第8卷 第3期 高能物理与核物理 Vol. 8, No. 3
1984年5月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS May, 1984

MIT 口袋模型中的 $\pi^0 \to 2\gamma$ 衰变

李 炳 安
（中国科学院高能物理研究所）

摘 要

本文用 MIT 口袋模型和波包方法计算了 $\pi^0 \to 2\gamma$ 过程的宽度. 计算发现 $m_\pi \to 0$ 是一个好的近似. MIT 口袋模型给出，$\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma) \propto m_\pi^3/F_\pi^2$，这种形式与 Adler 的结果相符合，但数字结果显示，$\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma)$ 的理论值是实验值的 2.7 倍，这个差主要来自 F_π 的理论值与实验值的差. 而这个差很强地依赖于 MIT 口袋模型的方程和边界条件，从而对 MIT 口袋模型构成了一个检验.

一、引 言

在 MIT 的口袋模型[1]中考虑了夸克的禁闭和渐近自由. 这个模型得到了一些较好的结果. 在文献 [2] 中，文章的作者用波包去定义在口袋模型中的物理状态，从而避免了口袋模型不满足平移不变性的这一缺陷. 一个物理的强子态总是动量的本征态，可以记为 $|p\rangle$，其中 p 是该强子的四动量. 按照文献 [2]，在口袋模型中，一个强子态（记为 $|bag\rangle$）定义为

$$|bag\rangle = \int |p\rangle \phi(p) d^3p. \tag{1}$$

$\phi(p)$ 是一个动量分布函数，$2\omega_p\phi(p)$ ($\omega_p = \sqrt{p^2+m^2}$，$m$ 是强子质量) 是一个“洛仑兹标量. 由归一化条件: $\langle bag|bag\rangle = 1$，得:

$$(2\pi)^3 \int d^3p\, \phi^2(p) 2\omega_p = 1. \tag{2}$$

在这篇文章中，我们用这种改善了的口袋模型去计算 $\pi^0 \to 2\gamma$ 的宽度. $\pi^0 \to 2\gamma$ 是在物理上有重要意义的过程，Adler [3] 用三角图反常、PCAC 和颜色量子数的存在计算了这个过程的宽度，得

$$\Gamma = \frac{\alpha^2}{64\pi^3} \frac{m_\pi^3}{F_\pi^2}. \tag{3}$$

其中 F_π 是 π^0 介子的衰变振幅. 由 (3) 式看到 Γ 与 F_π^2 成反比，这是 PCAC 的结果. (3) 式所给出的数值是与实验符合的.

在这篇文章中，我们用 MIT 的口袋模型对这一重要的过程进行计算，看从口袋模型是否也可以得到 Γ 与 F_π^2 成反比的 PCAC 的结果；看口袋模型所得到的结果是否与实验符

本文 1983 年 1 月 7 日收到.

合;从而对 MIT 口袋模型做出检验.

在本文第二节中导出 $\pi^0 \to 2\gamma$ 过程的振幅的表达式；在第三节中导出满足束缚条件的夸克的传播子;最后在第四节中给出结果并进行讨论.

二、$\pi^0 \to 2\gamma$ 过程的振幅

$\pi^0 \to 2\gamma$ 过程的 S 矩阵元可以写为

$$\langle \gamma_1\gamma_2|S|\pi^0\rangle = -\frac{1}{2\omega} e_\mu^{\lambda_1} e_\nu^{\lambda_2} \int d^4x_1 d^4x_2 e^{ik_1x_1+ik_2x_2} \langle 0|T\{j_\mu(x_1)j_\nu(x_2)\}|\pi^0\rangle \tag{4}$$

$e_\mu^{\lambda_1}$ 和 $e_\nu^{\lambda_2}$ 分别是两个 γ 光子的极化矢量，k_1 和 k_2 分别是两个光子的四动量，ω 则是在 π^0 静止系中光子的能量.

用平移变换得

$$\langle 0|T\{j_\mu(x_1)j_\nu(x_2)\}|\pi^0\rangle = M_p(x_1-x_2)_{\mu\nu} e^{-\frac{i}{2}p\cdot(x_1+x_2)}. \tag{5}$$

p 是 π 介子的四动量. 用 (1) 式可以定义口袋模型中的 π 介子状态，用 (1)、(5) 式得

$$\langle 0|T(j_\mu(x_1)j_\nu(x_2)\}|\pi, bag\rangle = \int d^3p\,\phi_\pi(p) M_p(x_1-x_2)_{\mu\nu} e^{-\frac{i}{2}p\cdot(x_1+x_2)}. \tag{6}$$

需要指出的是，状态 $|\pi, bag\rangle$ 虽不是动量的本征态，但它是能量的本征态. 我们试图在 MIT 的口袋模型中计算物理振幅 $M_p(x_1-x_2)_{\mu\nu}$.

