第8卷 第4期 高能物理与核物理 Vol. 8, No. 4
1984年7月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS July, 1984

$SU(3)$ 电荷、超荷相干态和颜色量子数

范洪义 阮图南
(中国科学技术大学)

摘 要

本文首先把有确定 Abel 荷的相干态推广到有确定 non-Abel 荷的情况，建立了玻色子和费米子两种情况下的 $SU(3)$ 电荷、超荷相干态. 这样自然得到了分数电荷、超荷的夸克相干态. 为了得到整数电荷、超荷的强子相干态，必须引入颜色自由度，进而讨论 $SU(6)\otimes SU_c(3)$ 的情况.

一、引 言

继 Glauber[1] 提出玻色子相干态后，不少人对推广相干态的概念作了尝试. 1976 年 Bhaumik 等[2]建立了有确定 Abel 荷的玻色子相干态. 本文第二节中我们尝试把带 Abel 荷的情况推广到带 non-Abel 荷的情况，例如建立 $SU(3)$ 电荷、超荷玻色子相干态. 这是由于三维谐振子具 $SO(3)$ 群更大的对称性即 $SU(3)$ 对称性，因此在 $SU(3)$ 群的三维谐振子表示中电荷、超荷算符与三模式湮灭算符对易. 进一步考虑到夸克是费米子，因此文中又引入 Grassmann 数建立了 $SU(3)$ 电荷、超荷费米子相干态，即得到了分数电荷、超荷的夸克相干态. 计算还表明，如果不引入颜色自由度，将得不到有整数荷的强子态，为此文中又研究了 $SU(6)\otimes SU_c(3)$ 费米子相干态. 在第五节中我们对带电费米子相干态也作了讨论.

二、$SU(3)$ 电荷、超荷相干态——玻色情况

为了构造 $SU(3)$ 电荷、超荷相干态，先要用三维各向同性谐振子来表示 $SU(3)$ 群. 引入记号

$$a=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \quad a^+=(a_1^+a_2^+a_3^+) \tag{1}$$

它们满足对易关系

$$[a_\alpha, a_\beta^+]=\delta_{\alpha\beta}, \ (\alpha, \beta=1, 2, 3) \tag{2}$$

本文 1983 年 7 月 5 日收到.

设 $SU(3)$ 生成元的谐振子表示为

$$S^i = a^+\lambda^i a,\quad (i = 1, 2, \cdots 8) \tag{3}$$

式中 λ^i 是 Gell-mann 矩阵，满足对易关系

$$[\lambda^i, \lambda^j] = 2if^{ijk}\lambda^k, \tag{4}$$

由此给出生成元的显式

$$\begin{aligned}
&S^1 = a_1^+a_2 + a_2^+a_1,\quad S^2 = -ia_1^+a_2 + ia_2^+a_1\\
&S^3 = a_1^+a_1 - a_2^+a_2,\quad S^4 = a_1^+a_3 + a_3^+a_1,\\
&S^5 = -ia_1^+a_3 + ia_3^+a_1,\quad S^6 = a_2^+a_3 + a_3^+a_2,\\
&S^7 = -ia_2^+a_3 + ia_3^+a_2,\quad S^8 = \frac{1}{\sqrt{3}}(a_1^+a_1 + a_2^+a_2 - 2a_3^+a_3).
\end{aligned} \tag{5}$$

电荷 Q 与超荷 Y 的生成元分别表示为

$$Q = \frac{1}{2}S^3 + \frac{1}{2\sqrt{3}}S^8 = \frac{1}{3}(2a_1^+a_1 - a_2^+a_2 - a_3^+a_3). \tag{6}$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}}S^8 = \frac{1}{3}(a_1^+a_1 + a_2^+a_2 - 2a_3^+a_3). \tag{7}$$

