第9卷 第1期 高能物理与核物理 Vol. 9, No. 1
1985年1月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Jan., 1985

Wigner 算符的正规乘积形式和相干态形式的应用

范 洪 义 阮 图 南
（中国科学技术大学）

摘 要

本文导出了 Wigner 算符的正规乘积形式和相干态形式及其若干应用，其中包括若干新量子算符公式的导出，Moyal 定理的相干态推广，计算以前文献未曾得到的若干与经典函数对应的量子 Weyl 算符以及若干与量子算符对应的 Weyl 经典函数。

一、引 言

在讨论经典力学和量子力学的关系时，常常遇到这样的问题：在经典力学中坐标 q 和动量 p 是对易的，它们在乘积中的次序是任意的，但当向量子力学过渡时，由于算符 Q、P 不对易，相应的乘积项的次序应该如何确定？在文献[1]中 Weyl 给出了一种对应方案，定义经典函数和量子算符的对应为

$$A(P,\ Q)=\int_{-\infty}^{\infty} dpdq\Delta(p,\ q)a(p,\ q). \tag{1}$$

其中积分核称为 Wigner 算符[3]

$$\Delta(p,\ q)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} due^{-ipu}\left|q-\frac{u}{2}\right\rangle\left\langle q+\frac{u}{2}\right| \tag{2}$$

$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} dudve^{i(p-P)u+i(q-Q)v} \tag{3}$$

(1)式的坐标表象矩阵元是

$$\langle q|A(P,\ Q)|q'\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dp}{2\pi}e^{ip(q-q')}a\left(p,\ \frac{q+q'}{2}\right). \tag{4}$$

利用 Baker-Hausdorff 公式(2)式可以改写为

$$A(P,\ Q)=e^{\frac{i}{2}\frac{\partial^2}{\partial p\partial q}}a(p,\ q)|_{p=P,q=Q}. \tag{5}$$

这称为 Weyl-McCoy 对应[2]。此外，Wigner 算符 $\Delta(p,\ q)$ 对状态矢量的平均值称为 Wigner 分布函数，Wigner 和 Moyal[4] 利用它把量子力学平均值化为经典函数的相空间积分，现在这种方法已广泛地应用于量子输运理论、核物理、统计物理和光的相干性质的研究中。为了深入研究经典力学与量子力学的对应关系有必要把目前文献常用的

本文 1983 年 8 月 2 日收到。

Wigner 算符的坐标、动量表象中的积分形式(2)推广为相干态[5] 形式和明显的算符形式. 在本文第二节中我们用正规乘积和相干态的性质导出 Wigner 算符的这两种新形式. 然后在第三节中用它们导出若干新的量子算符公式. 在第四节我们将用 Wigner 算符的相干态形式给出若干量子算符的经典 Weyl 对应函数，而这些结果用以前的方法是难于求得的. 在第五节中我们给出如何利用 Wigner 算符的显示算符形式求出以前无法计算的较复杂的经典函数的量子对应. 在第六节中我们用 Wigner 算符的新形式直接给出 Moyal 定理的相干态推广. 在第七节中我们用它求出一般形式的密度矩阵的相空间分布函数. 在第八节中我们给出 Wigner 算符的其他形式以及推广的 Wigner 算符的显示算符形式.

二、Wigner 算符的正规乘积形式和相干态形式

为了把式(3)中的算符积分算出，我们注意到玻色算符在正规乘积内对易和可以对正规乘积内的 c 数进行微分、积分运算这两条性质，先把 Wigner 算符中的被积算符化为

$$e^{-iPu-iQv} = e^{\frac{u-iv}{\sqrt{2}}a^+} e^{-\frac{u+iv}{\sqrt{2}}a} e^{-\frac{u^2+v^2}{4}} \tag{6}$$

再令 $\rho = \dfrac{q+ip}{\sqrt{2}}$, $\beta = \dfrac{u-iv}{\sqrt{2}}$ 并利用以下积分公式

$$\int \frac{d^2\beta}{\pi} e^{\alpha|\beta|^2+\delta\beta^*+\gamma\beta} = -\frac{1}{\alpha}\exp\left(-\frac{\delta\gamma}{\alpha}\right), \qquad \mathrm{Re}\alpha < 0 \tag{7}$$

对 $\Delta(p, q)$ 作正规乘积下的积分得

$$\begin{aligned} \Delta(p, q) \equiv \Delta(\rho, \rho^*) &= \int \frac{d^2\beta}{2\pi^2} : e^{-\frac{|\beta|^2}{\sqrt{2}}+\beta(a^+-\rho^*)-\beta^*(a-\rho)} : \\ &= \frac{1}{\pi} : e^{-2(a^+-\rho^*)(a-\rho)} : = \frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-2)^l}{l!}(a^+-\rho^*)^l(a-\rho)^l. \end{aligned} \tag{8}$$

利用算符恒等式[6]

$$e^{-\lambda a^+a} = :\exp[(e^{-\lambda}-1)a^+a]: \tag{9}$$

上式又可写为

$$\Delta(p, q) = \frac{1}{\pi} e^{2\rho a^+} e^{i\pi N} e^{2\rho^* a} e^{-2|\rho|^2} = \frac{1}{\pi} e^{2\rho a^+ - 2\rho^* a}(-)^N. \tag{10}$$

其零点值

$$\Delta(0, 0) = \frac{(-)^N}{\pi}. \tag{11}$$

其中 $N = a^+a$ 是粒子数算符. (8)式和(10)式分别称为 Wigner 算符的正规乘积分形式和显示算符形式，为了进一步找出它的相干态形式，注意到相干态 $|z\rangle$ 可以写为平移算符 $D(z)$ 作用到玻色子真空 $|0\rangle$，即

$$|z\rangle = D(z)|0\rangle, \quad D(z) \equiv e^{za^+-z^*a} = e^{i(pQ-qP)}. \tag{12}$$

容易证明 $D(z)$ 具有下列性质

$$D(\rho)D(z)=D(\rho+z)e^{\frac{1}{2}(\rho z^*-\rho^* z)},\quad D^{-1}(z)=D^+(z)=D(-z) \tag{13}$$

$$D^{-1}(z)F(a,a^+)D(z)=F(a+z,a^++z^*). \tag{14}$$

同时相干态具有以下性质

$$(-)^N|z\rangle=|-z\rangle,\qquad \int\frac{d^2z}{\pi}|z\rangle\langle -z|=(-)^N. \tag{15}$$

因此可把(10)式改写为

$$\Delta(p,q)=D(\rho)\Delta(0,0)D^{-1}(\rho)=\frac{1}{\pi}D(\rho)\int\frac{d^2z}{\pi}|z\rangle\langle -z|D^{-1}(\rho)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\frac{d^2z}{\pi}|\rho+z\rangle\langle\rho-z|e^{\rho^*z-z\rho^*}. \tag{16}$$

