pi]^2 m_k^{-1} \mathscr{M} \tag{1}$$

$$\mathscr{M} = \langle K^0 | \bar{\Phi}_d \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \phi_s \bar{\Phi}_d \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \phi_s | \bar{K}^0 \rangle$$

其中 G_F 为费米耦合常数，m_c 为 c 夸克质量，m_k 为K介子质量，θ_c 为 Cabibbo 角，ϕ_d, ϕ_s 分别为 d 和 s 夸克的旋量场算符.

在格点理论中,我们取 K^0 和 $\bar{K}^0$ 介子的零级波函数为(略去颜色指标 α、β，自旋指标 i、j 的求和号):

$$|\bar{K}^0, 0\rangle = \sum_x^N \xi_s^+(x) \eta_d^+(x) |0\rangle, \quad |K^0, 0\rangle = \sum_x^N \xi_d^+(x) \eta_s^+(x) |0\rangle \tag{2}$$

而等效弱作用算符和 Dirac 旋量场为:

$$Q_{|\Delta S|=2} = \sum_x^N \bar{\Phi}_d(x) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \phi_s(x) \bar{\Phi}_d(x) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \phi_s(x) \tag{3}$$

$$\phi_{s,d} = \begin{pmatrix} \xi_{s,d} \\ \eta^+_{s,d} \end{pmatrix} \tag{4}$$

其中

$$\gamma_k = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_k \\ i\sigma_k & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi|0\rangle = \eta|0\rangle = 0 \quad E^2|0\rangle = 0$$

为了用强耦合展开估计强作用对K介子波函数的修正，我们用如下的强作用哈氏量 H_s[9]:

$$W = \frac{2a}{g^2} H_s = W_0 + \chi(V_1 + V_2) + \chi^2 V_3 \tag{5a}$$

其中

$$\chi = 1/g^2 \ (g\text{为耦合常数})$$

$$W_0 = \sum_{x, k=1,2,3} E^2(x, k) + (m + 6rx) \sum_x \bar{\Phi}(x) \phi(x) \tag{5b}$$

$$V_1 = \sum_{x, k=\pm1,\pm2,\pm3} \bar{\Phi}(x) \gamma_K U(x, k) \phi(x + k)$$

$$= -i[\eta(x) \sigma_K U(x, k) \xi(x + k) + \xi^+(x) \sigma_k U(x, k) \eta^+(x + k)] \tag{5c}$$

$$V_2 = -r\bar{\Phi}(x) U(x, k) \phi(x + k)$$

$$= -r[\xi^+(x) U(x, k) \xi(x + k) - \eta(x) U(x, k) \eta^+(x + k)] \tag{5d}$$

$$V_3 = -2 \sum_p \mathrm{Tr}(U_p + U_p^+) \tag{5e}$$

在 (5c) 和 (5d) 中略去了对空间坐标 x 和空间方向 k 的求和 ($k = \pm 1, \pm 2, \pm 3$).

考虑到强作用对K介子波函数的修正后，$\mathscr{M}$ 可表示为:

$$\mathscr{M}^{L}=\frac{\langle \mathrm{K}^0|\bar{\Phi}_d\gamma_\mu(1+\gamma_5)\phi_s\bar{\Phi}_d\gamma_\mu(1+\gamma_5)\phi_s|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle}{(\langle \mathrm{K}^0|\mathrm{K}^0\rangle\langle \bar{\mathrm{K}}^0|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle)^{1/2}} \tag{6}$$

其中 $\langle \mathrm{K}^0|\mathrm{K}^0\rangle=\langle \bar{\mathrm{K}}^0|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle$，上标 L 表示在格点理论上计算的量（以下同）．利用薛定格的微扰理论：

$$E_n=\langle i|V|n-1\rangle \tag{7a}$$

$$|n\rangle=\frac{Q}{b}[(V-E_1)|n-1\rangle-E_2|n-2\rangle\cdots\cdots E_{n-1}|1\rangle] \tag{7b}$$

其中 E_n 和 $|n\rangle$ 分别为第 n 级能量和波函数的修正项，$Q=1-|i\rangle\langle i|$，$\frac{1}{b}=\frac{1}{E_0-W_0}$.

在(6)式分子中的不相连图可以和分母中的不连通图约去，故计算时只考虑相连图．

文献[2]用真空饱和扦入估计了矩阵元 $\mathscr{M}$ 的数值：

$$\mathscr{M}_{\mathrm{vac}}=\frac{8}{3}\langle \mathrm{K}^0|\bar{\Phi}_d\gamma_\mu(1+\gamma_5)\phi_s|\Omega\rangle\langle\Omega|\bar{\Phi}_d\gamma_\mu(1+\gamma_5)\phi_s|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle \tag{8}$$