上可以建立 $SU(3)$ 电荷、超荷相干态．设三类量子 a_1, a_2, a_3 分别带电荷 $\frac{2}{3}$，$-\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{3}$，带超荷 $\frac{1}{3}$，$\frac{1}{3}$，$-\frac{2}{3}$，则利用对易关系(2)极易证明算符 Q，Y 和 $a_1a_2a_3$ 相互对易，即

$$[Q, a_1a_2a_3] = 0,\quad [Y, a_1a_2a_3] = 0,\quad [Q, Y] = 0. \tag{8}$$

因此 Q、Y 与 $a_1a_2a_3$ 有共同的本征态，记为 $|zyq\rangle$，即

$$Q|zyq\rangle = q|zyq\rangle,\quad Y|zyq\rangle = y|zyq\rangle. \tag{9}$$

$$a_1a_2a_3|zyq\rangle = z|zyq\rangle. \tag{10}$$

把 $|zyq\rangle$ 按三维谐振子完备基 $|m\rangle\otimes|n\rangle\otimes|l\rangle$ 展开得

$$|zyq\rangle = \sum_{mnl} C_{mnl}|mnl\rangle. \tag{11}$$

把 $a_1a_2a_3$ 作用于(16)式得

$$a_1a_2a_3|zyq\rangle = \sum_{mnl} C_{m+1\ n+1\ l+1}\sqrt{(m+1)(n+1)(l+1)}\,|mnl\rangle. \tag{12}$$

与(15)式比较得到 C_{mnl} 的递推关系

$$C_{mnl} = \frac{z}{\sqrt{mnl}}C_{m-1n-1l-1} = \frac{z^l C_{m-l\ \ n-l\ \ 0}}{\sqrt{l!m\cdots(m-l+1)n\cdots(n-l+1)}} \tag{13}$$

另外由 (9) 式得

$$n = l + 2y - q,\quad m = l + y + q. \tag{14}$$

因此相干态的粒子表象为

$$|zyq\rangle = N_{qy}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^l}{[l!(l+y+q)!(l+2y-q)!]^{1/2}}\,|l+y+q\ \ l+2y-q\ \ l\rangle. \tag{15}$$

其中的归一化系数 N_{qy} 可取为

$$N_{qy}=\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(|z|^2)^l}{l!(l+y+q)!(l+2y-q)!}\right]^{-1/2}. \tag{16}$$

显然它属于 ${}_0F_2$ 型的超几何级数. 同位旋第三分量 T_3 的谐振子表示可由 Gell-mann-Nishijima 规则得到

$$T_3=Q-Y/2 \tag{17}$$

它在相干态(15)的本征值为 $t_3=q-y/2$.

另一种导出 $SU(3)$ 电荷、超荷相干态的方法是用相因子积分法. 注意到如下的三模式相干态

$$|\alpha\beta\gamma\rangle=\exp(\alpha a_1^++\beta a_2^++\gamma a_3^+)|0\rangle \tag{18}$$

这个相干态并没有确定的电荷和超荷. 一般而言，相干态中包含了不同数目的量子的态的迭加，这些量子是相位同步的. 如果这些量子具有某个绝对守恒荷 Q 与 Y，则不同 q，y 值的态就不可相干迭加. 因此要建立带电荷、超荷的 SU_3 相干态，具体做法是令

$$\alpha=\lambda_1e^{i(\theta+2\varphi+\psi)},\quad \beta=\lambda_2e^{i(\theta-\varphi+\psi)},\quad \gamma=\lambda_3e^{i(\theta-\varphi-2\psi)}. \tag{19}$$

然后在相干态 $|\alpha\beta\gamma\rangle$ 上乘以电荷、超荷相因子积分，则从(18)和(19)式得

$$\begin{aligned}|\lambda_1\lambda_2\lambda_3\theta yq\rangle&=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{2\pi}d\psi e^{-3iq\varphi}e^{-3iy\psi}|\alpha\beta\gamma\rangle\\&=\sum_l\exp[3i\theta(l+y)]\frac{\lambda_1^{l+y+q}\lambda_2^{l+2y-q}\lambda_3^{l}}{\sqrt{l!(l+y+q)!(l+2y-q)!}}\\&\quad|l+y+q\quad l+2y-q\quad l\rangle.\end{aligned}$$

令 $z=\lambda_1\lambda_2\lambda_3e^{-i\theta}$，则上式变成

$$|\lambda_1\lambda_2\lambda_3\theta yq\rangle=e^{3iy\theta}\lambda_1^{y+q}\lambda_2^{2y-q}\sum_l\frac{z^l|l+y+q\ \ l+2y-q\ \ l\rangle}{[l!(l+y+q)!(l+2y-q)!]^{1/2}}. \tag{20}$$

显然上式与(15)式只差一个常数因子. 注意在推导中我们要求 $3q$ 与 $3y$ 是整数. 由(15)和(10)式可见，$SU(3)$ 电荷、超荷相干态是在迭加态中各移去一个量子后使得总电荷、总超荷保持不变. 根据相干态(15)可以读出重子的夸克内容. 例如某粒子的 $q=1$，$y=1$，则由(15)式得

$$|z11\rangle=N_{11}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{z^l}{[l!(l+1)!(l+2)!]^{1/2}}|l+2\ \ l+1\ \ l\rangle. \tag{21}$$

如果采用 Schwinger 和 Merzbacher[3] 关于自旋玻色子的观点，则上式右边表明质子的夸克内容是 uud.