我们称之为 Wigner 算符的相干态形式．由(8)式和(7)式又得 Wigner 算符的阵迹

$$\int\frac{d^2\rho}{\pi}\Delta(\rho,\rho^*)=\frac{1}{\pi}\int\frac{d^2\rho}{\pi}:e^{-2(|\rho|^2-\alpha^*a-\alpha a^++a^+a)}:=\frac{1}{2\pi}. \tag{17}$$

$$\mathrm{Tr}\Delta(\rho,\rho^*)=\frac{1}{\pi}\int\frac{d^2z}{\pi}\langle z|:e^{-2(a^+-\rho^*)(a-\rho)}:|z\rangle=\frac{1}{2\pi}. \tag{18}$$

Wigner 算符新形式的用处将在下面给出．

三、若干量子算符公式

可以从 Wigner 算符的明显算符形式方便地导出一些重要的算符公式． 注意到由 Weyl 对应(1)式有

$$Q^n=\int dp\,dq\,\Delta(p,q)q^n. \tag{19}$$

利用(8)式可以把上式右边改写为正规乘积下积分

$$\int dp\,dq\,\Delta(p,q)q^n=\int\frac{dp\,dq}{\pi}:e^{-2a^+a+\sqrt{2}q(a+a^+)+i\sqrt{2}p(a^+-a)-(q^2+p^2)}q^n:$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}:\int dq\,e^{-\left(q-\frac{a^++a}{\sqrt{2}}\right)^2}q^n:$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}:\sum_{r=0}^{[n/2]}\binom{n}{2r}\left(\frac{a+a^+}{\sqrt{2}}\right)^{n-2r}\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right):. \tag{20}$$

利用公式 $\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\,\frac{1}{2^{2r}}\frac{(2r)!}{r!}$ 和(19)式立刻可把(20)式写成算符恒等式

$$(a+a^+)^n=\sum_{r=0}^{[n/2]}\frac{n!}{(n-2r)!\,r!\,2^r}:(a+a^+)^{n-2r}: \tag{21}$$

可以证明它的逆展开为(见附录)

$$:(a+a^+)^n:=\sum_{r=0}^{[n/2]}\frac{n!(-)^r}{(n-2r)!\,r!\,2^r}(a+a^+)^{n-2r}. \tag{22}$$

利用(8)式和 p^n 的 Weyl 对应式

$$p^n = \int dpdq\Delta(p,q)p^n. \tag{23}$$

还可以导出以下算符恒等式

$$(a - a^+)^n = \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-)^r n!}{(n-2r)!r!2^r} :(a - a^+)^{n-2r}: \tag{24}$$

由 Weyl 对应可知，经典量 $p^l q^m$ 对应的量子算符为

$$p^l q^m \longleftrightarrow \frac{1}{2^m} \sum_{r=0}^{m} \frac{m!}{r!(m-r)!} Q^r P^l Q^{m-r}. \tag{25}$$

另一方面，由(8)式做如下的正规乘积下积分又得

$$\begin{aligned}\int dpdq\Delta(p,q)p^l q^m &= \frac{1}{\pi} : \int dp e^{-p^2+i\sqrt{2}p(a^+-a)} p^l \int dq e^{-q^2+\sqrt{2}q(a^++a)-2a^+a} q^m : \\ &= \sum_{t=0}^{[l/2]} \sum_{r=0}^{[m/2]} \binom{l}{2t}\binom{m}{2r} \Gamma\left(t+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right) i^{l-2t} : \\ &\quad \left(\frac{a^+-a}{\sqrt{2}}\right)^{l-2t}\left(\frac{a^++a}{\sqrt{2}}\right)^{m-2r} :. \end{aligned} \tag{26}$$

比较(25)式和(26)式导出算符公式

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^m}\sum_{r=0}^{m}\frac{m!}{r!(m-r)!}Q^rP^lQ^{m-r} &= \sum_{t=0}^{[l/2]}\sum_{r=0}^{[m/2]}\binom{l}{2t}\binom{m}{2r}\Gamma\left(t+\frac{1}{2}\right) \\ &\cdot \Gamma\left(r+\frac{1}{2}\right) i^{l-2t} : \left(\frac{a^+-a}{\sqrt{2}}\right)^{l-2t}\left(\frac{a^++a}{\sqrt{2}}\right)^{m-2r} :. \end{aligned} \tag{27}$$

由 Weyl 对应(1)式又有

$$\int dpdq\Delta(p,q)e^{\lambda p^2} = e^{\lambda P^2}. \tag{28}$$

另一方面用(8)式进行正规乘积下的积分得

$$\int dpdq\Delta(p,q)e^{\lambda p^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} e^{\frac{\lambda a^{+2}}{2(\lambda-1)}} e^{-a^+a\ln(1-\lambda)} e^{\frac{\lambda a^2}{2(\lambda-1)}},\quad \mathrm{Re}\lambda < 1. \tag{29}$$

比较(28)式与(29)式导出公式

$$e^{\lambda P^2} = \sqrt{\frac{1}{1-\lambda}}\, e^{\frac{\lambda a^{+2}}{2(\lambda-1)}} e^{-a^+a\ln(1-\lambda)} e^{\frac{\lambda a^2}{2(\lambda-1)}},\quad \mathrm{Re}\lambda < 1. \tag{30}$$

同样的方法可以导出算符公式

$$e^{\lambda Q^2} = \sqrt{\frac{1}{1-\lambda}}\, e^{\frac{\lambda a^{+2}}{2(1-\lambda)}} e^{-a^+a\ln(1-\lambda)} e^{\frac{\lambda a^2}{2(1-\lambda)}},\quad \mathrm{Re}\lambda < 1. \tag{31}$$

又由 Weyl 对应(1)式可以知道

$$\int dpdq\Delta(p,q)q^n e^{\lambda q^2} = Q^n e^{\lambda Q^2} \tag{32}$$

另一方面由(8)用正规乘积下积分得

$$\int dpdq\Delta(p,q)q^n e^{\lambda q^2} = \frac{1}{(1-\lambda)^{\frac{n+1}{2}}} e^{\frac{\lambda a^{+2}}{2(1-\lambda)}} : e^{\frac{\lambda a^+ a}{1-\lambda}}$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{k!(n-2k)!\,2^{2k}} \left(\frac{a+a^+}{\sqrt{2(1-\lambda)}}\right)^{n-2k} : e^{\frac{\lambda a^2}{2(1-\lambda)}}, \quad \mathrm{Re}\lambda < 1. \tag{33}$$