对 (6) 式两边进行傅里叶变换并考虑到 $|\pi, bag\rangle$ 是能量本征态得:

$$\phi(p)M_p(k)_{\mu\nu} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3X d^4x e^{-i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{X}+ikx} \cdot \left\langle 0\left| T\left\{j_\mu\left(\boldsymbol{x}_1, \frac{x_0}{2}\right) j_\nu\left(\boldsymbol{x}_2, -\frac{x_0}{2}\right)\right\}\right|\pi, bag\right\rangle. \tag{7}$$

其中: $X = \frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $x = x_1 - x_2$, $k = (k_1 - k_2)/2$

$$M_p(k)_{\mu\nu} = \int d^4x M_p(x)_{\mu\nu} e^{ikx}. \tag{8}$$

用 (8) 式, (4) 式可以写为

$$\langle \gamma_1\gamma_2|S|\pi^0\rangle = -(2\pi)^4\delta^4(p-k_1-k_2) e_\mu^{\lambda_1} e_\nu^{\lambda_2} M_p(k)^{\mu\nu}. \tag{9}$$

在 π 介子静止坐标系中(在此系中,将 $M_p(k)_{\mu\nu}$ 记为 $M(k)_{\mu\nu}$) 由 (7) 式得

$$M(k)_{\mu\nu} = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{\phi_\pi(0)}\int d^3X d^4x e^{ikx}\left\langle 0\left| T\left\{j_\mu\left(\boldsymbol{x}_1, \frac{x_0}{2}\right) j_\nu\left(\boldsymbol{x}_2, -\frac{x_0}{2}\right)\right\}\right|\pi, bag\right\rangle. \tag{10}$$

这样,物理振幅 $M(k)_{\mu\nu}$ 的计算归结为 $\phi_\pi(0)$ 和 (10) 中矩阵元的计算. 用文献 [2] 的结果，$\phi_\pi(0)$ 可写为

$$\phi_\pi(0) = \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{m_\pi F_\pi}\sqrt{3}\,N^2(x)R^3\int_0^1 r^2\{j_0^2(xr) - j_1^2(xr)\}dr, \tag{11}$$

其中 j_0、j_1 分别是相应的半整数阶的贝塞尔函数, R 是 π 介子的半径, $N(x)$ 是夸克波函数的归一化常数 (12), x 是一参数,在 MIT 口袋模型中 [1], 定出

$$x = 2.043, \quad N^2(x)R^3 = 5.11. \tag{12}$$

(11) 式中的 π 介子弱衰变振幅 F_π 在口袋模型中的表达式为

$$F_\pi^2 = \frac{3}{\pi^2} N^4(x) R^4 \int_0^\infty \frac{dp}{(p^2+1)^{\frac{1}{2}}} \left| \int_0^1 r \sin m_\pi R p r [j_0^2(xr) - j_1^2(xr)] dr \right|^2. \tag{13}$$

将 (13) 式中 π 介子的半径 R 作为参数得 F_π 的数值结果见表 1.

表　1

R(fermi)	1	0.8	0.73	0.7	0.66
F_π(MeV)	93	118	130	135	138

F_π 的实验值为 93MeV，而文献 [2] 中给出 π 介子半径为 0.66—0.7fermi，理论值是实验值的 1.5 倍左右. 在 [2] 中，在 $m_\pi \to 0$ 的极限下得

$$F_\pi = \frac{0.5}{R}. \tag{14}$$

用 (14) 式得到的数值结果仅比表 1 所列的结果大百分五左右，说明在 F_π 的计算中，取 $m_\pi \to 0$ 是一个很好的近似. 值得指出的是 (14) 式中的数字 0.5 仅依赖 (12) 式中的 x 和 $N^2(x) R^3$ 的值，而这两个值是由 MIT 口袋模型中的夸克场的方程和边界条件，归一化条件决定的.