为了考察 $SU(3)$ 电荷、超荷相干态的经典对应，可把产生、湮灭算符化为坐标、动量算符

$$x_\alpha=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_\alpha^++a_\alpha),\quad P_\alpha=i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{2}}(a_\alpha^+-a_\alpha). \tag{22}$$

并引入

$$H_\alpha=\frac{P_\alpha^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x_\alpha^2,\quad(\alpha=1,2,3). \tag{23}$$

则电荷、超荷算符可以改写为

$$Q=\frac{2H_1-H_2-H_3}{3\hbar\omega},\quad Y=\frac{H_1+H_2-2H_3}{3\hbar\omega}. \tag{24}$$

由本征方程 (9) 求其相干态平均值得

$$\langle zyq|2H_1-H_2-H_3|zyq\rangle=3\hbar\omega q. \tag{25}$$

$$\langle zyq|H_1+H_2-2H_3|zyq\rangle=3\hbar\omega y. \tag{26}$$

定义谐振子能量的相干态平均值

$$E_\alpha=\langle zyq|H_\alpha|zyq\rangle.\quad (\alpha=1,2,3). \tag{27}$$

显然 E_α 应该类比于经典谐振子能量．代入(25)和(26)式得

$$2E_1-E_2-E_3=3\hbar\omega q,\ E_1+E_2-2E_3=3\hbar\omega y. \tag{28}$$

这表明具有确定电荷、超荷相干态的经典类比是一种特殊的经典谐振子系统，它的能量必须遵从条件(28)式，并由于 $\hbar$ 的出现，因此属于一级量子效应．引进经典母函数

$$F(x,X)=\frac{1}{2}m\omega\sum_{\alpha=1}^{3}x_\alpha^2\operatorname{ctg}X_\alpha. \tag{29}$$

并作正则变换

$$p_\alpha=\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}=m\omega x_\alpha\operatorname{ctg}X_\alpha,\ P_\alpha=-\frac{\partial F}{\partial X_\alpha}=\frac{1}{2}m\omega x_\alpha^2\csc^2X_\alpha. \tag{30}$$

则变换后的经典谐振子哈密顿量为

$$H=H_1+H_2+H_3=\omega(P_1+P_2+P_3). \tag{31}$$

条件(28)式变为

$$2P_1-P_2-P_3=3\hbar q,\quad P_1+P_2-2P_3=3\hbar y. \tag{32}$$

求解(30)式可得

$$X_\alpha=\operatorname{tg}^{-1}\frac{m\omega x_\alpha}{p_\alpha},\quad P_\alpha=\frac{p_\alpha^2}{2m\omega}+\frac{1}{2}m\omega x_\alpha^2 \tag{33}$$

显然 P_α 在量子化后变为算符 $\left(a_\alpha^+a_\alpha+\frac{1}{2}\right)\hbar$，相当于作用量，则与之正则共轭量 X_α 在量子化后应相当于位相算符．

三、SU(3) 电荷、超荷相干态——费米情况

以上讨论的 SU(3) 群的谐振子表示是玻色性的．由于夸克是费米子，因此本节讨论 SU(3) 群的费米表示．引进生成元

$$G^i=b^+\lambda^ib, \tag{34}$$

其中 b^+ 和 b 分别代表三个夸克算符的行矢量和列矢量

$$b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix},\quad b^+=(b_1^+b_2^+b_3^+)$$

它们满足反对易关系

$$\{b_\alpha,b_\beta^+\}=\delta_{\alpha\beta},\quad(\alpha,\beta=1,2,3) \tag{35}$$

利用算符恒等式

$$[A, BC] = \{A, B\}C - B\{A, C\}. \tag{36}$$

可以证明表示的对易关系

$$[G^i, G^j] = 2if^{ijk}G^k. \tag{37}$$

类似 (6)式和(7) 式引进电荷、超荷算符

$$Q = \frac{1}{2}G^3 + \frac{1}{2\sqrt{3}}G^8 = \frac{1}{3}(2b_1^+b_1 - b_2^+b_2 - b_3^+b_3). \tag{38}$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}}G^8 = \frac{1}{3}(b_1^+b_1 + b_2^+b_2 - 2b_3^+b_3). \tag{39}$$