比较(32)和(33)式给出公式

$$Q^n e^{\lambda Q^2} = \frac{1}{(1-\lambda)^{\frac{n+1}{2}}} e^{\frac{\lambda a^{+2}}{2(1-\lambda)}} : e^{\frac{\lambda a^+ a}{1-\lambda}} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{k!(n-2k)!\,2^{2k}} \cdot \left(\frac{a+a^+}{\sqrt{2(1-\lambda)}}\right)^{n-2k} : e^{\frac{\lambda a^2}{2(1-\lambda)}}. \tag{34}$$

在以上的计算中利用了数学公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dq e^{-(q-\lambda)^2} q^n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{2k} \lambda^{n-2k}\, \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{k!(n-2k)!} \lambda^{n-2k} \frac{1}{2^{2k}}. \tag{35}$$

再求经典函数 $\exp\left(-i\lambda \frac{q^3}{3} + q^2\right)$ 的量子对应，利用(8)式得

$$\int dp dq \Delta(p, q) e^{-i\lambda \frac{q^3}{3}+q^2} = \int \frac{dp}{\pi} : e^{-p^2+i\sqrt{2}p(a^+-a)} \int dq e^{-i\lambda \frac{q^3}{3}+\sqrt{2}q(a^++a)-2a^+a} : = \frac{2\sqrt{\pi}}{\lambda^{1/3}} e^{-\frac{a^{+2}}{2}} : e^{-a^+a} A_i\left[i\sqrt{2}\lambda^{-1/3}(a^+-a)\right] : e^{-\frac{a^2}{2}}. \tag{36}$$

另一方面 $\exp\left(-i\lambda \frac{q^3}{3} + q^2\right)$ 的量子对应显然是 $\exp\left(-i\lambda \frac{Q^3}{3} + Q^2\right)$，因此导出公式

$$e^{-i\lambda \frac{Q^3}{3}+Q^2} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\lambda^{1/3}} e^{-\frac{a^{+2}}{2}} : e^{-a^+a} A_i\left[i\sqrt{2}\lambda^{-1/3}(a^+-a)\right] : e^{-\frac{a^2}{2}}. \tag{37}$$

其中 A_i 是 Airy 函数.

四、若干经典 Weyl 对应函数

由 Wigner 算符的相干态形式可以计算以前无法计算的若干量子算符的经典 Weyl 对应函数，例如算符 $e^{-\lambda a^2}$、$e^{\lambda a^{+2}}$，$e^{-\lambda a^+ a}$，$e^{\lambda PQ}$ 等的经典对应. 这是因为由(8)式可以给出

$$\mathrm{Tr}[\Delta(p_2, q_2)\Delta(p_1, q_1)] = \frac{1}{\pi^2} \int \frac{d^2 z}{\pi} \langle z | e^{2(\rho_2-\rho_1)a^+} e^{2(\rho_1^*-\rho_2^*)a} | z \rangle e^{-2|\rho_1|^2-2|\rho_2|^2+4\rho_1\rho_2^*} = \frac{1}{2\pi} \delta(q_1-q_2)\delta(p_1-p_2). \tag{38}$$

根据(38)式，从 Weyl 对应(1)式立得

$$a(p, q) = 2\pi \mathrm{Tr}[A(P, Q)\Delta(p, q)]. \tag{39}$$

利用(39)、(9)和(16)式可求出算符 $e^{-\lambda a^+ a}$ 的经典对应为

$$
2\pi \mathrm{Tr}[e^{-\lambda a^+ a}\Delta(p, q)] = 2\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(e^{-\lambda}-1)^l}{l!}
$$

$$
\cdot \mathrm{Tr}\left[a^l \int \frac{d^2 z}{\pi} |\rho + z\rangle\langle \rho - z| a^{+l} e^{\rho z^* - z\rho^*}\right]
$$

$$
= 2\int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-(1+e^{-\lambda})|z|^2 + (e^{-\lambda}-1)(\rho^* z - \rho z^* + |\rho|^2)}
$$

$$
= \frac{2}{1+e^{-\lambda}} \exp\left[\frac{(e^{-\lambda}-1)(q^2+p^2)}{1+e^{-\lambda}}\right]. \tag{40}
$$

或

$$
e^{-\lambda a^+ a} \to \frac{2}{1+e^{-\lambda}} \exp\left[\frac{e^{-\lambda}-1}{e^{-\lambda}+1}(p^2+q^2)\right].
$$

可以验证上式的正确性，把(40)式代入(1)式得

$$
\int dp dq \Delta(p, q) \frac{2}{1+e^{-\lambda}} \exp\left[\frac{(e^{-\lambda}-1)(q^2+p^2)}{e^{-\lambda}+1}\right]
$$

$$
= \frac{2}{\pi(1+e^{-\lambda})} : \int dq e^{-\frac{2}{1+e^{-\lambda}}q^2 + \sqrt{2}q(a^+ + a)} \int dp e^{\frac{-2p^2}{1+e^{-\lambda}} + i\sqrt{2}p(a^+ - a) - 2a^+ a} :
$$

$$
= :e^{(e^{-\lambda}-1)a^+ a}: = e^{-\lambda a^+ a}.
$$

显然由(16)式可知求 $a^+ a$ 的经典对应十分简单

$$
2\pi \mathrm{Tr}[a^+ a \Delta(\rho, \rho^*)] = 2\mathrm{Tr}\left[a \int \frac{d^2 z}{\pi} |\rho + z\rangle \langle \rho - z| a^+ e^{\rho z^* - z\rho^*}\right]
$$

$$
= \frac{q^2+p^2}{2} - \frac{1}{2}. \tag{41}
$$

再用(10)和(7)式求 $e^{\lambda a^{+2}}$ 的经典 Weyl 对应可得

$$
2\pi \mathrm{Tr}[e^{\lambda a^{+2}}\Delta(\rho, \rho^*)] = \frac{2}{\pi}\int d^2 z \langle z | e^{\lambda a^{+2} + 2\rho a^+} e^{i\pi N} e^{2\rho^* a} | z\rangle e^{-2|\rho|^2}
$$

$$
= \frac{2}{\pi}\int d^2 z e^{-2|z|^2 + \lambda z^{*2} + 2\rho z^* + 2\rho^* z - 2|\rho|^2} = e^{\lambda \rho^{*2}} = e^{\frac{\lambda}{2}(q-ip)^2}. \tag{42}
$$

