第9卷 第3期 高能物理与核物理 Vol. 9, No. 3
1985年5月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS May, 1985

't Hooft 单极场中泡利方程的精确解

阎俊虎
（内蒙古大学）

摘要

本文利用活动标架的方法，计算了同位旋 I 为任意整数或半整数自旋 $\frac{1}{2}$ 粒子在 't Hooft-Polyakov 磁单极场中的运动；对于同位旋 $\frac{1}{2}$ 总角动量 $J=0$ 的情况，给出泡利方程一个精确的散射态解. 并对磁单极的催化作用进行了讨论.

近年来，由于 Cabrera[1] 观测到一个可能的磁单极事例，Rubakov[2]、Callan[3] 提出磁单极对质子衰变有催化作用的理论，许多人对单极、双子（dyon）场中的费米子进行了研究[4,5]. 他们大都是从 Dirac 方程出发. 因为磁单极子非常重（$\sim 10^{16}$GeV），Kroll 等人[6]推得：从银河系或太阳系磁场放出的磁单极子，到达地球表面的表观速度在 $10^{-5}\sim 10^{-3}C$ 范围（C 是光速）. 因此，讨论地球表面粒子或物质与外来单极子的相互作用，可从非相对论理论出发.

设自旋 $\frac{1}{2}$ 同位旋 I 电荷 e 质量 M 的粒子与 't Hooft-Polyakov 磁单极相互作用，当它们的相对速度《光速时，作非相对论处理. 因单极质量》费米子质量，故将单极场视为背景场，只考虑场中费米子的运动. 其定态波函数满足如下泡利方程：

$$-\frac{1}{2M}\sigma_i\nabla_i\sigma_j\nabla_j\phi(\boldsymbol{x})=E\phi(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

其中规范协变微商

$$\nabla_i=\partial_i-ieA_i^aT^a. \tag{2}$$

σ_i 是通常的泡利矩阵，T_a 是同位旋生成元.

对 't Hooft-Polyakov 单极，规范势

$$A_i^a=\varepsilon_{iaj}x^j(r\varphi(r)-1)/er^2, \tag{3}$$

它可分解为 Abel 化部分 W 与不可约化部分 B：

$$W_i^a=-\varepsilon_{iaj}x^j/er^2, \tag{3a}$$

$$B_i^a=\varphi(r)\varepsilon_{iaj}x^j/er, \tag{3b}$$

在 Prasad-Sommerfield[7] 极限下

本文1984年4月9日收到.

$$\varphi(r)=\frac{\beta}{\mathrm{sh}\beta r},\quad (\beta\ 是常数).$$

由于势的同步球对称性,存在守恒总角动量:

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}+\boldsymbol{T}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}. \tag{4}$$

为解方程(1),采用二分量K算子和活动标架的方法[8],即:

$$K=-i\varepsilon_{ijk}\sigma_i x_j\nabla_k^{(W)}+1, \tag{5}$$

$$\nabla_k^{(W)}=\partial_k-ieW_k^aT^a, \tag{2a}$$

易证:

$$\sigma_i\nabla_i^{(W)}=\sigma_r\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\sigma_rK \tag{6}$$

这时方程(1)变为

$$-\frac{1}{2M}\left[\sigma_r\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\sigma_rK-i\varphi(r)\times\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{T})\right]^2\psi=E\psi. \tag{7}$$

将ψ的角向部分按反映问题对称性的活动标架下的完备基展开:

$$\psi(\boldsymbol{x})=\sum_{\mu,\nu}f_{\mu,\nu}(r)\xi_{\mu,\nu}(\varphi,\theta,\gamma), \tag{8}$$

其中

$$\xi_{\mu\nu}=\sqrt{\frac{2J+1}{4\pi}}D^J_{m,\mu+\nu}S_\mu i_\nu, \tag{9}$$

是 $\boldsymbol{J}^2$、J_z、σ_r、Tr 的共同本征态,即

$$\boldsymbol{J}^2\xi_{\mu,\nu}=J(J+1)\xi_{\mu,\nu},\quad J_z\xi_{\mu,\nu}=m\xi_{\mu,\nu},$$
$$\sigma_r\xi_{\mu,\nu}=2\mu\xi_{\mu,\nu},\qquad \mathrm{Tr}\,\xi_{\mu,\nu}=\nu\xi_{\mu,\nu};$$

