第 11 卷 第 2 期　　高 能 物 理 与 核 物 理　　Vol. 11, No. 2
1987 年 3 月　　HIGH ENERGY PHYSICS AND NUCLEAR PHYSICS　　Mar., 1987

Kerr-Newman 裸奇点与Bose 子束缚态

李　元　杰
（华 中 工 学 院）

摘　　要

本文采用线性微分算子的自共轭扩展谱分析法，讨论了 Kerr-Newman 型裸奇点与 Bose 子束缚态问题。结果表明：在能隙 $(-\mu, \mu)$ 中，Bose 子的哈密顿算子只能出现离散谱，由此推知，当 $\mu = 0$ 时，不存在 Bose 子束缚态，当 $\mu \neq 0$ 时，Kerr-Newman 裸奇点周围有 Bose 子束缚态形成。

一

在 Kerr-Newman 度规中，一个荷电 Bose 子所满足的方程是

$$\left\{\partial_r \Delta \partial_r - \frac{1}{\Delta}[(r^2+a^2)\partial_t + a\partial_\varphi + ieQr]^2 - \mu^2 r^2 + \frac{1}{\sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta) + \left(\frac{1}{\sin\theta}\partial_\varphi + a\sin\theta\partial_t\right)^2 - \mu^2 a^2 \cos^2\theta\right\}\phi = 0, \tag{1}$$

(1) 式分离变量可得径向方程

$$\frac{d^2\phi(r)}{du^2} = \{\Delta(\mu^2 r^2 + K) - [\omega(r^2+a^2) - am - eQr]^2\}\phi(r)^{[1]}. \tag{2}$$

其中，Q 是黑洞的电量，m，a 分别是黑洞的质量和单位质量的角动量，且 $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$，$du = -\frac{dr}{\Delta}$.

径向方程 (2) 能写成正则哈密顿形式

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

矩阵元 $H_{ij}^{(*)}$ 为

$$H_{11} = -\frac{A^4}{2\mu}\frac{d^2}{du^2} + A^2(am + eQr) - \frac{A^4}{2\mu}[(am+eQr)^2 - \Delta(\mu^2 r^2 + K)] + \frac{\mu}{2},$$

$$H_{12} = -\frac{A^4}{2\mu}\frac{d^2}{du^2} - A^2(am + eQr) - \frac{A^4}{2\mu}[(am+eQr)^2 - \Delta(\mu^2 r^2 + K)] - \frac{\mu}{2},$$

$$H_{21} = \frac{A^4}{2\mu}\frac{d^2}{du^2} - A^2(am + eQr) + \frac{A^4}{2\mu}[(am+eQr)^2 - \Delta(\mu^2 r^2 + K)] + \frac{\mu}{2},$$

本文 1986 年 5 月 28 日收到。
* 见附录

$$H_{22}=\frac{A^4}{2\mu}\frac{d^2}{du^2}+A^2(am+eQr)+\frac{A^4}{2\mu}[(am+eQr)^2-\Delta(\mu^2r^2+K)]-\frac{\mu}{2},$$

其中

$$A^2=\frac{1}{r^2+a^2}.$$

由能量本征方程

$$(H_{ij})\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}=E\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix},\tag{4}$$

解得

$$\left[-\frac{2A^4}{\mu+E}\partial_u^2+p_1(r)\right]f_1=\frac{2E^2}{\mu+E}f_1,\tag{5}$$

及

$$p_1(r)\equiv-\frac{2\mu}{\mu+E}\left\{\frac{A^4}{\mu}[(am+eQr)^2-\Delta(\mu^2r^2+K)]\right.$$
$$\left.-2A^2(am+eQr)\frac{E}{\mu}\right\}.\tag{6}$$

作变换

$$\frac{dr'}{dr}=\frac{(r^2+a^2)^2}{\Delta},\tag{7}$$

它满足条件　$r\to0$ 时 $r'\to0$；　$r\to\infty$ 时 $r'\to\infty$。
取

$$p_0=\frac{2(r^2+a^2)^2}{\mu+E},\tag{8}$$

不难证明 (5) 式可写成自共轭微分表示

$$l(f_1)\equiv[-\partial_{r'}(p_0\partial_{r'})+p_1]f_1=\frac{2E^2}{\mu+E}f_1\tag{9}$$

定理[2]：对于在区间 (a,b) 上定义的自共轭微分表达式

$$l(y)=(-1)^n(p_0y^{(n)})^{(n)}+(-1)^{n-1}(p_1y^{(n-1)})^{(n-1)}+\cdots+p_ny\tag{10}$$