或

$$
e^{\lambda a^{+2}} \to \exp\left[\frac{\lambda}{2}(q-ip)^2\right].
$$

同样可导出 $e^{\lambda a^2}$ 的经典对应为

$$
e^{\lambda a^2} \to \exp\left\{\frac{\lambda}{2}(q+ip)^2\right\} \tag{43}
$$

再求算符 $a^{+n}a^m$ 的经典对应可得

$$
2\pi \mathrm{Tr}[a^{+n}a^m \Delta(p, q)] = 2\mathrm{Tr}[a^{+n}a^m e^{2\rho a^+} e^{i\pi N} e^{2\rho^* a} e^{-2|\rho|^2}]
$$

$$
= 2\mathrm{Tr}[a^{+n} e^{2\rho a^+} e^{i\pi N}(2\rho - a)^m e^{2\rho^* a} e^{-2|\rho|^2}]
$$

$$
= \frac{2}{\pi}\int d^2 z e^{-2|z|^2 + 2\rho z^* + 2\rho^* z} z^{*n}(2\rho - z)^m e^{-2|\rho|^2}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(2\rho)^{m-k}(-)^k\int d^2z\, e^{-2|z|^2+2\rho z^*+2\rho^* z-2|\rho|^2} z^k z^{*n} \\
&= \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{\min(k,n)} \frac{m!\,n!\,(-)^k \rho^{*n-l}\rho^{m-l}}{l!(n-l)!(k-l)!(m-k)!\,2^{l-m+k}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n+m}{2}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-)^l n!\,m!\,(q-ip)^{n-l}(q+ip)^{m-l}}{(n-l)!(m-l)!\,l!}.
\end{aligned} \tag{44}
$$

令 $m=0$ 或 $n=0$ 得如下对应

$$
a^{+n} = \left(\frac{Q-iP}{\sqrt{2}}\right)^n \to 2\pi \mathrm{Tr}\, a^{+n}\Delta(p,q) = \left(\frac{q-ip}{\sqrt{2}}\right)^n. \tag{45}
$$

$$
a^{n} = \left(\frac{Q+iP}{\sqrt{2}}\right)^n \to 2\pi \mathrm{Tr}\, a^{n}\Delta(p,q) = \left(\frac{q+ip}{\sqrt{2}}\right)^n. \tag{46}
$$

利用算符公式

$$
e^{\lambda(a^2-a^{+2})/2} = e^{-\frac{a^{+2}}{2}\mathrm{th}\lambda}\, e^{(a^+a+\frac{1}{2})\ln \mathrm{sech}\lambda}\, e^{\frac{a^2}{2}\mathrm{th}\lambda}, \quad \lambda \text{ 实数}. \tag{47}
$$

又可求下列经典对应，由(39)和(16)式得

$$
\begin{aligned}
&2\pi \mathrm{Tr}[e^{\lambda(a^2-a^{+2})/2}\Delta(p,q)] \\
&= 2\sqrt{\mathrm{sech}\,\lambda}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{sech}\,\lambda-1)^l}{l!}\mathrm{Tr}\int d^2z\, a^l e^{\frac{a^2}{2}\mathrm{th}\lambda}|\rho+z\rangle\langle\rho-z|\, e^{-\frac{a^{+2}}{2}\mathrm{th}\lambda} a^{+l} e^{\rho z^*-\rho^* z} \\
&= 2\sqrt{\mathrm{sech}\,\lambda}\exp\left[(\mathrm{sech}\,\lambda-1)|\rho|^2+\frac{1}{2}(\rho^2-\rho^{*2})\mathrm{th}\,\lambda\right] \\
&\quad\cdot\int d^2z \exp\Big\{-(1+\mathrm{sech}\,\lambda)|z|^2+\frac{1}{2}(z^2-z^{*2})\,\mathrm{th}\,\lambda \\
&\quad + [\rho\,\mathrm{th}\,\lambda+\rho^*(\mathrm{sech}\,\lambda-1)]z+[\rho^*\,\mathrm{th}\,\lambda-\rho(\mathrm{sech}\,\lambda-1)]z^*\Big\} \\
&= \pi\sqrt{\frac{2}{1+\mathrm{ch}\,\lambda}}\exp\left[(\rho^2-\rho^{*2})\frac{\mathrm{sh}\,\lambda}{1+\mathrm{ch}\,\lambda}\right] \\
&= \pi\,\mathrm{sech}\,\frac{\lambda}{2}\exp\left(2ipq\,\mathrm{th}\,\frac{\lambda}{2}\right).
\end{aligned} \tag{48}
$$

或

$$
e^{\lambda(a^2-a^{+2})} \to 2\pi \mathrm{Tr}[e^{\lambda(a^2-a^{+2})}\Delta(p,q)] = \pi\,\mathrm{sech}\,\lambda \exp(2ipq\,\mathrm{th}\,\lambda).
$$

在以上推导中用了积分公式

$$
\int\frac{d^2z}{\pi}\, e^{\nu|z|^2+dz+cz^*+fz^2+gz^{*2}} = \frac{1}{\sqrt{\nu^2-4fg}}\exp\left[\frac{-\nu dc+d^2g+c^2f}{\nu^2-4fg}\right],
$$

$$
R_e(\nu+f+g)<0,\quad R_e\frac{\nu^2-4fg}{\nu+f+g}<0;
$$

或

$$
R_e(\nu-f-g)<0,\quad R_e\frac{\nu^2-4fg}{\nu-f-g}<0. \tag{49}
$$

如果算符 C 是算符 A 与 B 的乘积，即 $C=AB$，而且它们的经典 Weyl 函数分别为

$$a(p,q)=2\pi\mathrm{Tr}A\Delta(p,q),\quad b(p,q)=2\pi\mathrm{Tr}B\Delta(p,q),$$
$$C(p,q)=2\pi\mathrm{Tr}C\Delta(p,q). \tag{50}$$

则由 Weyl 对应(1)式可得

$$C(p,q)=2\pi\int dp_1dq_1dp_2dq_2a(p_1q_1)b(p_2q_2)\mathrm{Tr}\Delta(p_1q_1)\Delta(p_2q_2)\Delta(p,q). \tag{51}$$

利用 Baker-Hausdorff 公式可得 Wigner 算符乘积的显示形式

$$\Delta(p_1,q_1)\Delta(p_2q_2)=\frac{1}{\pi^2}e^{2(\rho_1-\rho_2)a^+}e^{-2(\rho_1^*-\rho_2^*)a}\exp(-2|\rho_1|^2-2|\rho_2|^2+4\rho_1^*\rho_2). \tag{52}$$

$$\Delta(p_1q_1)\Delta(p_2q_2)\Delta(pq)=\frac{1}{\pi^3}e^{2(\rho_1-\rho_2+\rho)a^+}(-)^Ne^{2(\rho_1^*-\rho_2^*+\rho^*)a}$$
$$\cdot\exp(-2|\rho_1|^2-2|\rho_2|^2-2|\rho|^2+4\rho_1^*\rho_2-4\rho_1^*\rho+4\rho_2^*\rho). \tag{53}$$

类似极易求得多个 Wigner 算符的乘积，求(53)式的迹

$$t_r\Delta(p_1q_1)\Delta(p_2q_2)\Delta(p,q)=\frac{1}{\pi^4}\int d^2z\langle z|e^{2(\rho_1-\rho_2+\rho)a^+}(-)^N e^{2(\rho_1^*-\rho_2^*+\rho^*)a}|z\rangle$$
$$\cdot\exp(-2|\rho_1|^2-2|\rho_2|^2-2|\rho|^2+4\rho_1^*\rho_2-4\rho_1^*\rho+4\rho_2^*\rho)$$
$$=\frac{1}{2\pi^3}\exp\left\{\frac{2}{i}[p_1(q_2-q)+p_2(q-q_1)+p(q_1-q_2)]\right\}. \tag{54}$$

将(54)式代入(51)式得算符 $C=AB$ 的经典对应为

$$C(p,q)=\frac{1}{\pi^2}\int dp_1dq_1dp_2dq_2a(p_1q_1)a(p_2q_2)$$
$$\cdot\exp\left\{\frac{2}{i}[p_1(q_2-q)+p_2(q-q_1)+p(q_1-q_2)]\right\}. \tag{55}$$

显然，由此进行迭代可以给出 n 个算符乘积的经典 Weyl 函数.