其中 $|\Omega\rangle$ 为物理真空态，前面的因子 8/3 是考虑了所有真空扦入方式后得到的．$\mathscr{M}_{\mathrm{vac}}$ 与K介子的衰变常数和质量有如下关系：

$$\mathscr{M}_{\mathrm{vac}}=\frac{16}{3}F_{\mathrm{K}}^2m_{\mathrm{K}}^2=0.32m_{\mathrm{K}}^4 \tag{9}$$

我们可以在格点理论中用强耦合展开方法直接把 $\mathscr{M}_{\mathrm{vac}}$ 求出来：

$$\mathscr{M}_{\mathrm{vac}}^{L}=\frac{\frac{8}{3}\langle \mathrm{K}^0|\bar{\Phi}_d\gamma_\mu(1+\gamma_5)\phi_s|\Omega\rangle\langle\Omega|\bar{\Phi}_d\gamma_\mu(1+\gamma_5)\phi_s|\bar{\mathrm{K}}^0\rangle}{\langle \mathrm{K}^0|\mathrm{K}^0\rangle\langle\Omega|\Omega\rangle} \tag{10}$$

其中 $|\Omega\rangle$ 的展开方法与(7a)、(7b)式相同，只是对 $|\Omega\rangle$，$\frac{1}{b}=\frac{1}{-W_0}$ $(E_0=0)$．约去不相连图后，$\langle\Omega|\Omega\rangle=1$.

三

用标准的强耦合展开法，我们得到四级展开式：

$$\mathscr{M}^{L}=\frac{16-(384b_s^{-2}+48m^{-1}b_s^{-1})x^2+(9216rb_s^{-3}+576rm^{-1}b_s^{-2}+288rm^{-2}b_s^{-1})x^3+Bx^4}{\langle \mathrm{K}^0|\mathrm{K}^0\rangle} \tag{11}$$

$$\mathscr{M}_{\mathrm{vac}}^{L}=\frac{16\left[1-6\frac{b_s+4m}{mb_s^2}x^2+\frac{36r}{m^2b_s^3}(b_s^2+2mb_s+16m^2)x^3+B'x^4\right]}{\langle \mathrm{K}^0|\mathrm{K}^0\rangle} \tag{12}$$

其中 $b_s=\frac{4}{3}+2m$，两式的比为

$$P=\mathscr{M}^{L}/\mathscr{M}_{\mathrm{vac}}^{L}=\omega_0+\omega_2x^2+\omega_3x^3+\omega_4x^4 \tag{13a}$$

其中

$$\omega_0 = 1, \quad \omega_2 = 3/mb_s$$

$$\omega_3 = -\frac{18r}{m^2 b_s^3}(b_s^2 + 2mb_s) \tag{13b}$$

$$\omega_4 = \frac{B}{16} - B' + 18\frac{b_s + 4m}{m^2 b_s^3}$$

将 (13a) 作 Pade′ [2, 2] 近似得:

$$P = \frac{1 + u_1 x + u_2 x^2}{1 + t_1 x + t_2 x^2} \tag{13c}$$

其中

$$u_1 = 1 - \frac{\omega_3}{\omega_2}, \qquad u_2 = \omega_2 + \frac{\omega_3^2}{\omega_2} - \frac{\omega_4}{\omega_2}$$
$$t_1 = -\frac{\omega_3}{\omega_2}, \qquad t_2 = \frac{\omega_3^2}{\omega_2^2} - \frac{\omega_4}{\omega_2} \tag{13d}$$

当 $x \to \infty$

$$P \to 1 + \frac{\omega_2^3}{\omega_3^2 - \omega_2\omega_4} \tag{14}$$

我们把部分结果列于表 1，P 与 r 的关系见图 1. 为便于比较，表 2 中列出了 $m = 1, 2$; $r = 0.6$, 1 时的 P 值以及实验和文献 [2, 4, 10, 11] 的结果.

表 1 P 的数值 ($m = 1$、2 r:0～1)

(i) $m = 1$

r	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
B	566.6	453.0	112.0	−456.4	−1252.	−2275.
B'	29.84	−16.03	−153.6	−383.0	−704.1	−1117.
P	.8332	.9616	.9884	.9946	.9969	.9980

(ii) $m = 2$

r	0.	0.2	0.4	0.6	0.8	1
B	79.20	64.11	18.83	−56.64	−162.3	−298.1
B'	9.671	−239.6	−987.3	−2233.	−3978.	−6221.
P	1.043	.9993	.9998	.9999	1.000	1.000

表 2 P 值的比较 (实验值一栏取 $m_c = 1.5$ GeV)

	实　验	真空饱和近似[2]	袋模型[10]	流代数[4]	本文结果 ($r = 0.6$)
P	0.938	1	3	0.33	0.995 ($m = 1$) 1.000 ($m = 2$)

表 3 $\mathscr{M}^L$ 与 m 的关系 ($r = 0.6$)

m	0.5	1	1.5	2	2.5	3
$\mathscr{M}^L$	−4.339	−.4526	.1009	.2659	.3391	.3789

同样地，可以对(11)式作 Pade′ 近似，结果见图 2. 在格点理论的计算中，$\mathscr{M}^L$ 是无量纲量，所以图 2 的标度是不确定的，我们对 $\mathscr{M}^L$ 未作 Pade′ 近似前的展开式的首项作了归一化.