则可以证明 Q、Y 与消灭算符的乘积 $b_1b_2b_3$ 对易，即

$$[Q, b_1b_2b_3] = 0, \ [Y, b_1b_2b_3] = 0, \ [Q, Y] = 0. \tag{40}$$

因此 Q, Y 与 $b_1b_2b_3$ 有共同的本征态，记为 $|qy\xi\rangle$，即

$$Q|qy\xi\rangle = q|qy\xi\rangle \tag{41}$$

$$Y|qy\xi\rangle = y|qy\xi\rangle \tag{42}$$

$$b_1b_2b_3|qy\xi\rangle = \xi|qy\xi\rangle \tag{43}$$

显然由本征方程(43)和反对易关系(35)可以导出

$$(b_1b_2b_3)^2|qy\xi\rangle = -\xi^2|qy\xi\rangle = 0 \tag{44}$$

由于本征态 $|qy\xi\rangle \neq 0$，所以有 $\xi^2 = 0$，因此可以取 ξ 为 Grassmann 数．一般认为 Grassmann 数与真空对易，因为真空代表没有粒子的态，是玻色性的．又假定它与费米算符反对易，即

$$\xi|0\rangle = |0\rangle\xi, \ \xi b_\alpha + b_\alpha\xi = 0. \quad (\alpha = 1, 2, 3) \tag{45}$$

引进三维费米粒子表象的完备基

$$|n_1n_2n_3\rangle = (b_1^+)^{n_1}(b_2^+)^{n_2}(b_3^+)^{n_3}|0\rangle, \ n_1, n_2, n_3 = 0.1. \tag{46}$$

在这个表象中相干态 $|qy\xi\rangle$ 可以展开为

$$\begin{aligned}|qy\xi\rangle = C_0|0\rangle + C_1|100\rangle + C_2|010\rangle + C_3|001\rangle + C_4|110\rangle \\ + C_5|101\rangle + C_6|011\rangle + C_7|111\rangle\end{aligned} \tag{47}$$

将(57)代入本征方程(43)，利用 (35) 式可得

$$\begin{aligned}&\xi C_0 = C_7, \\ &\xi C_1 = \xi C_2 = \xi C_3 = \xi C_4 = \xi C_5 = \xi C_6 = \xi C_7 = 0\end{aligned} \tag{48}$$

因此 $C_1\cdots C_6$ 等于零或 ξ．而当 $C_0 = 1$ 时，$C_7 = \xi$；$C_0 = \xi$ 时，$C_7 = 0$．将(47)代入本征方程(41)又得

$$\begin{aligned}&qC_0 = qC_7 = 0 \\ &qC_1 = \frac{2}{3}C_1, \ qC_2 = -\frac{1}{3}C_2, \ qC_3 = -\frac{1}{3}C_3, \\ &qC_4 = \frac{1}{3}C_4, \ qC_5 = \frac{1}{3}C_5, \ qC_6 = -\frac{2}{3}C_6.\end{aligned} \tag{49}$$

对超荷方程 (42) 进行类似操作，可得

$$\begin{aligned}&yC_0 = yC_7 = 0 \\ &yC_1 = \frac{1}{3}C_1, \ yC_2 = \frac{1}{3}C_2, \ yC_3 = -\frac{2}{3}C_3,\end{aligned}$$

$$yC_4 = \frac{2}{3}C_4,\ yC_5 = -\frac{1}{3}C_5,\ yC_6 = -\frac{1}{3}C_6. \tag{50}$$

联立(48)、(49)和(50)式可得八个 $SU(3)$ 电荷、超荷费米相干态．其中电荷、超荷为分数的相干态有六个，即

$$\begin{aligned}&\left|\frac{2}{3}\ \frac{1}{3}\ \xi\right\rangle = \xi|100\rangle,\quad \left|\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ \xi\right\rangle = \xi|110\rangle,\\ &\left|-\frac{1}{3}\ \frac{1}{3}\ \xi\right\rangle = \xi|010\rangle,\quad \left|\frac{1}{3}\ -\frac{1}{3}\ \xi\right\rangle = \xi|101\rangle,\\ &\left|-\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\ \xi\right\rangle = \xi|001\rangle,\quad \left|-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\ \xi\right\rangle = \xi|011\rangle.\end{aligned} \tag{51}$$