五、若干量子 Weyl 算符

利用 Wigner 算符的正规乘积形式(8)可以把 Weyl 对应改写为正规乘积形式

$$A(a^+,a)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dpdq}{\pi}:e^{-2(a^+-\rho^*)(a-\rho)}:a(p,q) \tag{56}$$

这样就可以直接把经典函数量子化为正规乘积算符，而以前却只能量子化为坐标、动量算符的函数. 更为重要的是利用(56)式可以求出以前无法求出的某些经典函数的量子对应. 例如采用已有文献中的办法很难求出函数 $e^{\lambda pq}$ 的量子对应，因为类型如

$$e^{\frac{i}{2}\frac{\partial^2}{\partial p\partial q}}e^{\lambda pq}$$

的微商很难进行. 现在改用(56)式可以立即导出

$$\int dpdq\Delta(p,q)e^{\lambda pq}=\frac{1}{\pi}:\int dpe^{-p^2+i\sqrt{2}p(a^+-a)}$$
$$\cdot\int dqe^{-q^2+\sqrt{2}q\left(a^++a+\frac{\lambda}{\sqrt{2}}p\right)-2a^+a}:$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4-\lambda^2}} e^{\frac{2i\lambda a^{+2}}{4-\lambda^2}} e^{a^+ a \ln \frac{4+\lambda^2}{4-\lambda^2}} e^{-\frac{2i\lambda}{4-\lambda^2} a^2}. \tag{57}$$

再利用公式(47)得

$$\int dp dq e^{\lambda pq} \Delta(p, q) = \frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}} e^{\left(-i \operatorname{tg}^{-1} \frac{\lambda}{2}\right)(a^2 - a^{+2})}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4+\lambda^2}} e^{(PQ+QP)\operatorname{tg}^{-1}\frac{\lambda}{2}}. \tag{58}$$

再求经典函数 $q^n e^{\lambda p^2}$ 的 Weyl 对应算符，由(56)得

$$\int dp dq \Delta(p, q) q^n e^{\lambda p^2}$$

$$= \frac{1}{\pi} : \int dp e^{-(1-\lambda)p^2 + i\sqrt{2} p(a^+ - a)} \int dq e^{-q^2 + \sqrt{2} q(a^+ - a) - 2a^+ a} q^n :$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} e^{-\frac{\lambda a^{+2}}{2(1-\lambda)}} : e^{\frac{\lambda a^+ a}{1-\lambda}} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!}{k!(n-2k)!} \left(\frac{a+a^+}{\sqrt{2}}\right)^{n-2k}$$

$$\cdot \frac{1}{2^{2k}} : e^{-\frac{\lambda a^2}{2(\lambda-1)}}. \tag{59}$$

其中 $\mathrm{Re}\lambda < 1$. 同样的方法可以求出 $p^n e^{\lambda q^2}$ 的量子对应

$$\int dp dq \Delta(p, q) p^n e^{\lambda q^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}} e^{\frac{\lambda a^{+2}}{2(1-\lambda)}} : e^{\frac{\lambda a^+ a}{1-\lambda}} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!(-i)^{n-2k}}{k!(n-2k)! 2^{2k}}$$

$$\cdot \left(\frac{a-a^+}{\sqrt{2}}\right)^{n-2k} : e^{\frac{\lambda a^2}{2(1-\lambda)}}. \tag{60}$$

再求经典函数 $\exp[\lambda(p^2+q^2)]$ 的量子对应得

$$\int dp dq \Delta(p, q) e^{\lambda(p^2+q^2)} = \int \frac{dp dq}{\pi} : e^{-(1-\lambda)q^2 + \sqrt{2} q(a+a^+) - (1-\lambda)p^2 + i\sqrt{2} p(a^+ - a) - 2a^+ a} :$$

$$= \frac{1}{1-\lambda} e^{a^+ a \ln \frac{1+\lambda}{1-\lambda}}, \quad \mathrm{Re}\lambda < 1. \tag{61}$$

特别在上式中取 $\lambda = \frac{1}{2}$ 得

$$\int dp dq \Delta(p, q) e^{\frac{p^2+q^2}{2}} = 2 : e^{2a^+ a} : = 2 e^{\left(\frac{P^2+Q^2}{2} - \frac{1}{2}\right)\ln 3}. \tag{62}$$

六、Moyal 定理的相干态推广

本节用 Wigner 算符的显示形式来给出 Moyal 定理的相干态推广，恢复 $\hbar$ 后的 Wigner 算符是

$$\Delta(p, q) = \frac{1}{\pi\hbar} : \exp\left\{-2\left(a^+ - \frac{q - ip}{\sqrt{2\hbar}}\right)\left(a - \frac{q + ip}{\sqrt{2\hbar}}\right)\right\} : \tag{63}$$

取其相干态平均值得

$$\langle \bar{z}|\Delta(p,q)|\bar{z}\rangle = \frac{1}{\pi\hbar}\exp\left\{-2\left(\bar{z}^* - \frac{q-ip}{\sqrt{2\hbar}}\right)\left(\bar{z} - \frac{q+ip}{\sqrt{2\hbar}}\right)\right\}. \tag{64}$$

代入(1)式得任意算符 A 的相干态平均值

$$\begin{aligned}\langle \bar{z}|A|\bar{z}\rangle &= \int dpdq\langle \bar{z}|\Delta(p,q)|\bar{z}\rangle a(p,q)\\ &= \int\frac{dpdq}{\pi\hbar}\exp\{-(q-\bar{q}^2)/\hbar - (p-\bar{p})^2/\hbar\}a(p,q).\end{aligned} \tag{65}$$

其中 $\frac{\bar{q}+i\bar{p}}{\sqrt{2\hbar}} \equiv \bar{z}$. 当 $\hbar\to 0$ 时利用公式

$$\lim_{\hbar\to 0}\frac{e^{-x^2/\hbar}}{\sqrt{\pi\hbar}} = \delta(x). \tag{66}$$