若端点 a 是正则的，并设 $\lim\limits_{x\to b}p_n(x)=B$ 且对于充分接近 b 的 x 值，有 $p_1(x)\geqslant0,\cdots p_{n-1}(x)\geqslant0$，$p_0(x)>0$ 那末，算子 l 的任何自共轭扩展的谱在区间 $(-\infty,B)$ 中只能出现离散谱，且在区间 $(-\infty,B)$ 中那部分谱的极限点只能是点 B。

对于 (9) 式，应用上述定理直接得到其谱

$\lambda=\dfrac{2E^2}{\mu+E}$ 在 $\left(-\infty,\dfrac{2\mu^2}{\mu+E}\right)$ 中，只能是离散的。即

$$-\infty<\frac{2E^2}{\mu+E}<\frac{2\mu^2}{\mu+E}\tag{11}$$

于是有

$$-\mu<E<\mu\tag{12}$$

条件 (12) 给出了 Bose 子在 Kerr-Newman 裸奇点周围形成束缚态的可能性。
对于 $\mu=0$ 的 Bose 子，类似地讨论可得到无离散谱存在的结论，即不存在束缚态。

二

本文与文献[3]的方法相似，但推广到更复杂的情况，其结论与文献[4]对于费米子的结果相同。关于各类黑洞及其束缚态粒子问题还有许多文献[5—7]中讨论过，人们对其感兴趣是因为这些研究对真空理论及极早期宇宙都有重要意义。

附录 正则形式的哈密顿

我们令 $\dot{\xi}=\eta$，$i\eta=i\partial_t\xi=\omega\xi$ 则(2)式可写成

$$\frac{d^2\xi}{du^2}=A^{-4}\partial_t\eta+2A^{-2}(am+eQr)i\eta-[(am+eQr)^2-\triangle(\mu^2r^2+K)]\xi$$

或

$$i\partial_t\eta=A^4\left\{i\frac{d^2\xi}{du^2}+2A^{-2}(am+eQr)\eta+i[(am+eQr)^2-\triangle(\mu^2r^2+K)]\,\xi\right\} \tag{13}$$

再作变换

$$\xi=\frac{f_1+f_2}{\sqrt{2}}\qquad \eta=\frac{\mu}{i}\frac{f_1-f_2}{\sqrt{2}}$$

由(13)得

$$\begin{aligned}i\frac{\partial f_1}{\partial t}=&\left\{-\frac{A^4}{2\mu}\frac{d^2}{2u^2}+A^2(am+eQr)-\frac{A^4}{2\mu}[(am+eQr)-\triangle(\mu^2r^2+K)]+\frac{\mu}{2}\right\}f_1\\&+\left\{-\frac{A^4}{2\mu}\frac{d^2}{du^2}-A^2(am+eQr)-\frac{A^4}{2\mu}[(am+eQr)^2-\triangle(\mu^2r^2+K)]-\frac{\mu}{2}\right\}f_2\end{aligned} \tag{14}$$

及

$$\begin{aligned}i\frac{\partial f_2}{\partial t}=&\left\{\frac{A^4}{2\mu}\frac{d^2}{du^2}-A^2(am+eQr)+\frac{A^4}{2\mu}[(am+eQr)^2-\triangle(\mu^2r^2+K)]+\frac{\mu}{2}\right\}f_1\\&+\left\{\frac{A^4}{2\mu}\frac{d^2}{du^2}+A^2(am+eQr)+\frac{A^4}{2\mu}[(am+eQr)^2-\triangle(\mu^2r^2+K)]-\frac{\mu}{2}\right\}f_2\end{aligned} \tag{15}$$

参 考 文 献

[1] 刘 辽，«广义相对论讲义»，下册 p. 170 北京师范大学.
[2] M. A. Наймарг "Ленейные Дифференциальные Операторы" Гостехиздат 1954
[3] 张端明，李元杰，*Commun. in Theor. Phys.*, **V4** (1985), 853.
[4] Cohen J. M; Powers R. T., *Commun. Math. Phys.*, **86**(1982), 69.
[5] 章世伟，苏汝铿，物理学报，**3**(1982)，111.
[6] 须重明，谢光中，科学通报，**25**(1980)，1063.
[7] de Felic F, *Phys. Rev.*, **D19**(1979), 451.

THE BOUND STATES OF A BOSON IN THE FIELD OF KERR-NEWMAN'S NAKED SINGULARITY

Li Yuan-jie

(*Hua Zhong University of Science and Technology*)

Abstract

We discuss bound states of a boson in the field of Kerr-Newman's naked singularity by the spectrum Analysis of the self-conjugate extension of linear differential operators. The results show that the self-conjugate extension of the Hamiltonian of the boson has only discrete spectrum in the interval $(-\mu, \mu)$. From which we can infer that there are no boson bound states if $\mu=0$. Boson bound states appear when $\mu \neq 0$.