而

$$K\xi_{\mu,\nu}=K_\nu\xi_{-\mu,\nu}, \tag{10}$$
$$\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot(\boldsymbol{\sigma}\times\boldsymbol{T})\xi_{\mu,\nu}=-i2\mu\alpha^I_{\nu+\frac{1}{2}+\mu}\xi_{-\mu,\nu+2\mu};$$

其中

$$K_\nu=\sqrt{\left(J+\frac{1}{2}\right)^2-\nu^2};\qquad \alpha^I_\nu=(I+\nu)^{\frac{1}{2}}(I-\nu+1)^{\frac{1}{2}}.$$

将(8)代入(7),利用(10)和 $\xi_{\mu,\nu}$ 的正交完备性,得:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)f_{\mu,\nu}(r)+\alpha^I_{\nu+\frac{1}{2}+\mu}\left(\frac{d}{dr}\varphi\right)f_{-\mu,\nu+2\mu}(r)\\&+\frac{K_\nu}{r^2}f_{-\mu,\nu}(r)-\frac{K_\nu^2}{r^2}f_{\mu,\nu}(r)+\alpha^I_{\nu+\frac{1}{2}-\mu}K_\nu\frac{\varphi}{r}f_{\mu,\nu-2\mu}(r)\\&+K_{\nu+2\mu}\alpha^I_{\nu+\frac{1}{2}+\mu}\frac{\varphi}{r}f_{\mu,\nu+2\mu}(r)-(\alpha^I_{\nu+\frac{1}{2}+\mu}\varphi)^2f_{\mu,\nu}(r)\\&=-2MEf_{\mu,\nu}(r);\end{aligned} \tag{11}$$

这是自旋 $\frac{1}{2}$，同位旋 I 为任意整数或半整数粒子在 't Hooft 单极场中径向波函数所满足的方程。

对于同位旋 $I=\frac{1}{2}$，总角动量 $J=0$ 的情况：

$$\mu=-\nu=\pm\frac{1}{2},$$

因而 $K_\nu=K_{\nu+2\mu}=0$，$\alpha^I_{\nu+\frac{1}{2}+\mu}=1$，方程 (11) 化为：

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)f_{\mu,-\mu}-\beta^2\frac{\mathrm{ch}\beta r}{\mathrm{sh}^2\beta r}f_{-\mu,\mu}-\frac{\beta^2}{\mathrm{sh}^2\beta r}f_{\mu,-\mu}=-2MEf_{\mu,-\mu}. \tag{12}$$

i) 当 $E>0$ 时，根据径向波函数 $f_{\mu,-\mu}(r)$ 在原点正则的边界条件，(12) 给出全空间解析的散射态解：

$$f_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(r)=\frac{c}{2r}\left[\left(\frac{4iK}{\beta}+\coth\frac{\beta r}{2}+\tanh\frac{\beta r}{2}\right)e^{-iKr}+\left(\tanh\frac{\beta r}{2}-\coth\frac{\beta r}{2}\right)e^{iKr}\right], \tag{13}$$

$$f_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(r)=\frac{c}{2r}\left[\left(\coth\frac{\beta r}{2}-\tanh\frac{\beta r}{2}\right)e^{-iKr}+\left(\frac{4iK}{\beta}-\coth\frac{\beta r}{2}-\tanh\frac{\beta r}{2}\right)e^{iKr}\right], \tag{14}$$

其中 $K=\sqrt{2ME}$，c 为常数．解的渐近行为是：

$$f_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(r)=\frac{c}{r}\left(\frac{2iK}{\beta}+1\right)e^{-iKr}, \tag{15}$$

$$f_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(r)=\frac{c}{r}\left(\frac{2iK}{\beta}-1\right)e^{iKr}. \tag{16}$$

ii) 当 $E<0$，据波函数在原点正则，在 $r=\infty$ 为零的边界条件，方程 (12) 只有平庸解，即

$$f_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(r)=f_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(r)=0. \tag{17}$$

iii) 当 $E=0$，方程(12)满足边界条件的非平庸解为：

$$f_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(r)=-f_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}(r)=\frac{d}{r}\tanh\frac{\beta r}{2}. \tag{18}$$