电荷、超荷为零的相干态有两个，即

$$|00\xi\rangle = |000\rangle + \xi|111\rangle,\ |00\xi\rangle = \xi|000\rangle. \tag{52}$$

根据粒子表象的完备性

$$\sum_{n_1n_2n_3}|n_1n_2n_3\rangle\langle n_1n_2n_3| = 1. \tag{53}$$

则从(51)和(52)式可得费米相干态的完备性

$$\sum_{q,y}\int d\xi^* d\xi|qy\xi\rangle\langle qy\xi| = 1 \tag{54}$$

因此算符 Q、Y 和 $b_1b_2b_3$ 确实组成力学量的完备集．

四、颜色自由度的引入

上节给出的 $SU(3)$ 电荷、超荷相干态 (51) 式中只出现分数电荷和超荷，这表明要构造整数电荷和超荷的相干态，必须引入颜色自由度，因此要把上节的讨论推广到 $SU(6)\otimes SU_c(3)$ 的情况．在 $SU(6)\otimes SU_c(3)$ 群中夸克算符由 a_A^α 代表，其中 $A=1,2,\cdots,6$ 是自旋和味指标，$\alpha=1,2,3$ 是色指标，它们满足反对易关系

$$\{a_A^\alpha,\ a_B^{+\beta}\} = \delta_{AB}\delta^{\alpha\beta}. \tag{55}$$

电荷和超荷算符分别是

$$Q = \frac{1}{3}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{r=\pm1} 2a_{1r}^{\alpha+}a_{1r}^{\alpha} - a_{2r}^{\alpha+}a_{2r}^{\alpha} - a_{3r}^{\alpha+}a_{3r}^{\alpha}, \tag{56}$$

$$Y = \frac{1}{3}\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{r=\pm1} a_{1r}^{\alpha+}a_{1r}^{\alpha} + a_{2r}^{\alpha+}a_{2r}^{\alpha} - 2a_{3r}^{\alpha+}a_{3r}^{\alpha}. \tag{57}$$

式中 $r=\pm1$ 是自旋指标．色群的生成元为

$$G_c^i = \sum_{A=1}^{6}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} a_A^{\alpha+}\lambda_{\alpha\beta}^i a_A^\beta,\quad (i=1,2\cdots). \tag{58}$$

显然 Q、Y、G_c^i 是相互对易的，即

$$[Q,Y]=0,\ [Q,G_c^i]=0,\ [Y,G_c^i]=0. \tag{59}$$

引进消灭算符的乘积

$$\Xi = a_1^1\cdots a_6^1a_1^2\cdots a_6^2a_1^3\cdots a_6^3. \tag{60}$$

则根据反对易关系(55)可以证明

$$[Q, \Xi] = 0, \ [Y, \Xi] = 0, \ [G_c^i, \Xi] = 0. \tag{61}$$

因此算符 Q、Y、Ξ 有共同的本征函数,记为

$$Q|qy\xi\rangle = q|qy\xi\rangle. \tag{62}$$

$$Y|qy\xi\rangle = y|qy\xi\rangle. \tag{63}$$

$$\Xi|qy\xi\rangle = \xi|qy\xi\rangle. \tag{64}$$

考虑到物理波函数是色单态,所以相干态还必须满足方程

$$G_c^i|qy\xi\rangle = 0. \tag{65}$$

根据反对易关系(55)可得

$$\Xi^2 = 0. \tag{66}$$

把它作用于相干态上,并利用本征方程(64)得

$$\xi^2|qy\xi\rangle = 0. \tag{67}$$

由于相干态非零,所以有 $\xi^2 = 0$,因此 ξ 可取为 Grassmann 数. 引进粒子数表象基矢

$$|\{n_A^\alpha\}\rangle = (a_1^{1+})^{n_1^1}\cdots(a_6^{1+})^{n_6^1}(a_1^{2+})^{n_1^2}\cdots(a_6^{2+})^{n_6^2}(a_1^{3+})^{n_1^3}\cdots(a_6^{3+})^{n_6^3}|0\rangle.$$

$$(n_A^\alpha = 0, 1, \ \alpha = 1, 2, 3, \ A = 1, 2, \cdots 6) \tag{68}$$

一共是 2^{18} 个态,它满足下列正交归一完备条件

$$\langle\{n_A^{\alpha\prime}\}|\{n_A^\alpha\}\rangle = \prod_{A,\alpha}\delta_{n_A^\alpha, n_A^{\alpha\prime}}. \tag{69}$$

$$\sum_{\{n_i^\alpha\}}|\{n_i^\alpha\}\rangle\langle\{n_i^\alpha\}| = 1. \tag{70}$$