用 (11) 和 (13) 式，(10) 式中的 $\phi_\pi(0)$ 在口袋模型完全可以计算了. 在只考虑三角图贡献时，$M(k)_{\mu\nu}$ 可以写为

$$M(k)_{\mu\nu} = -\frac{2\sqrt{3}\, e^2}{(2\pi)^3} S_p Q^2 \phi \frac{1}{\phi_\pi(0)} \int d^3x_1 d^3x_2 dx_0 e^{-i\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{x}_1 - i\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{x}_2}$$
$$\cdot\, T_r \chi(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) \gamma_\mu S_F(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, x_0) \gamma_\nu. \tag{15}$$

其中 $\chi(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1)$ 是 π 介子在口袋模型中的波函数，它可以写为

$$\chi(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) = \frac{1}{\sqrt{2m_\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{s_1 s_2} \varepsilon_{s_1 s_2} u_{s_1}(x_2) \bar{v}_{s_2}(x_1),$$
$$\varepsilon_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = 1, \quad \varepsilon_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = -1, \quad \varepsilon_{s_1 s_2} = -\varepsilon_{s_2 s_1}$$
$$u_s(\boldsymbol{r}) = \frac{N(x)}{\sqrt{4\pi}} \begin{pmatrix} i j_0(xr/R) u_s \\ -j_1(xr/R) \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{r} u_s \end{pmatrix}.$$
$$\bar{v}_s(\boldsymbol{r}) = \frac{N(x)}{\sqrt{4\pi}} (j_1(xr/R) \tilde{u}_s \sigma_2 \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{r}\; i j_0(xr/R) \tilde{u}_s \sigma_2)$$
$$u_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_{-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{r} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}. \tag{16}$$

(15) 式中的 ϕ 是 π^0 介子的味道波函数

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Q 是电荷算符. (15) 式中的 $S_F(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, x_0)$ 是口袋模型中的传播子，它满足一定的边界条

件，在下一节中将对它进行讨论．用 (16) 式的波函数、下一节中的传播子及 $\phi_\pi(0)$ 的表达式，即可将 $M(k)_{\mu\nu}$ 算出来．

三、口袋模型中的传播子

在 (15) 式中的传播子是以下面的积分形式出现的

$$G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \int dx_0 S_F(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, x_0). \tag{18}$$

π^0 介子是由 u、d 两种夸克组成的，在 [1] 中将 m_u 和 m_d 取为零．$G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ 满足自由格林函数方程，并满足口袋模型的边界条件

$$\begin{aligned} i\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}_1 G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) &= \delta^3(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2), \quad (1 - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{x}_1)G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)|_{x_1=R} = 0; \\ G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)(-i\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}_2) &= \delta^3(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2), \quad G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)(1 + \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{x}_2)|_{x_2=R} = 0. \end{aligned} \tag{19}$$

为求介方程组 (19) 可将 $G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ 写成两部份

$$G = G_0 + \Gamma, \tag{20}$$

其中 G_0 是自由格林函数介

$$G_0 = i\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}_1 \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|}, \tag{21}$$

Γ 满足齐次方程

$$i\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}_1\Gamma = \Gamma(-i\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\nabla}_2) = 0. \tag{22}$$

为满足方程 (22)，可将 Γ 写为

$$\Gamma = -i\begin{pmatrix} a + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}_1 b & 0 \\ 0 & a + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}_1 b \end{pmatrix}, \tag{23}$$

其中 $\boldsymbol{L}_1 = -i\boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{\nabla}_1$，$a$ 和 b 满足下面的方程

$$\nabla_1^2 a = \nabla_2^2 a = 0, \quad \nabla_1^2 b = \nabla_2^2 b = 0. \tag{24}$$

由方程 (24) 和边界条件 (19)，可将 a 和 b 写为

$$a = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \left(\frac{x_1 x_2}{R^2}\right)^l P_l(\hat{x}_1\cdot\hat{x}_2),$$

$$b = \sum_{l=0}^{\infty} b_l \left(\frac{x_1 x_2}{R^2}\right)^l P_l(\hat{x}_1\cdot\hat{x}_2) + \frac{C_0}{R}. \tag{25}$$

P_l 是 l 阶的勒让德函数．用边界条件 (19) 定出

$$a_l = \frac{1}{4\pi R^2}(l+1), \qquad b_l = \frac{1}{4\pi R^2}. \tag{26}$$

(25) 式 C_0 是一任意常数，它不出现在 Γ 中．由 b 的形式 (25)，可以证明

$$(\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2)b = 0. \tag{27}$$

因而有:

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}_1 b = -\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{L}_2 b. \tag{28}$$

在利用边界条件得到 a_l 和 b_l 形式时，我们用了下面的表达式

$$\frac{1}{4\pi|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2|}=\frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\left\{\theta(x_1-x_2)\frac{1}{r_1}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^l\right.$$
$$\left.+\theta(x_2-x_1)\frac{1}{r_2}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^l\right\}P_l(\hat{x}_1\cdot\hat{x}_2) \tag{29}$$

