

包含六键项作用量的 $SU(2)$ 格点 规范理论相结构的变分研究

陈天崧 索存川
(南开大学)

摘 要

本文用拉氏形式的变分方法对包含六键项作用量的 $SU(2)$ 格点规范理论进行了相结构的研究,并计算了它对维数的依赖关系。

一、引 言

近来不少作者研究 Yang-Mills 理论改进的格点作用量的相结构及标度行为,并与标准的 Wilson 作用量的结果进行比较,用以讨论格点作用量的普适性及较快地趋于连续极限等问题。

Symanzik 指出^[1],在仅考虑作用量连续极限行为的一级改进时,可在原 Wilson 作用量中加入包含六根键项,改进的作用量从强耦合区至弱耦合区过渡比原标准的 Wilson 作用量更平滑。

改进的作用量

$$S = \frac{\beta F}{4} \left[c_0 \sum_I \text{Tr}(\text{I}) + c_1 \sum_{II} \text{Tr}(\text{II}) + c_2 \sum_{III} \text{Tr}(\text{III}) + c_3 \sum_{IV} \text{Tr}(\text{IV}) \right], \quad (1)$$

系数 c_0, c_1, c_2 及 c_3 满足如下三个方程^[2]:

$$c_1 = -\frac{1}{12}, \quad c_2 + c_3 = 0, \quad c_0 - 4(d-2)c_3 = 5/3, \quad (2)$$

这里有四个参数,却只有三个约束方程,因而有很多组解。不少作者用 Monte Carlo 方法

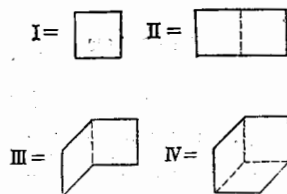


图1 四键和六键图

研究

$$\begin{aligned} c_0 &= 5/3, & c_1 &= -1/12, & c_2 &= c_3 = 0, \\ c_0 &= 7/6, & c_1 &= -1/12, & c_2 &= -c_3 = 1/16, \\ c_0 &= 14/3, & c_1 &= -1/12, & c_2 &= -c_3 = -3/8, \end{aligned} \quad (3)$$

时的标度参数 Λ , 弦张力 $\sigma^{[3,4,5]}$ 及胶球态^[3,6].

Wilson 通过实空间重正化群的研究, 建议采用如下参数^[7]:

$$c_0 = 4.376, \quad c_1 = -0.252, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -0.17, \quad (4)$$

最近 Bernreuther 等^[8]研究了

$$\begin{aligned} x &= c_2 + c_3 - c_1, & y &= -c_2 - c_3, & z &= c_3, \\ 0 &\leq x, & y &\leq 0.4, & -0.4 &\leq z \leq 0, \end{aligned} \quad (5)$$

时 $SU(2)$, $SU(3)$ 群标度参数的比率.

这些使我们有兴趣用拉氏形式的变分法对包含六键项作用量的 $SU(2)$ 格点规范理论的相结构进行广泛的研究. 得出当四个系数在较大范围内变化时相变点随之变化的曲线. 由此看出六根键项的加入使 $SU(2)$ 的总体相结构不变, 即在取最简单的尝试作用量及仅考虑 Jansen 不等式的一级近似下, 一级相变点总是存在的, 但相变点的位置随六键项的加入而在移动. 我们同时也研究了此相变点曲线对维数的依赖关系.

二、自由能及变分求解

在 d 维空间中, 对于 M 个格点的点阵, I、II、III 及 IV 模式数分别为

$$\begin{aligned} n_0 &= 1/2Md(d-1), & n_1 &= Md(d-1), \\ n_2 &= 2Md(d-1)(d-2), & n_3 &= 4/3Md(d-1)(d-2), \end{aligned} \quad (6)$$

我们采用[9]文中的方法, 取最简单的尝试作用量

$$S_0 = \sum_l \text{Tr}(U_l J^+ + U_l^+ J), \quad (7)$$

求和是对所有的键进行, J 是对所有的键都一样的一个 2×2 的矩阵, 相应的配分函数

$$Z_0 \equiv e^{-W_0} = \int [dU] e^{S_0} = f^{Md}, \quad (8)$$

Md 为总键数, d 为维数, 其中 $SU(2)$ 的单键积分值为^[10]

$$f = \int [dU] e^{\text{Tr}(UJ^+ + U^+J)} = \frac{I_1(2\sqrt{k})}{\sqrt{k}}, \quad (9)$$

$$k = \text{Tr}(JJ^+) + \det J + \det J^+, \quad (10)$$

利用统计中的 Jansen 不等式 $e^{\langle O \rangle} \leq \langle e^O \rangle$ 可得

$$Z \equiv e^{-W} = \int [dU] e^{S - S_0} e^{S_0}, \quad (11)$$

$$W \leq W_0 + \langle S_0 - S \rangle_0 \equiv W_{\text{eff}}, \quad (12)$$

这里

$$\langle S_0 - S \rangle_0 = \frac{1}{Z_0} \int [dU] (S_0 - S) e^{S_0},$$

标
续

用
作

(1)

(2)

