第7卷 第5期 高能物理与核物理 Vol.7, No.5
1983年9月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Sept., 1983

陪集纯规范场的点阵形式

阮图南 井思聪 刘祖伟
(中国科学技术大学近代物理系)

摘 要

本文在群G的空间拓扑性质为非平凡的情形及群G是手征群的情形建立了陪集空间纯规范场的点阵形式，给出了层子体系在四维欧氏空间点阵上定域规范不变且具有通常连续极限的作用量。对于非手征群且空间拓扑性质平凡的情形，在明显保留陪集纯规范场时，通过点阵上流-流传播子的计算，证明了陪集纯规范场对体系的禁闭性质没有影响.

一、引 言

许多实验表明，在低能强子相互作用中，强子不仅具有$SU(3)$或$SU(4)$群的幺正对称性，而且具有$SU(2)_L\times SU(2)_R$或$SU(3)_L\times SU(3)_R$手征群的对称性。为了解决用手征群的非线性表示所写出的拉氏函数的重正化问题，在文献[1]中引入了陪集空间纯规范场的概念。通过陪集空间纯规范场，利用群G在其子群H上所诱导的非线性表示，从一个在群G上宇观不变的拉氏函数，构造了一个只包含子群H上的矢量规范场而在整个群G上定域规范不变的拉氏函数，这样就得到了一个规范不变的理论。对于$SU(2)_L\times SU(2)_R$的情形，在可重正规范下这个理论与线性σ模型相当，而在物理规范下它接近于非线性手征模型，并且又可以重正化。当空间拓扑性质非平凡时，这个理论还可以用来描写磁单极。在文献[2]、[3]中解决了陪集纯规范场真空的拓扑性质、陪集纯规范场的量子化与重正化等一系列基本的理论问题。但是，在引进陪集空间纯规范场之后，它对层子体系的禁闭性质有什么影响？这就需要将理论纳入点阵形式，根据Wilson判据进行分析讨论.

自从层子模型提出之后，在解释强子结构等方面取得了很大的成功，但是自由的层子一直没有找到。为了探讨层子禁闭的原因，提出过许多唯象模型，如Parton模型、袋模型、弦模型和位势模型等。这些模型一般都不能完全满足相对论和量子论的要求，而且缺乏一个统一的动力学理论将各种模型和假定联系起来。因此，在$3+1$维量子场论中，禁闭的存在与否仍然是一个没有解决的问题。Wilson在1974年提出的格点规范理论[4]，经常被用来研究禁闭问题。这种理论是在时空离散化的点阵上建立场论，在强耦合情形下可以利用统计物理中的高温展开进行计算。因此在耦合常数大时，这种理论能够提供带

本文1982年7月5日收到.

色粒子的禁闭机制．当然在点阵上得到禁闭并不等于在真实的时空中解决了禁闭问题，但是在点阵上研究禁闭问题的方法和经验对于在真实的时空中研究禁闭问题是有一定的启发作用的．因此，在研究陪集纯规范场对层子体系禁闭性质的影响时，作为第一步，可以先在点阵上进行研究，这就需要建立陪集空间纯规范场的点阵形式．

本文的结构如下，第二节在群 G 的空间拓扑性质为非平凡的情形下建立了陪集纯规范场的点阵形式，第三节讨论群 G 是手征群的情形，第四节在非手征群且空间拓扑性质为平凡的情形下计算了点阵上的流-流传播子，证明了不含手征对称性的陪集纯规范场对体系的禁闭性质没有影响．

二、群 G 的空间拓扑性质为非平凡的情形

按照陪集空间纯规范场的一般理论，在子群 H 上定域规范不变的拉氏函数可以取为

$$\mathscr{L}^{(A)} = -m\bar{\psi}\psi - \bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu + \hat{A}_\mu)\psi + \frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\hat{F}^{(A)}_{\mu\nu}\hat{F}^{(A)}_{\mu\nu}, \tag{2.1}$$

其中 $\hat{A}_\mu$ 是子群 H 上的矢量规范场．令 $\hat{I}_i(i=1,2,\cdots,n_H)$ 为子群 H 的生成元，满足如下对易关系

$$\begin{aligned} &[\hat{I}_i, \hat{I}_j] = 2if_{ijk}\hat{I}_k, \ (i, j, k=1, \cdots, n_H) \\ &\mathrm{Tr}\hat{I}_i\hat{I}_j = 2\delta_{ij}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

