快 报

1+1 维格点规范理论拓扑荷的精确解[1)]

郭硕鸿 陈 浩
(中山大学物理系广州)

摘 要

利用哈密顿方法，我们求得了 1+1 维 $U(1)$ 格点理论中拓扑感应率和拓扑荷密度平均值的精确解.

一、引 言

格点规范理论中的拓扑荷问题，是多年来人们一直注意的问题. 由于格点化，使时空失去连续性，从而在格点上定义拓扑荷是一个困难的问题. Lüscher[1] 第一个对这个问题作了回答，给出了一个在格点规范场中构造转换函数的方法. 他指出为了得到一个满意的格点拓扑荷的定义，格点的拓扑荷 Q 应满足如下的要求:

(i) 除了一组在泛函积分中有零测度的场之外，在具有周期边界条件的格点上，对所有的格点规范场都有定义.

(ii) Q 仅取整数值.

(iii) $Q=\sum\limits_{n} q(n)$

拓扑荷密度 $q(n)$ 是格点规范场的定域函数.

(iv) 在连续极限 $a\to 0$ 下，$q(n)$ 与连续理论一致

$$
q(n)=\begin{cases}\dfrac{a^4}{16\pi^2}\,\mathrm{Tr}\,F_{\mu\nu}(an)\widetilde{F}_{\mu\nu}(an),\quad \widetilde{F}_{\mu\nu}=\dfrac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. & 4\text{ 维情形}\\[2ex] \dfrac{a^2}{4\pi}\,\varepsilon_{\mu\nu}F_{\mu\nu}(an). & 2\text{ 维情形}\end{cases}
$$

其中 a 为格距，$\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ 和 $\varepsilon_{\mu\nu}$ 分别是 4 维和 2 维的完全反对称张量.

Panagiotakopoulos[2] 利用 [1] 中的方法讨论了 2 维 $U(1)$ 格点规范理论，并得出了拓扑感应率 $x_t=\dfrac{\langle Q^2\rangle}{V}$ (V 为格点体积)的数值结果. 我们目前的工作是利用格点规范理论的哈密顿形式，研究满足周期边界条件的 1+1 维 $U(1)$ 格点规范理论的拓扑荷. 在〈二〉中，我们由 Lüscher 的方法，构造 2 维 $U(1)$ 格点理论的转换函数，并由它求出在 1+1 维格点理论中拓扑荷的表达式. 在〈三〉中，我们利用 Witten[3] 的 θ 真空能与拓扑感应率的关系，求得 1+1 维 $U(1)$ 理论的 x_t，并与 [2] 的结果作比较. 〈四〉是结论和讨论.

---

1) 国家教委科学基金和中山大学高等学术研究中心资助项目
本文 1987 年 4 月 22 日收到.

二、拓扑荷的构造

分析 2 维 $U(1)$ 格点规范理论，赋予周期边界条件，周期为 L，即对链变量 $U_\mu(n)\cdot\in U(1)$ 有

$$U_\mu(n)=U_\mu(n+mL). \quad \forall m\in \boldsymbol{Z}^2 \tag{2.1}$$

将格点分为元胞 $c(n)$

$$c(n)=\{x\in \boldsymbol{R}^2 | 0\leqslant(x_\mu-n_\mu)\leqslant 1,\ \mu=0,1\}. \tag{2.2}$$

转换函数是一个规范变换，取值于规范群，它被定义于两个元胞的交上．记定义于 $c(n)$ 和 $c(n-\hat{\mu})$ 之交 $f(n,\mu)=c(n)\cap c(n-\hat{\mu})$ 上的转换函数为 $v_{n,\mu}(x)$，$x\in f(n,\mu)$．在四个元胞的交点，转换函数应当满足 cocycle 条件，即

$$v_{n-\hat{0},1}(y_0=1)v_{n,0}(y_1=0)=v_{n-\hat{1},0}(y_1=1)v_{n,1}(y_0=0). \tag{2.3}$$

此处 $y_\nu=x_\mu-n_\mu$，$\mu=0,1$．

同时周期边界条件要求

$$v_{n,\mu}(x)=v_{n+mL,\mu}(x+mL). \tag{2.4}$$

定义元胞 $c(n)$ 上各顶点

$$x=n+\sum_{\mu=0}^{1}z_\mu\hat{\mu}, \quad z_\mu\in\{0,1\}. \tag{2.5}$$

到 n 点的平移

$$\begin{aligned} &w^n(x)=U_0(n)^{z_0}U_1(n+z_0\hat{0})^{z_1}.\\ &U_\mu(n)^0=1,\ U_\mu(n)^1=U_\mu(n). \end{aligned} \tag{2.6}$$