与
法

W_{eff} 就是自由能的上确界,取对角形式的变分矩阵 J , 单位键的平均自由能为

$$E = \frac{W_{\text{eff}}}{Md} = -\ln \left(\frac{I_1(2\sqrt{k})}{\sqrt{k}} \right) + 2\sqrt{k}\omega - \beta_F \frac{d-1}{2} [c_0 + c\omega^2]\omega^4, \quad (13)$$

其中

$$\omega = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln f}{\partial \sqrt{k}},$$

$$c = 2c_1 + 4c_2(d-2) + 8/3c_3(d-2),$$

由极值条件

$$\frac{\partial W_{\text{eff}}}{\partial \sqrt{k}} = 0 \quad (14)$$

得自由能的两支解

$$1) \sqrt{k} = 0, \text{ 得 } E = 0, \quad (15)$$

$$2) \sqrt{k} = \beta_F \frac{d-1}{2} [2c_0 + 3c\omega^2]\omega^3, \quad (16)$$

即

$$\beta_F = 2\sqrt{k} / [(d-1)(2c_0 + 3c\omega^2)\omega^3], \quad (17)$$

$$E = -\ln \left(\frac{I_1(2\sqrt{k})}{\sqrt{k}} \right) + \frac{3c_0 + 5c\omega^2}{2c_0 + 3c\omega^2} \sqrt{k}\omega, \quad (18)$$

为了便于与 $c_0 = 1, c_1 = c_2 = c_3 = 0$ 的情况比较,取

$$\beta'_F = c_0\beta_F, \quad c' = c/c_0, \quad (19)$$

(17)及(18)式变为

$$\beta'_F = c_0\beta_F = 2\sqrt{k} / [(d-1)(2 + 3c'\omega^2)\omega^3], \quad (20)$$

$$E = -\ln \left(\frac{I_1(2\sqrt{k})}{\sqrt{k}} \right) + \frac{3 + 5c'\omega^2}{2 + 3c'\omega^2} \sqrt{k}\omega, \quad (21)$$

比较这两支解的大小,就可找到相变点的 β'_F 值。

三、结果与讨论

我们在较大范围内改变了参数 c_0 , 由(2)及(19)式,六根键项等效系数 c' 也将随之发生变化。我们发现一级相变点总是存在的,但随 c' 值变大,相变点向小处有明显的移动,结果示于表1及图2。从图2中可以看到当 c' 值较小时,六根键项只对四根键项起微扰作用,此时相变点对标准的 Wilson 作用量的相变点($\beta'_F = 2.82$)偏离不大。但当 c' 较大时,相变点的移动是很可观的。如 $d = 4, c_0 = 1/12$ 时, $c' = 4.33$, 相变点 $\beta'_F = 0.626$; $c_0 = 1/6$ 时 $c' = 2.00$, 相变点 $\beta'_F = 1.084$ 。

我们也计算了 Wilson 建议^[7]采用的参数(4)时的相变点 $\beta'_F = 3.680$ 。

当维数 d 变化时,相变点位置相应变化,结果示于表2,曲线也示于图2。我们看到当 $d = 3, 4, 5, 6$ 时,相变点随 c' 的变化规律是相似的,只是同一 c' 值处的 β'_F 值随 d 增大而变小。

表 1 $d=4$ 时 c_0, c', β'_F 值

c_0	0.083	0.167	0.333	0.667	1.000	1.333	1.667	2.000	2.333	2.667	3.000
c'	4.33	2.00	0.834	0.250	0.056	-0.042	-0.100	-0.139	-0.167	-0.187	-0.204
β'_F	0.626	1.084	1.70	2.37	2.71	2.92	3.05	3.15	3.22	3.27	3.32
c_0	3.333	3.667	4.000	4.333	4.667	5.000	10.00	20.00	30.00	100.00	200.00
c'	-0.217	-0.227	-0.236	-0.243	-0.250	-0.256	-0.294	-0.314	-0.320	-0.329	-0.331
β'_F	3.36	3.39	3.42	3.44	3.46	3.47	3.59	3.64	3.68	3.70	3.71

表 2 $d=3, 5, 6$ 时的 c', β'_F 值

$\beta'_F \backslash c'$	0.834	0.250	0.056	-0.042	-0.100	-0.139	-0.167	-0.187	-0.204	-0.217
$d=3$	2.56	3.56	4.07	4.38	4.58	4.73	4.83	4.92	4.98	5.04
$d=5$	1.28	1.78	2.03	2.19	2.29	2.36	2.41	2.46	2.49	2.52
$d=6$	1.02	1.42	1.63	1.75	1.83	1.89	1.94	1.97	1.99	2.02
$\beta'_F \backslash c'$	-0.227	-0.236	-0.243	-0.250	-0.256	-0.294	-0.314	-0.320	-0.329	-0.331
$d=3$	5.08	5.12	5.16	5.18	5.20	5.39	5.47	5.50	5.55	5.56
$d=5$	2.54	2.56	2.58	2.59	2.60	2.70	2.74	2.76	2.78	2.79
$d=6$	2.03	2.05	2.06	2.07	2.08	2.15	2.19	2.20	2.22	2.23