则规范场及其场强可以写成下列形式

$$\hat{A}_\mu = -\frac{ig}{2}A^i_\mu\hat{I}_i, \tag{2.3}$$

$$\hat{F}^{(A)}_{\mu\nu} = \partial_\mu\hat{A}_\nu - \partial_\nu\hat{A}_\mu + [\hat{A}_\mu, \hat{A}_\nu], \tag{2.4}$$

选择陪集空间 G/H 的一个特定的元素 $\phi_0(x)$，可以构造在群 G 上定域规范不变的拉氏函数

$$\mathscr{L}^{(B)} = -m\bar{\Psi}\Psi - \bar{\Psi}\gamma_\mu(\partial_\mu + \hat{B}_\mu)\Psi + \frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\hat{F}^{(B)}_{\mu\nu}\hat{F}^{(B)}_{\mu\nu}. \tag{2.5}$$

其中定义了 Ψ 场、$\hat{B}_\mu$ 场及其场强 $\hat{F}^{(B)}_{\mu\nu}$，

$$\Psi(x) = \phi_0(x)\psi(x). \tag{2.6}$$

$$\hat{B}_\mu(x) = \phi_0(x)(\partial_\mu + \hat{A}_\mu)\phi_0^{-1}(x), \tag{2.7}$$

$$\hat{F}^{(B)}_{\mu\nu} = \partial_\mu\hat{B}_\nu - \partial_\nu\hat{B}_\mu + [\hat{B}_\mu, \hat{B}_\nu] = \phi_0(x)\hat{F}^{(A)}_{\mu\nu}\phi_0^{-1}(x). \tag{2.8}$$

由(2.3)式可以解出：

$$A^i_\mu = \frac{i}{g}\mathrm{Tr}(\hat{I}_i\hat{A}_\mu), \tag{2.9}$$

而由(2.7)式又可用 $\hat{B}_\mu$ 表示 $\hat{A}_\mu$，

$$\hat{A}_\mu = \phi_0^{-1}(\partial_\mu + \hat{B}_\mu)\phi_0. \tag{2.10}$$

将(2.10)式代入(2.9)式可得：

$$A^i_\mu = B^i_\mu + C^i_\mu, \tag{2.11}$$

其中定义了

$$B_\mu^i = \frac{i}{g}\mathrm{Tr}(\hat{I}_i\phi_0^{-1}\hat{B}_\mu\phi_0), \tag{2.12}$$

$$C_\mu^i = \frac{i}{g}\mathrm{Tr}(\hat{I}_i\phi_0^{-1}\partial_\mu\phi_0), \tag{2.13}$$

在有磁荷存在的情况下，A_μ^i 里有 Dirac 弦的奇异性，所以应该选择 B_μ^i 和 ϕ_0 为动力学变量，因此将 $\hat{B}_\mu$ 表示为

$$\hat{B}_\mu = \phi_0\left(\partial_\mu - \frac{ig}{2}A_\mu^i I_i\right)\phi_0^{-1} = \phi_0\partial_\mu\phi_0^{-1} - \frac{ig}{2}(B_\mu^i + C_\mu^i)\phi_0\hat{I}_i\phi_0^{-1}. \tag{2.14}$$

于是 $\mathscr{L}^{(B)}$ 可以改写成下列形式，

$$\mathscr{L}^{(B)} = -m\bar{\Psi}\Psi - \bar{\Psi}\gamma_\mu\left[\partial_\mu + \phi_0\partial_\mu\phi_0^{-1} - \frac{ig}{2}(B_\mu^i + C_\mu^i)\phi_0\hat{I}_i\phi_0^{-1}\right]\Psi$$
$$-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^iF_{\mu\nu}^i, \tag{2.15}$$

其中

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu(B_\nu^i + C_\nu^i) - \partial_\nu(B_\mu^i + C_\mu^i) + gf_{ijk}(B_\mu^j + C_\mu^j)(B_\nu^k + C_\nu^k). \tag{2.16}$$

为了写出体系在四维欧氏空间点阵上的作用量，我们按通常的方式把矢量规范场 B_μ^i 定义在键上，而把费米子场 Ψ 定义在格点上，并且把陪集纯规范场 ϕ_0 也定义在格点上，分别记作 $B_{n\mu}^i$、Ψ_n 和 ϕ_n^0。这样，C_μ^i 的点阵形式为

$$C_{n\mu}^i = \frac{i}{g}\mathrm{Tr}\left(\hat{I}_i\phi_n^{0^{-1}}\frac{\phi_{n+\hat{\mu}}^0 - \phi_n^0}{a}\right) = \frac{i}{ga}\mathrm{Tr}(\hat{I}_i\phi_n^{0^{-1}}\phi_{n+\hat{\mu}}^0), \tag{2.17}$$

其中 a 是点阵间隔.