得(65)式的经典极限

$$\begin{aligned}\lim_{\hbar\to 0}\langle \bar{z}|A|\bar{z}\rangle &= \int dpdq\delta(q-\bar{q})\delta(p-\bar{p})a(p,q) = a(\bar{p},\bar{q}),\\ \bar{z} &= \frac{\bar{q}+i\bar{p}}{\sqrt{2\hbar}}.\end{aligned} \tag{67}$$

由此得出重要结论，任何一个算符的相干态平均值当普朗克常数趋于零时即为该算符的经典 Weyl 对应函数。由(52)式求相干态平均并恢复 $\hbar$ 即得

$$\begin{aligned}\langle \bar{z}|\Delta_1\Delta_2|\bar{z}\rangle = \frac{1}{\pi^2\hbar^2}\exp\Bigg\{&\sqrt{\frac{2}{\hbar}}[(q_1-q_2)+i(p_1-p_2)]\bar{z}^*\\ &-\sqrt{\frac{2}{\hbar}}[(q_1-q_2)-i(p_1-p_2)]\bar{z}\\ &-\frac{(p_1-p_2)^2+(q_1-q_2)^2}{\hbar}+2i\frac{p_2q_1-p_1q_2}{\hbar}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{68}$$

作变数变换

$$\begin{aligned} p &= p_1 - p_2, \qquad \underline{p} = \frac{p_1+p_2}{2};\\ q &= q_1 - q_2, \qquad \underline{q} = \frac{q_1+q_2}{2}.\end{aligned} \tag{69}$$

上式变为

$$\begin{aligned}\langle \bar{z}|\Delta_1\Delta_2|\bar{z}\rangle = \frac{1}{\pi^2\hbar^2}\exp\{\{&-[p-i(\bar{q}-\underline{q})]^2-(\bar{q}-\underline{q})^2\\ &-[q-i(\underline{p}-\bar{p})]^2-(\underline{p}-\bar{p})^2\}/\hbar\}\end{aligned} \tag{70}$$

由此导出算符乘积的相干态平均

$$\begin{aligned}\langle \bar{z}|AB|\bar{z}\rangle = \int\frac{d\underline{p}d\underline{q}dpdq}{\pi^2\hbar^2}\exp\{\{&-(\underline{p}-\bar{p})^2-(\underline{q}-\bar{q})^2-[p-i(\bar{q}-\underline{q})]^2\\ &-[q-i(\underline{p}-\bar{p})]^2\}/\hbar\}\end{aligned}$$

$$\cdot\, a\left(\underline{p}+\frac{p}{2},\ \underline{q}+\frac{q}{2}\right) b\left(\underline{p}-\frac{p}{2},\ \underline{q}-\frac{q}{2}\right)$$

$$=\int\frac{d\underline{p}d\underline{q}dpdq}{\pi^2\hbar^2}\exp[(-\underline{p}^2-\underline{q}^2-p^2-q^2)/\hbar]$$

$$\cdot\, a\left(\underline{p}+\bar{p}+\frac{p-i\underline{q}}{2},\ \underline{q}+\bar{q}+\frac{q+i\underline{p}}{2}\right)$$

$$\cdot\, b\left(\underline{p}+\bar{p}-\frac{p-i\underline{q}}{2},\ \underline{q}+\bar{q}-\frac{q+i\underline{p}}{2}\right). \tag{71}$$

因此量子括号的相干态平均值为

$$\langle\bar{z}|[A,B]|\bar{z}\rangle=\int\frac{d\underline{p}d\underline{q}dpdq}{\pi^2\hbar^2}e^{-(\underline{p}^2+\underline{q}^2+p^2+q^2)/\hbar}$$

$$\cdot\left\{a\left(\underline{p}+\frac{p}{2}+\bar{p}-\frac{i}{2}\underline{q},\ \underline{q}+\frac{q}{2}+\bar{q}+\frac{i}{2}\underline{p}\right)\right.$$

$$\cdot\, b\left(\underline{p}-\frac{p}{2}+\bar{p}+\frac{i}{2}\underline{q},\ \underline{q}-\frac{q}{2}+\bar{q}-\frac{i}{2}\underline{p}\right)$$

$$-\,a\left(\underline{p}+\frac{p}{2}+\bar{p}+\frac{i}{2}\underline{q},\ \underline{q}+\frac{q}{2}+\bar{q}-\frac{i}{2}\underline{p}\right)$$

$$\left.\cdot\, b\left(\underline{p}-\frac{p}{2}+\bar{p}-\frac{i}{2}\underline{q},\ \underline{q}-\frac{q}{2}+\bar{q}+\frac{i}{2}\underline{p}\right)\right\}. \tag{72}$$

当 $\hbar\to 0$ 时得量子括号相干态平均值的经典极限

$$\langle\bar{z}|\frac{[A,B]}{i\hbar}|\bar{z}\rangle=\int\frac{d\underline{p}d\underline{q}dpdq}{\pi^2\hbar^3}e^{-(\underline{p}^2+\underline{q}^2+p^2+q^2)/\hbar}\left\{a\left(\underline{p}+\frac{p}{2}\right.\right.$$

$$\left.+\bar{p},\ \underline{q}+\frac{q}{2}+\bar{q}\right)\left[\frac{\partial b\left(\underline{p}-\frac{p}{2}+\bar{p},\ \underline{q}-\frac{q}{2}+\bar{q}\right)}{\partial p_2}\underline{q}\right.$$

$$\left.-\frac{\partial b\left(\underline{p}-\frac{p}{2}+\bar{p},\ \underline{q}-\frac{q}{2}+\bar{q}\right)}{\partial q_2}\underline{p}\right]$$

$$-\,b\left(\underline{p}-\frac{p}{2}+\bar{p},\ \underline{q}-\frac{q}{2}+\bar{q}\right)\left[\frac{\partial a\left(\underline{p}+\frac{p}{2}+\bar{p},\ \underline{q}+\frac{q}{2}+\bar{q}\right)}{\partial p_1}\underline{q}\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\partial a\left(\underline{p}+\frac{p}{2}+\bar{p},\ \underline{q}+\frac{q}{2}+\bar{q}\right)}{\partial q_1}\underline{p}\right]\right\}. \tag{73}$$

利用以下关系

$$\underline{q}e^{-\underline{q}^2/\hbar}=-\frac{\hbar}{2}\frac{d}{d\underline{q}}e^{-\underline{q}^2/\hbar},\quad \underline{p}e^{-\underline{p}^2/\hbar}=-\frac{\hbar}{2}\frac{d}{d\underline{p}}e^{-\underline{p}^2/\hbar}. \tag{74}$$