由 $w^n(x)$ 可构造转换函数

$$v_{n,\mu}(x)=w^{-n-\hat{\mu}}(x)w^n(x)^{-1}. \tag{2.7}$$

由 (2.7) 我们可求得

$$v_{n,0}(y_1=0)=v_{n,0}(y_1=1)=U_0(n-\hat{0}). \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} &v_{n,1}(y_0=0)=U_1(n-\hat{1}),\\ &v_{n,1}(y_0=1)=U_0(n-\hat{1})U_1(n-\hat{1}+\hat{0})U_0^{-1}(n). \end{aligned} \tag{2.9}$$

将 (2.8) 及 (2.9) 延拓

$$v_{n,0}(y_1)=U_0(n-\hat{0}),\ \forall y_1\in f(n,0). \tag{2.10}$$

$$v_{n,1}(y_0)=U_1(n-\hat{1})[U_1^{-1}(n-\hat{1})U_0(n-\hat{1})U_1(n-\hat{1}+\hat{0})U_0^{-1}(n)]^{y_0}. \tag{2.11}$$

(2.10) 及 (2.11) 显然满足 (2.8) 及 (2.9)，同时易证 cocycle 条件 (2.3) 也成立．取时间规范，即 $U_0(n)=1$，则可得

$$v_{n,1}(y_0=1)=v_{n+\hat{0},1}(y_0=0) \tag{2.12}$$

即 $v_{n,1}(y_0)$ 是 y_0 的连续函数．

由转换函数定义的拓扑荷[2]为

$$Q=\frac{i}{2\pi}\sum_n\sum_{\mu\nu}\varepsilon_{\mu\nu}\int_{f(n,\mu)}dx\,v_{n,\mu}^{-1}\partial_\nu v_{n,\mu}. \tag{2.13}$$

链变量与规范势的关系为

$$U_\mu(n) = e^{iagA_\mu(n)}. \tag{2.14}$$

在时间规范下，由 (2.13) 可得

$$Q = -\frac{1}{2\pi}\sum_n \int dt\, ag\dot{A}_1. \tag{2.15}$$

其中 $\dot{A}_1 = \partial_t A_1$.

三、精 确 解

作用量 $S = \int dt L$，引入 θ 参数

$$S_\theta = \int dt L_\theta = \int dt L + \theta Q. \tag{3.1}$$

在 1+1 维格点理论中

$$L = \frac{a}{2}\sum_{n_x}\dot{A}_1^2. \tag{3.2}$$

利用 (2.15) 及上式可得

$$L_\theta = \frac{a}{2}\sum_{n_x}\dot{A}_1^2 - \theta\frac{ag}{2\pi}\sum_{n_x}\dot{A}_1. \tag{3.3}$$

令

$$\pi'_\theta = \frac{\partial L_\theta}{\partial \dot{A}_1} = a\dot{A}_1 - \frac{\theta ag}{2\pi}. \tag{3.4}$$

则哈密顿量为

$$\begin{aligned} H_\theta &= \pi'_\theta\dot{A}_1 - L_\theta = \frac{1}{2a}\sum_{n_x}\left(\pi'_\theta + \frac{\theta ag}{2\pi}\right)^2 \\ &= \frac{g^2a}{2}\sum_{n_x}\left(\pi_\theta + \frac{\theta}{2\pi}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

其中 $\pi_\theta = \frac{1}{ag}\pi'_\theta$，是 $U(1)$ 群的生成元，其本征值为 0, ±1, ±2,……，所以 θ 真空 以 π_θ 的本征值标记为

$$|\theta\rangle = \begin{cases} |0\rangle & -\pi < \theta < \pi \\ |-1\rangle & \pi < \theta < 3\pi \\ |+1\rangle & -2\pi < \theta < \pi \\ \vdots & \end{cases} \tag{3.6}$$