表 3 $d=3, 4, 5, 6$ 时的 c_s, β'_F 值

$\beta'_F \backslash c_s$	0	-0.04	-0.08	-0.12	-0.16	-0.20	-0.24	-0.28	-0.32	-0.36	-0.40
$d=3$	4.58	4.49	4.39	4.26	4.10	3.89	3.64	3.28	2.78	2.02	0.78
$d=4$	3.06	2.93	2.73	2.42	1.85	0.52	10.49	6.60	5.45	4.95	4.66
$d=5$	2.29	2.13	1.82	1.01	8.25	4.45	3.71	3.43	3.26	3.18	3.11
$d=6$	1.82	1.64	1.11	6.59	3.27	2.81	2.62	2.52	2.47	2.43	2.40

发
力,
作
寸,
6;当
大

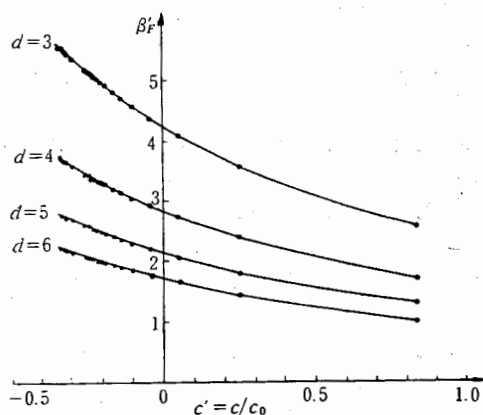


图 2

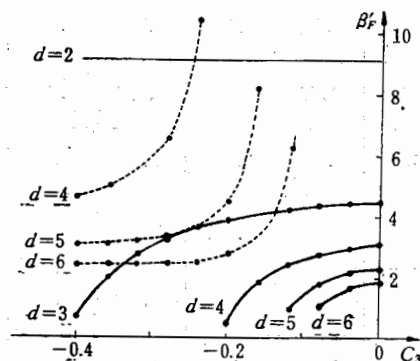


图 3

我们也研究了[8]文中所示的参量变化范围 ($-0.4 \leq c_3 \leq 0$) 内相变点的变化规律, 结果示于表 3 及图 3.

$d=2$ 时, 可推出 β'_F 与 c_3 无关, 此时 $\beta'_F = 9.15$. 由图 3 可以看到在 $-0.4 \leq c_3 \leq 0$ 范围内, 对 $d=4, 5, 6$ 的相变点曲线都有间断的两支, 但随 d 增大此间断点的位置向右移动. 这里揭示的是什么物理实质还需进一步研究.

由 Monte Carlo 模拟计算的结果, 实际上这一级相变点是不应该存在的, 但用平均场及简单的变分法处理都会出现这个相变点, 目前不少作者正在想办法移去这个不需要的相变点^[11], 我们下面的工作将是进一步改进这个结果.

参 考 文 献

- [1] K. Symanzik, *Nucl. Phys.*, **B226**(1983), 187, 205.
- [2] P. Weisz, *Nucl. Phys.*, **B212**(1983), 1.
- [3] M. Fukugita, T. Kaneko, T. Niuya and A. Ukawa, *Phys. Lett.*, **130B**(1983), 73; **134B**(1984), 341.
- [4] W. Bernreuther and W. Wetzel, *Phys. Lett.*, **132B**(1983) 382.
- [5] S. Belforte, G. Curci, P. Menotti and G. Paffuti, *Phys. Lett.*, **131B**(1983), 423.
- [6] B. Berg, A. Billoire, S. Meyer and C. Panagiotakopoulos, *Phys. Lett.*, **123B** (1983), 359.
- [7] K. G. Wilson, in: *Recent developments in gauge theories*, eds. G. 't Hooft et al. (Plenum, New York, 1980).
- [8] W. Bernreuther, W. Wetzel and R. Wohlert, *Phys. Lett.*, **142B**(1984), 407.
- [9] Zheng Xi-te, (郑希特), Chung-I Tan and Chen Tian-lun (陈天谿), *Phys. Rev.*, **D26**(1982), 2843.
- [10] R. Brower, P. Rossi and C.-I. Tan, *Nucl. Phys.*, **B190** (FS3) (1981), 699.
- [11] H. Flyvbjerg, B. Lautrup and J. B. Zuber, *Phys. Lett.*, **110B**(1981), 279. J. M. Albery, H. Flyvbjerg and B. Lautrup, *Nucl. Phys.*, **B220** (FS8) (1983), 61.

VARIATIONAL ANALYSIS OF PHASE STRUCTURE OF THE $SU(2)$ LATTICE GAUGE THEORY WITH AN ACTION INCLUDING SIX-LINK LOOPS

CHEN TIAN-LUN SUO CUN-CHUAN

(*Nankai University*)

ABSTRACT

The variational method in Lagrangian formalism is applied to investigate phase structure of the $SU(2)$ lattice gauge theory with an action including six-link loops. Dimensionality dependence is also investigated.

±,

: 0

右

场

的

141.

um,

343.

Eyv-