则上式变为

$$
\begin{aligned}
\left\langle \bar{z}\left|\frac{[A,\ B]}{i\hbar}\right|\bar{z}\right\rangle = {} & \frac{1}{2}\int \frac{d\underline{p}d\underline{q}dpdq}{\pi^2\hbar^2}\, e^{-(\underline{p}^2+\underline{q}^2+p^2+q^2)/\hbar} \\
& \Bigg\{\frac{\partial}{\partial \underline{q}}\Bigg[a\left(\underline{p}+\frac{p}{2}+\bar{p},\ \underline{q}+\frac{q}{2}+\bar{q}\right)\frac{\partial b\left(\underline{p}-\frac{p}{2}+\bar{p},\ \underline{q}-\frac{q}{2}+\bar{q}\right)}{\partial p_2} \\
& -b\left(\underline{p}-\frac{p}{2}+\bar{p},\ \underline{q}-\frac{q}{2}+\bar{q}\right)\frac{\partial a\left(\underline{p}+\frac{p}{2}+\bar{p},\ \underline{q}+\frac{q}{2}+\bar{q}\right)}{\partial p_1}\Bigg] \\
& +\frac{\partial}{\partial \underline{p}}\Bigg[b\left(\underline{p}-\frac{p}{2}+\bar{p},\ \underline{q}-\frac{q}{2}+\bar{q}\right)\frac{\partial a\left(\underline{p}+\frac{p}{2}+\bar{p},\ \underline{q}+\frac{q}{2}+\bar{q}\right)}{\partial q_1} \\
& -a\left(\underline{p}+\frac{p}{2}+\bar{p},\ \underline{q}+\frac{q}{2}+\bar{q}\right)\frac{\partial b\left(\underline{p}-\frac{p}{2}+\bar{p},\ \underline{q}-\frac{q}{2}+\bar{q}\right)}{\partial q_2}\Bigg]\Bigg\} \\
= {} & \left[\frac{\partial a(\bar{p},\bar{q})}{\partial \bar{q}}\frac{\partial b(\bar{p},\bar{q})}{\partial \bar{p}} - \frac{\partial b(\bar{p},\bar{q})}{\partial \bar{q}}\frac{\partial a(\bar{p},\bar{q})}{\partial \bar{p}}\right].
\end{aligned}
\tag{75}
$$

于是我们又得到一个重要结论,即两个算符的量子对易括号的相干态平均值,当 $\hbar\to 0$ 时等于这两个算符的经典 Weyl 对应函数的泊松括号. 在以往的文献中[4],虽然已经指出量子括号与经典泊松括号的关联,但并未涉及到量子括号的相干态平均值与经典 Weyl 函数的泊松括号的联系. 因此我们称(75)式为 Moyal 定理的相干态推广.

七、若干相空间分布函数

用 Wigner 算符的正规乘积形式可以简洁地求出若干相空间分布函数,例如从它直接给出极小测不准波包的相空间分布函数. 设系统处于纯相干态 $|z\rangle$,定义密度矩阵

$$\sigma(a,\ a^+) = |z\rangle\langle z|. \tag{76}$$

则由密度矩阵和 c 数分布函数的一般关系

$$W(p,\ q) = \frac{1}{4\pi^2}\iint du dv\, e^{ipu+iqv}\,\mathrm{Tr}(e^{-iuP-ivQ}\sigma). \tag{77}$$

得到

$$W(p,q) = \langle z|\Delta(p,q)|z\rangle = \frac{1}{\pi}\exp\left[-\frac{(q-\langle Q\rangle)^2}{2(\Delta Q)^2} - \frac{(p-\langle P\rangle)^2}{2(\Delta P)^2}\right]. \tag{78}$$

其中用到了关系式

$$\langle Q\rangle \equiv \langle z|Q|z\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}\,(z+z^*),$$

$$\langle P\rangle = i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}\,(z^*-z),$$

$$(\Delta Q)^2 = (\Delta P)^2 = \frac{\hbar}{2}.$$

其次求谐振子相空间的本征函数，由(2)式其定义为

$$f_{k,n}(p, q) = \frac{1}{2\pi}\int u_k^*\left(q - \frac{u}{2}\right) e^{-iup} u_n\left(q + \frac{u}{2}\right) du. \tag{79}$$

其中 u_n, u_k 是谐振子本征函数，利用(10)式立刻可得

$$f_{kn}(p, q) = \langle k|\Delta(p, q)|n\rangle = \frac{1}{\pi}\langle k|e^{2\rho a^+ - 2\rho^* a}|n\rangle (-)^n$$
$$= \frac{(-)^n}{\pi}\sqrt{\frac{n!}{k!}}(2\rho)^{k-n} e^{-\frac{|2\rho|^2}{2}} L_n^{(k-n)}(2|\rho|^2). \tag{80}$$

其中 $L_n^{(k-n)}$ 是伴随 Laguerre 多项式。 Moyal 等人[8]曾用其他方法计算过 f_{kn}，但比起我们的方法要复杂。

我们可以把 c 数分布函数(77)改写为下列形式

$$W(\rho, \rho^*) = 2W(p, q) = \pi^{-2}\int e^{\beta^*\rho - \beta\rho^*}\mathrm{Tr}(e^{\beta a^+} e^{-\beta^* a}\sigma) e^{-|\beta|^2/2} d^2\beta,$$
$$\beta \equiv \frac{u - iv}{\sqrt{2}} \tag{81}$$

则由于密度矩阵一般总可以展开为下列 Taylor 级数

$$\sigma = \sum_{n,m} C_{nm} a^n a^{+m}. \tag{82}$$

所以用(8)式我们可以求出一般形式密度矩阵的 $W(\rho, \rho^*)$ 为

$$W(\rho, \rho^*) = \frac{1}{\pi^2}\int e^{\beta^*\rho - \beta\rho^*}\mathrm{Tr}\left[e^{\beta a^+} e^{-\beta^* a}\int\frac{1}{\pi}\sum_{n,m} C_{mn} z^n z^{*m}|z\rangle\langle z|d^2 z\right] e^{-|\beta|^2/2} d^2\beta$$
$$= \frac{2}{\pi^2}\sum_{n,m} C_{nm}\int d^2 z\, e^{-2(z^* - \rho^*)(z - \rho)} z^n z^{*m}$$
$$= \frac{1}{\pi^2}\sum_{n,m} C_{nm}\sum_{l=0}^{\min(m, n)}\frac{m!\,n!\,\rho^{*m-l}\rho^{n-l}}{l!(m-l)!(n-l)!\,2^l}. \tag{83}$$

在推导中应用了数学公式

$$\int\frac{d^2 z}{\pi} z^n z^{*m} e^{\nu|z|^2 + dz + cz^*}$$
$$= e^{-dc/\nu}\sum_{l=0}^{\min(m, n)}\frac{m!\,n!\,d^{m-l}c^{n-l}}{l!(m-l)!(n-l)!\,(-\nu)^{m+n+1-l}}, \quad \mathrm{Re}\,\nu < 0. \tag{84}$$