因此相干态一般可以展开为

$$|qy\xi\rangle = \sum_{\{n_i^\alpha\}} C_{\{n_i^\alpha\}}|\{n_i^\alpha\}\rangle. \tag{71}$$

但是它必须满足单色方程(65). 显然方程(65)的平凡解是真空,它的简单解由下列三粒子算符构成,即根据(55)式可得

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}a_A^{\alpha+}a_B^{\beta+}a_C^{\gamma+} &= a_A^{1+}a_B^{2+}a_C^{3+} + a_A^{1+}a_C^{2+}a_B^{3+} \\ &+ a_B^{1+}a_A^{2+}a_C^{3+} + a_B^{1+}a_C^{2+}a_A^{3+} + a_C^{1+}a_A^{2+}a_B^{3+} + a_C^{1+}a_B^{2+}a_A^{3+} \\ &= 6P_s(a_A^{1+}a_B^{2+}a_C^{3+}).\end{aligned} \tag{72}$$

式中 P_s 是自旋一味置换群 $\mathcal{S}_3$ 的全对称排列

$$P_s = \frac{\epsilon + (23) + (12) + (123) + (132) + (13)}{6} \tag{73}$$

(72)式表明三粒子单色态给出了 $SU(6)$ 全对称波函数. 因此单色相干态只能表述为 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18 个粒子的展开

$$|qy\xi\rangle = C_0|0\rangle + \xi C_0\Xi^+|0\rangle + \xi\sum_{ABC}C_{ABC}^{(3)}P_s(a_A^{1+}a_B^{2+}a_C^{3+})|0\rangle$$

$$+ \xi\sum_{h=2}^{5}\sum_{ABC}C_{ABC\cdots A'B'C'}^{(3n)}P_s(a_A^{1+}a_B^{2+}a_C^{3+})\cdots P_s(a_{A'}^{1+}a_{B'}^{2+}a_{C'}^{3+})|0\rangle$$

$$= C_0|0\rangle + \xi C_0 \Xi^+|0\rangle + \xi \sum_{ABC} C^{(3)}_{\{ABC\}} a^{1+}_A a^{2+}_B a^{3+}_C |0\rangle$$

$$+ \xi \sum_{n=2}^{5} \sum_{ABC\cdots A'B'C'} C^{(3n)}_{\{ABC\}\cdots\{A'B'C'\}} a^{1+}_A a^{2+}_B a^{3+}_C \cdots a^{1+}_{A'} a^{2+}_{B'} a^{3+}_{C'} |0\rangle. \tag{74}$$

注意上式已满足本征方程(64). 根据反对易关系(55)，必须将(74)式中相同色指标的 $SU(6)$ 指标反对称代，即

$$\underbrace{a^{1+}_A a^{2+}_B a^{3+}_C \cdots a^{1+}_{A'} a^{2+}_{B'} a^{3+}_{C'}}_{3n\text{ 个}} = (-)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \underbrace{a^{1+}_A \cdots a^{1+}_{A'}}_{n\text{ 个}} \underbrace{a^{2+}_B \cdots a^{2+}_{B'}}_{n\text{ 个}} \underbrace{a^{3+}_C \cdots a^{3+}_{C'}}_{n\text{ 个}}$$

$$= (-)^{\left[\frac{n}{2}\right]} P_a(a^{1+}_A \cdots a^{1+}_{A'}) P_a(a^{2+}_B \cdots a^{2+}_{B'}) P_a(a^{3+}_C \cdots a^{3+}_{C'})$$

$$= (-)^{\left[\frac{n}{2}\right]} A^{1+}_{A\cdots A'} A^{2+}_{B\cdots B'} A^{3+}_{C\cdots C'} \tag{75}$$

其中定义了 n 个费米子反对称算符

$$A^{a+}_{A\cdots A'} = P_a(\underbrace{a^{a+}_A \cdots a^{a+}_{A'}}_{n\text{ 个}}) = \underbrace{a^{a+}_A \cdots a^{a+}_{A'}}_{n\text{ 个}} \tag{76}$$