故对于 $m\pi < \theta < (m+1)\pi$, $m = 0, \pm1, \pm2, \cdots$，有

(I) 当 $m = 2l$ 时，$l = 0, \pm1, \pm2, \cdots$，$\theta$ 真空能为

$$E_\theta = \frac{1}{Na}\langle H_\theta\rangle_\theta = \frac{g^2}{2}\left(\frac{\theta}{2\pi} - l\right)^2. \tag{3.7}$$

(II) 当 $m = 2l+1$ 时，$l = 0, \pm1, \pm2, \cdots$，$\theta$ 真空能为

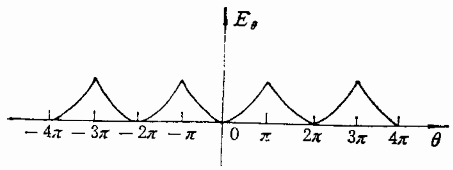

图 1　θ 真空能带结构

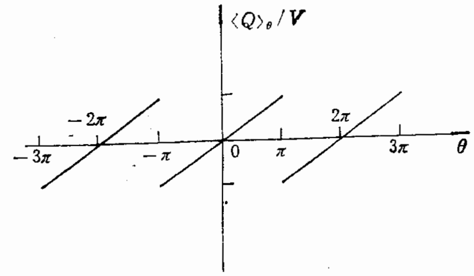

图 2　拓扑荷密度与 θ 角关系

$$E_\theta = \frac{1}{N\theta}\langle H_\theta\rangle_\theta = \frac{g^2}{2}\left(\frac{\theta}{2\pi} - l - 1\right)^2. \tag{3.8}$$

(3.7) 及 (3.8) 中的 N 为总的格点数．由 (3.7) 及 (3.8) 可知 θ 真空能具有能带结构如图 1．

由 [3] 知，拓扑感应率与 θ 真空能有关系式为

$$\chi_t = \left.\frac{\partial^2 E_\theta}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0}. \tag{3.9}$$

由上式及 (3.7) 及 (3.8) 得

$$\chi_t = \frac{1}{4\pi^2\beta a^2}, \tag{3.10}$$

其中 $\beta = \frac{1}{g^2a^2}$.

同时我们可得出拓扑荷密度与 θ 角的关系为

$$\frac{\langle \theta\rangle_\theta}{V} = \begin{cases} \frac{g^2}{2\pi}\left(\frac{\theta}{2\pi} - l\right), & \text{当 } 2l\pi < \theta < (2l+1)\pi. \\ \frac{g^2}{2\pi}\left(\frac{\theta}{2\pi} - l - 1\right), & \text{当 } (2l+1)\pi < \theta < (2l+2)\pi. \end{cases} \tag{3.11}$$

其中 $l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

(3.11) 可由图 2 表示．

四、结论和讨论

用哈密顿方法，我们求得了 1+1 维格点理论中拓扑感应率和拓扑荷密度平均值的精确解．而在 [2] 中关于拓扑感应率的数值计算，只有当 β 取较大值是才较精确，其趋势是与我们的结果 (3.10) 一致的． 同时 [2] 中拓扑荷平均密度的计算仅能在 $\theta = 0$ 附近进行，而我们的结果 (3.11) 并无此限制．故我们的结果比它进了一步．由 (3.11) 可看到 $\frac{\langle Q\rangle_\theta}{V}$ 在 $\theta = \pi$ 的奇数倍时不连续，存在幅度为 $\frac{g^2}{2\pi}$ 的差，它有可能有物理效应． 关于考虑费米子效应和推广至 4 维有待于进一步研究．

参考文献

[1] B. Berg, M. Lüscher, *Nucl. Phys.*, **B190**[FS] (1981), 412.
M. Lüscher, *Nucl. Phys.*, **B200**[FS4] (1982), 61.
M. Lüscher, *Commun. Math. Phys.*, **85**(1982), 39.
[2] C. Panagiotakopoulos, *Nucl. Phys.*, **B251**[FS13] (1985), 61.
[3] E. Witten, *Nucl. Phys.*, **B156**(1979), 269.

EXACT RESULTS FOR THE TOPOLOGICAL CHARGE OF 1+1D LATTICE GAUGE THEORY

Gou Shuo-hong Chen Hao
(*Zhongshan University, Guangzhou*)

Abstract

The exact results for the topological susceptibility and the mean value of the topological charge density in 1+1 D lattice gauge theory are obtained by means of the Hamiltonian method.