八、广义 Wigner 算符的正规乘积形式

如果用一般的对应方案[9]代替 Weyl 对应[7]，即取

$$A^{(\alpha)}(P, Q) = \frac{1}{2\pi}\iint\left|q + \left(\frac{1}{2} + \alpha\right)v\right\rangle\left\langle q - \left(\frac{1}{2} - \alpha\right)v\right| a(p, q) e^{ipv}\, dv\,dp\,dq. \tag{85}$$

来代替(2)式. 则有以下关系

$$a^{(\alpha)}(p,q)=\int\left\langle p+\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)u\right|A(P,Q)\left|p-\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)u\right\rangle e^{iqu}du. \tag{86}$$

$$pq\longleftrightarrow\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)PQ+\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)QP. \tag{87}$$

$$\Delta^{(\alpha)}(p,q)=\frac{1}{2\pi}\int\left|q+\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)v\right\rangle\left\langle q-\left(\frac{1}{2}-\alpha\right)v\right|e^{ipv}dv. \tag{88}$$

这称为广义 Wigner 算符,用正规乘积下的积分法可以求出它的明显算符形式为

$$\begin{aligned}\Delta^{(\alpha)}(p,q)&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dudv}{4\pi^2}e^{i[(q-Q)v+(p-P)u]}e^{ivu\alpha}\\&=\frac{1}{4\pi^2}\int dudv:e^{\frac{u-iv}{\sqrt{2}}a^+}e^{-\frac{u+iv}{\sqrt{2}}a}:e^{-\frac{u^2+v^2}{4}+iuv\alpha+iqv+ipu}\\&=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{1}{1+4\alpha^2}}:e^{\frac{(a^+-a)^2}{2}+\frac{\left[i\sqrt{2}\,\alpha(a^+-a)-\frac{i}{\sqrt{2}}(a^++a)+iq-2\alpha p\right]^2}{1+4\alpha^2}+\sqrt{2}\,ip(a^+-a)-p^2}:.\end{aligned} \tag{89}$$

特别当 $\alpha=0$ 时，上式还原为 Wigner 算符的正规乘积形式. 可以导出 Wigner 算符的另一形式

$$\begin{aligned}\Delta(p,q)&=\int\frac{dudv}{4\pi^2}:e^{i(P-p)u+i(Q-q)v-\frac{u^2+v^2}{4}}:\\&=e^{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2}+\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)}:\int\frac{dudv}{4\pi^2}e^{i(P-p)u+i(Q-q)v}:=e^{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2}+\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)}:\delta(p-P)\delta(q-Q):.\end{aligned} \tag{90}$$

这时由 Weyl 对应得

$$A(P,Q)=:e^{\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2}+\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)}a(p,q)\Big|_{p=\frac{a-a^+}{\sqrt{2}},\ q=\frac{a+a^+}{\sqrt{2}}}:. \tag{91}$$

以上各节讨论表明用 Wigner 算符的新形式可以对量子力学与经典力学的对应关系有更深入的了解,即给出以前不能得到的一系列对应关系.

附录: 一般可以证明，若有

$$f^n=\sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{n!}{m!(n-2m)!}\frac{1}{2^m}g^{n-2m} \tag{A.1}$$

则有 $g^n=\sum_{m=0}^{[n/2]}\frac{n!}{m!(n-2m)!}(-)^m\frac{1}{2^m}f^{n-2m}$ 成立. (A.2)

证: 不失一般性,若 n 是偶数(当 n 是奇数时,证明类似)定义

$$a_{m,2n}\equiv\frac{2n!}{m!(2n-2m)!2^m},\qquad f^{2n}=\sum_{m=0}^{n}a_{m,2n}g^{2n-2m}$$

则

$$(\text{A.2})\ \text{右边} = \sum_{m=0}^{n} a_{m,2n}(-)^m f^{2n-2m} = \sum_{m=0}^{n} a_{m,2n}(-)^m \sum_{K=0}^{n-m} a_{K,2(n-m)} g^{2(n-m-K)}$$

其中:
$$a_{m,2n}a_{K,2(n-m)} = \frac{(2n)!}{m!(2n-2m-2K)!K!2^{m+K}}$$

利用:
$$\sum_{m=0}^{n}\sum_{K=0}^{n-m} \chi_{m,K} = \sum_{l=0}^{n}\sum_{m=0}^{l} \chi_{m,l-m}$$

则:
$$(\text{A.2})\ \text{右边} = \sum_{l=0}^{n}\sum_{m=0}^{l} \frac{(2n)!(-)^m g^{2(n-m-l+m)}}{m!(l-m)!(2n-2l)!2^l}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{2^l} g^{2(n-l)} \frac{(2n)!}{(2n-2l)!l!} \sum_{m=0}^{l} \frac{l!(-)^m}{m!(l-m)!} + g^{2n}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \frac{g^{2(n-l)}(2n)!}{2^l(2n-2l)!} \frac{(1-1)^l}{l!} + g^{2n} = g^{2n}.$$

参 考 文 献

[1] McCoy, N. H., *Proc. Nati. Acad. Sci.*, **18**(1932), 674.
[2] Weyl, H., *Z. Physik*, **46**(1927), 1.
Weyl, H., The Theory of Groups and Quantum Mechanics (Dover Publications, New York, 1950)
[3] Wigner, E. P., *Phys. Rev.*, **40**(1932), 749.
O'Connel, R. F. and Wigner, E. P., *Phys. Lett.*, **83A**(1981), 145.
[4] Moyal, J. E., *Proc. Cambridge Phys.*, **19**(1949), 99.
[5] Glauber, R. G., *Phys. Rev.*, **131**(1963), 2766.
[6] Louisell, W. H., Quantum Statistical Properties of Radiation, John Wiley (1973) 156.
[7] Mizrahi, M. M., *Jour. Math. Phys.*, **16**(1975), 2201.
[8] Moyal, J., E. el, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **45** (1949), 545.
[9] Tarō Kashiwa, *Prog. Theor. Phys.*, **64**, No. 6, (1980), 2164.

SOME APPLICATIONS OF COHERENT STATE FORMULATION OF THE WIGNER OPERATOR

FAN HONG-YI　　RUAN TU-NAN

(University of Science and Technology of China)

ABSTRACT

In this paper both the normal product form and the coherent state form of the Wigner operator are derived. Furthermore, the applications of the new forms of the Wigner operator are also presented, which are involved in deriving some new quantum operator formulas, in the coherent state generalization of the Moyal theorem, and in evaluating some quantum operators which corresponds to the given classical functions in the Weyl manner and vice versa.