将(75)式代入(74)式得

$$|qy\xi\rangle = C_0|0\rangle + \xi C_0 \Xi^+|0\rangle + \xi \sum_{A,B,C} C^{(3)}_{\{ABC\}} P_s(a^{1+}_A a^{2+}_B a^{3+}_C)|0\rangle$$

$$+ \xi \sum_{n=2}^{5} \sum_{ABC\cdots A'B'C'} C^{(3n)}_{\{[A\cdots A'],[B\cdots B'],[C\cdots C']\}} P_s(A^{1+}_{A\cdots A'} A^{2+}_{B\cdots B'} A^{3+}_{C\cdots C'})|0\rangle \tag{77}$$

由于相干态 $|qy\xi\rangle$ 还必须是电荷 Q 和超荷 Y 的本征态，即满足方程(62)和(63). 因此由(77)式得单色的 $SU(6)$ 电荷、超荷相干态为

$$\xi|0\rangle,\ |0\rangle + \xi\Xi^+|0\rangle,\ \xi P_s(a^{1+}_A a^{2+}_B a^{3+}_C)|0\rangle,\ \xi P_s(A^{1+}_{A\cdots A'} A^{2+}_{B\cdots B'} A^{3+}_{C\cdots C'})|0\rangle. \tag{78}$$

可见它们都是 $SU(6)$ 全对称波函数，而在 6，9，12，15 个粒子时，它们分别以 2，3，4，5 个反对称费米子系统的形式进行全对称化. 显然由于它们都是由 3 的整数倍的夸克所组成，所以电荷和超荷必然是整数.

为了构造介子型相干态，还必须引入反夸克 b^a_A，这时相应的"荷"都要包括反夸克的贡献，例如电荷和超荷算符分别改写为

$$Q = \frac{1}{3}\sum_{a=1}^{3}\sum_{r=\pm1}(2a^{a+}_{1_r}a^a_{1_r} - a^{a+}_{2_r}a^a_{2_r} - a^{a+}_{3_r}a^a_{3_r})$$

$$- (2b^{a+}_{1_r}b^a_{1_r} - b^{a+}_{2_r}b^a_{2_r} - b^{a+}_{3_r}b^a_{3_r}) \tag{79}$$

$$Y = \frac{1}{3}\sum_{a=1}^{3}\sum_{r=\pm1}(a^{a+}_{1_r}a^a_{1_r} + a^{a+}_{2_r}a^a_{2_r} - 2a^{a+}_{3_r}a^a_{3_r})$$

$$- (b^{a+}_{1_r}b^a_{1_r} + b^{a+}_{2_r}b^a_{2_r} - 2b^{a+}_{3_r}b^a_{3_r}). \tag{80}$$

消灭算符的乘积应推广为

$$\Xi = \prod_{A,B,a,\beta} a^a_A b^\beta_B. \tag{81}$$

这时可以证明

$$[\Xi, Q] = 0,\ [\Xi, Y] = 0,\ [Q, Y] = 0. \tag{82}$$

因此它们有共同的本征态

$$\Xi|q\gamma\xi\rangle = \xi|q\gamma\xi\rangle$$

显然 ξ 也是个 Grassmann 数，把本征态展开为

$$|q\gamma\xi\rangle = \sum_{\left\{\substack{n_A^\alpha \\ n_B^\beta}=0,1\right\}} C_{\{n_A^\alpha, n_B^\beta\}} \prod_{AB\alpha\beta} (a_A^{\alpha+})^{n_A^\alpha}(b_B^{\beta+})^{n_B^\beta}|0\rangle \tag{83}$$

然后按照(58)—(78)式类似的做法，可以得到色单态的介子相干态为

$$\xi\left(a_A^{\alpha+} b_B^{\alpha+} - \frac{1}{6}\delta_{AB}a_C^{\alpha+}b_C^{\alpha+}\right)|0\rangle \tag{84}$$

五、带电费米子相干态

在文献[2]中，Bhaumik 等人讨论了带电玻色子相干态，显然从第二节带 non-Abel 荷费米子相干态的讨论可见，引进带 Abel 荷的费米子相干态也是可能的．为此定义两类量子它们分别带电荷 $+1$ 与 -1，相应的湮灭算符分别为 a 与 b． 它们满足

$$\{a, b\} = 0,\ \{a, b^+\} = 0,\ a^2 = b^2 = 0,\ \{a, a^+\} = 1,\ \{b, b^+\} = 1. \tag{85}$$