四

在图 1 中我们看到一条几乎水平的直线，表明 $|\Delta S|=2$ 矩阵元 $\mathscr{M}^L$ 与其真空饱和值 $\mathscr{M}^L_{\text{vac}}$ 之比 P 具有非常好的参数 r 无关性. 结果与实验值(0.938)很接近.

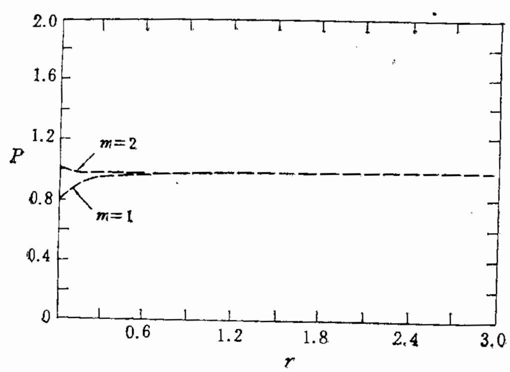

图 1　P 值随 r 的变化曲线

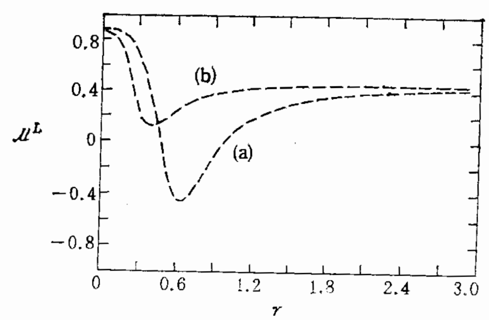

图 2　曲线 (a)、(b) 分别为 $m=1$、2 时 $\mathscr{M}^L$ 作 pade′ 近似结果

从图 2 看到，当质量参数 $m=2$ 而 $r<0.6$ 时，$\mathscr{M}^L$ 的值变化急剧，而 $r\gtrsim 0.6$ 时，该值渐趋稳定. 这个结果与强子质量谱的计算[9]相容. 矩阵元 $\mathscr{M}^L$ 当 m 小时也不稳定（见表 3)，而当 $m\gtrsim 2$ 时变化较为平稳. 其原因是由微扰论本身引起的. 当 m 很小时，一对费米子态和多对费米子态的基态能量 E_0 靠得很近，在这种情况下，非简并微扰的结果不再可靠.

由本文的计算得到结论：(1) $|\Delta S|=2$ 矩阵元的强耦合展开与强子能谱的强耦合展开对 m、r 的依赖性有相同的行为，因而是相容的；(2) $|\Delta S|=2$ 矩阵元的强耦合计算结果接近真空饱和值，因而也和实验值相接近，而袋模型和流代数的结果则和实验有较大的偏离.

目前关于比值 P 的 Monte Carlo 结果仍有很大的不确定性[6,7,8]，只能作为定性比较的结果. 在定性上，我们的结果是与 Monte Carlo 的结果相容的.

参　考　文　献

[1] K. G. Wilson, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 2445.
[2] M. K. Gaillard, B. W. Lee, *Phys. Rev. Lett.*, **33**(1974), 108.
[3] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, V. L. Zakharov, *Nucl. Phys.*, **B120**(1977), 316.
[4] J. F. Donoghue, E. Golowich, B. R. Holstein, *Phys. Lett.*, **119B**(1982), 412.
[5] R. E. Shrock, S. B. Treiman, *Phys. Rev.*, **D19**(1979), 2148.
[6] N. Cabibbo, G. Martinelli, R. Petronzio, *Nucl. Phys.*, **224B**(1984), 381.
[7] R. C. Brower, G. Maturana, M. B. Gavela, R. Gupta, *Phys. Rev. Lett.*, **53**(1984), 1318.

[8] C. Bernard, T. Draper, G. Hockney, A. M. Rushton, A. Soni, *Phys. Rev. Lett.*, **55**(1985), 2770.
[9] J. Shigemitsu, *Phys. Rev.*, **D18**(1978), 1709.
[10] P. Colic, B. Guberina, J. Trampetic, D. Tadic, *Phys. Rev. Lett.*, **221B**(1983), 141.

THE WEAK INTERACTION MATRIX ELEMENTS OF $|\Delta S|=2$ ON LATTICE

CHEN QIZHOU LI ZHIBING HE BAOPENG LUO XIANGQIAN GUO SHUOHONG
(*Zhongshan University, Guangzhou*)

ABSTRACT

Using the strong coupling expansion method in lattice gauge theory, we calculate the weak interaction matrix elements of $|\Delta S|=2$. Our results of the K_L-K_S mass difference are not only consistent with those of meson mass spectrum obtained by the same method, but also close to the experimental value.