由此式明显看出，当 $r\to\infty$ 时，解按 r^{-1} 衰减，在原点趋于有限值．

总之，对于 $I=\frac{1}{2}$ $J=0$ 情况，方程(1)给出一个零能解(18)和一个精确的散射态解(13)，(14)．从解的渐近行为知，这样一个散射过程，同位旋$\frac{1}{2}$ 的费米子会发生电荷交换过程．我们得到的这一结果与[5]类似．

解的渐近行为，给出 $J=0$ 的散射相移：

$$\delta(K)=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{2K}{\beta}, \tag{19}$$

对于 $K^2=2ME\ll\beta^2$,得到散射截面

$$\sigma\approx\frac{\pi}{K^2}. \tag{20}$$

如果费米子为核子,能量 $E\sim 10\text{MeV}$, 则$\sigma\sim 10^{-26}\text{cm}^2$, 为强相互作用截面数量级,与文献[2,3]给出的一致.

解(15)、(16)意味着: 在单极场中,会发生如文献[2,3]所讨论的电荷交换(同时色也交换)的过程.(例如: $P(uud)+M\rightarrow e^{+}+(uu\bar{u}\bar{u})+M\rightarrow e^{+}+2\pi^{0}+M$ 的过程.)即如果入射核子是带荷的,则出射核子是不带荷的,反之亦然. 过程是一个角动量守恒电荷不守恒的散射,原因在于径向荷 Q_r 与哈密顿并不对易.$\left(Q_r=\int d^3x\phi^{+}\boldsymbol{T}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\phi\right)$. 当然,在一个完美的理论中,电荷守恒是必须要求的.这里,我们假定作用过程中产生了其它粒子,来弥补这一缺陷[4]. 磁单极在散射过程中,不发生衰变,可能只对核子的衰变起一种催化作用. 关于单极与费米子体系的边界条件及在边界上色的不确定性问题将另文讨论.

作者感谢侯伯元教授的指导,王维玺同志有益的讨论.

参 考 文 献

[1] B. Cabrera, *Phys. Rev. Lett.*, **48**(1982), 1378.
[2] V. A. Rubakov, *Nucl. Phys.*, **B203**(1982), 311.
[3] C. G. Callan, *Phys. Rev.*, **D25** (1982), 2141.
[4] Tang. J. F., *Phys. Rev.* **D26** (1982), 510; A. S. Blaer, N. H. Christ and Tang. J. F., *Phys. Rev. Lett.*, 47(1981), 1364; *Phys. Rev.*, **D25**(1982), 2128.
[5] W. J. Marciano and I. J. Muzinich., *Phys. Rev. Lett.*, **50**(1983), 1035.
[6] S. D. Drell, N. M. Kroll, M. T. Mueller, S. J. Parke and M. A. Ruderman, *Phys. Rev. Lett.*, **50** (1983), 644.
[7] M. K. Prasad and C. M. Sommerfield, *Phys. Rev. Lett.*, **35**(1975), 760.
[8] 侯伯宇、侯伯元,高能物理与核物理, **3**(1979), 697;
侯伯宇,物理学报, **19**(1963), 341.

EXACT SOLUTION OF THE PAULI EQUATION IN THE FIELD OF A 't HOOFT-POLYAKOV MONOPOLE

YAN JUN-HU
(*Neimenggu University*)

ABSTRACT

In this paper, the motion for the spin one half particles with arbitrary isospin in the field of a't Hooft-Polyakov magnetic monopole (in the Prasad-Sommerfield limit) is studied by the method of the moving frame. An exact solution of the Pauli equation for the total angular momentum $J=0$ and isospin $I=1/2$ is presented. The question of Proton decay catalysis is briefly discussed.