引入电荷算符 $Q = a^+a - b^+b$，则用(36)和(85)式易证

$$[Q, ab] = 0,\ [Q, a^+b^+] = 0. \tag{86}$$

可见 Q 与 ab 有共同的本征态，因此可以建立带电费米子相干态 $|\xi q\rangle$，即

$$Q|\xi q\rangle = q|\xi q\rangle. \tag{87}$$

$$ab|\xi q\rangle = \xi|\xi q\rangle. \tag{88}$$

将 $|\xi q\rangle$ 按粒子表象完备集展开得

$$|\xi q\rangle = C_0|0\rangle + C_1|10\rangle + C_2|01\rangle + C_3|11\rangle. \tag{89}$$

以 Q 作用之，并利用本征方程 (87) 得

$$\begin{aligned} &q = 0,\ C_0 \neq 0,\ C_3 \neq 0,\ C_1 = C_2 = 0; \\ &q = 1,\ C_1 \neq 0,\ C_0 = C_2 = C_3 = 0; \\ &q = -1,\ C_2 \neq 0,\ C_0 = C_1 = C_3 = 0. \end{aligned} \tag{90}$$

又由本征方程(88)得

$$(ab)^2|\xi q\rangle = \xi^2|\xi q\rangle = 0,\ \text{或}\ \xi^2 = 0.$$

所以可取 ξ 为 Grassmann 数成员．将(89)式代入(88)得

$$\xi C_0 = -C_3,\ \xi C_1 = \xi C_2 = \xi C_3 = 0. \tag{91}$$

联立求解(90)和(91)式得

$$\begin{aligned} &q = 0,\ C_0 = 1,\ C_3 = -\xi,\ C_1 = C_2 = 0; \\ &q = 0,\ C_0 = \xi,\ C_1 = C_2 = C_3 = 0; \\ &q = 1,\ C_1 = \xi,\ C_0 = C_2 = C_3 = 0; \\ &q = -1,\ C_2 = \xi,\ C_0 = C_1 = C_3 = 0. \end{aligned} \tag{92}$$

由此给出带电费米子相干态

$$|\xi q\rangle = \xi|10\rangle,\ q = 1;\ |\xi q\rangle = \xi|01\rangle,\ q = -1;$$

$$|\xi q\rangle = |00\rangle - \xi|11\rangle,\ q=0;\ |\xi q\rangle = \xi|00\rangle,\ q=0. \tag{93}$$

把(93)各式相加并对 $d\xi^* d\xi$ 积分得相干态完备性

$$\sum_q \int d\xi^* d\xi |\xi q\rangle\langle \xi q| = 1. \tag{94}$$

由于 $[Q, a^+b^+]=0$，因此也可找 Q 与 a^+b^+ 的共同本征态 $|\eta q\rangle$，显然 η 也取作 Grassmann 数，这时可导出对应的相干态为

$$|\eta q\rangle = \eta|10\rangle,\ q=1;\ |\eta q\rangle = \eta|01\rangle,\ q=-1;$$
$$|\eta q\rangle = \eta|00\rangle + |11\rangle,\ q=0;\ |\eta q\rangle = \eta|11\rangle,\ q=0;$$

上述讨论表明 Grassmann 数的引入可使得构造可对易费米算符的共同本征态成为可能.

致谢：本文感谢朱洪元教授的指导.

参　考　文　献

[1] Glauber, Roy, J., *Phys. Rev.*, **131** (1963), 2766.
[2] Bhaumik, D., et al., *J. Phys.*, **A9** (1976), 1507.
[3] Merzbacher, E., Quantum Mechanics, John Wiley and Sons Inc., 1970, p. 528.

$SU(3)$ CHARGED, HYPERCHARGED COHERENT STATE AND THE COLOR QUANTUM NUMBER

FAN HONG-YI　RUAN TU-NAN
(University of Science and Technology of China)

ABSTRACT

In this paper the coherent state which possesses a definite Abelian charge is extended to the case of possessing a definite non-Abelian charge. The $SU(3)$ charged, hypercharged coherent states for both boson and fermion cases are constructed. In this way, the fractionally charged, hypercharged quark states can be obtained naturally. Moreover, this formulation also shows that in order to obtain integrally charged, hypercharged hadron coherent states, one must introduce color quantum number and proceed the discussion of the $SU(6)\otimes SU_c(3)$ case.