四、结果和讨论

在 π^0 介子静止坐标系中，取光子方向为 z 轴，$M(k)_{\mu\nu}$ 的指标 μ、ν 只在 x 和 y 轴上取值．用二和三节的结果，可以得到 $M(k)_{\mu\nu}$ 一个级数表达式，它是一个二重积分，而且此级数是收敛的． 我们要求计算精度为 10^{-3}，计算表明，只要取 10 项就可以达到这个精度．由于此表达式过于繁，这里不再列出．

将 R_π 取为参数，得到 $\Gamma(\pi^0\to 2\gamma)$ 的数值见表 2.

表 2

R(fermi)	1	0.8	0.73	0.7
Γ(eV)	43	28.4	24.2	21.5

从表 2 的数值可以知道，$\Gamma\propto R^2$，我们取 [2] 中给出的 $R_\pi=0.7$ fermi，那么 $\Gamma=21.5$ eV，实验值为 7.9 eV 理论值是实验值的 2.7 倍． 在 [1] 中得到的 π 介子质量是实验值的 2 倍． 在 [2] 中得到的 F_π 是实验值的 1.5 倍． 这三个因子说明口袋模型对 π 介子物理量的计算与实验值的差别．如果将 (11) 式中的 F_π 用实验值代入，得

$$\Gamma(\pi^0\to 2\gamma)=10.2\ \text{eV} \tag{30}$$

这个结果只比实验值大 30%． 因此，理论与实验的偏差主要来自 F_π 的计算．若要在口袋模型中改进 $\Gamma(\pi^0\to 2\gamma)$ 的计算首先要改进 F_π 的计算．

在二节中，我们发现取 $m_\pi\to 0$ 是 F_π 计算的一个很好的近似．现在，在计算 $\Gamma(\pi^0\to 2\gamma)$ 时，我们也取 $m_\pi\to 0$，只保留最大的项，得

$$\Gamma(\pi^0\to 2\gamma)=0.73\times 10^{-6}m_\pi^3R^2 \tag{31}$$

这个结果仅比表 2 中所列的数值大 6% 左右，与 R^2 成正比的行为是一致的．说明 $m_\pi\to 0$，只保留最大的项是一个很好的近似．

从 F_π 的计算得：$F_\pi\propto\frac{1}{R}$ 因而，从 (31) 式得：

$$\Gamma(\pi^0\to 2\gamma)\propto\frac{m_\pi^3}{F_\pi^2}. \tag{32}$$

这个结果与 Adler 用 PCAC 和三角图反常所得到的结果 (3) 对 m_π 和 F_π 的依赖是一致的，而 (1) 式中

$$\Gamma(\pi^0\to 2\gamma)\propto\frac{1}{F_\pi^2}$$

是从 PCAC 中得到的．值得指出的是 (32) 式的比例常数仅依赖于 x 和 $N^2(x)R^3$ 的值，而

这两个数值是由 MIT 口袋模型中夸克场的方程、边界条件和归一化条件所决定的. 因此，本文的另一结论是，要想改善 $\Gamma(\pi^0\to 2\gamma)$ 的理论结果(在 MIT 口袋模型中)，需要对 MIT 口袋模型中的方程或边界条件做一修正，这一修正还必须保留 PCAC 的结果.

作者对 K. Johnson 教授的十分有益的讨论表示感谢，文中 $G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2)$ 的解是我们两人一块得到的.

参 考 文 献

[1] T. Degrand, R. L. Jaffe, K. Johnson, and J. Kiskis, *Phys. Rev.*, D12(1975), 2060.
[2] J. F. Donoghue and K. Johnson, *Phys. Rev.*, D21(1980), 1975.
[3] S. L. Adler, *Phys. Rev.*, 177(1969), 2426.

DECAY $\pi^0\to 2\gamma$ IN THE MIT BAG MODEL

Li Bing-an
(Institute of High Energy Physics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper the MIT bag model and wave Packet Method are used to calculate the width of the process $\pi^0\to 2\gamma$ It is found that $m_\pi\to 0$ is a good approximation. The results are consistent with PCAC. The theoretical value of $\Gamma(\pi^0\to 2\gamma)$ is 2.7 times of the experimental value. The deviation is mainly from the calculation of F_π. It is also found that the deviation strongly depends on the equation and the boundary contion of the MIT bag model.