体系在四维欧氏空间点阵上的作用量可以写成

$$A = -c\sum_n\bar{\Psi}_n\Psi_n + k\sum_{n,\mu}\bar{\Psi}_n(1-\gamma_\mu)\phi_n^0U_{n\mu}\phi_{n+\hat{\mu}}^{0^{-1}}\Psi_{n+\hat{\mu}}$$
$$+k\sum_{n,\mu}\bar{\Psi}_{n+\hat{\mu}}(1+\gamma_\mu)\phi_{n+\hat{\mu}}^0U_{n\mu}^+\phi_n^{0^{-1}}\Psi_n$$
$$+\frac{1}{2g^2}\sum_{n,\mu,\nu}\mathrm{Tr}(U_{n\mu}U_{n+\hat{\mu},\nu}U_{n+\hat{\nu},\mu}^+U_{n\nu}^+ + \mathrm{h.c.}), \tag{2.18}$$

其中 $c = ma^4 + 4a^3$，$k = \frac{a^3}{2}$，$U_{n\mu} = e^{-\frac{iag}{2}(B_{n\mu}^i + C_{n\mu}^i)\hat{I}_i}$. 点阵上的定域规范变换定义为

$$\Psi_n' = g_n\Psi_n;\quad U_{n\mu}' = h_n'U_{n\mu}h_{n+\hat{\mu}}'^+;\quad \phi_n^{0\prime} = \phi_n', \tag{2.19}$$

其中 g_n 是群 G 的一个元素，h_n' 和 ϕ_n' 分别是子群 H 和陪集 G/H 的元素，且满足条件

$$g_n\phi_n^0 = \phi_n'h_n'. \tag{2.20}$$

当 ϕ_n^0 给定了时，根据 Lie 群的基本理论，群 G 的元素 g_n 与 ϕ_n^0 的乘积可以唯一地分解为陪集元素 ϕ_n' 与子群元素 h_n' 的乘积，因此 h_n' 称为 g_n 通过陪集元素 ϕ_n^0 在子群 H 上的诱导表示.

显然作用量 A 在上述定域规范变换下不变.

现在考虑作用量 A 的连续极限. 为此将(2.18)式写作

$$A = A_\psi + A_B, \tag{2.21}$$

其中 A_ψ 代表(2.18)式的前三项，A_B 代表(2.18)式的最后一项. 将 $\Psi_{n+\hat{\mu}}$、$\phi_{n+\hat{\mu}}^0$ 和 $U_{n\mu}$ 展

开到 a 的一次项，分别记为

$$\Psi_{n+\hat{\mu}} \approx \Psi_n + a\partial_\mu \Psi_n, \quad \phi^0_{n+\hat{\mu}} \approx \phi^0_n + a\partial_\mu \phi^0_n, \quad U_{n\mu} \approx 1 - \frac{iag}{2}(B^i_{n\mu} + C^i_{n\mu})\hat{I}_i.$$

需要指出，"∂_μ" 在这里仅是形式上的记号：$\partial_\mu \Psi_n \equiv \dfrac{\Psi_{n+\hat{\mu}} - \Psi_n}{a}$。只有当 $a \to 0$ 时，∂_μ 才具有通常微商的意义．这样，保留到 a^4 阶，我们得到

$$\begin{aligned} A_\psi \approx & -(ma^4 + 4a^3)\sum_n \bar{\Psi}_n \Psi_n \\ & + \frac{a^3}{2}\sum_{n,\mu} \bar{\Psi}_n(1-\gamma_\mu)\phi^0_n\left[1 - \frac{iag}{2}(B^i_{n\mu} + C^i_{n\mu})\hat{I}_i\right](\phi^{0^{-1}}_n + a\partial_\mu \phi^{0^{-1}}_n)(\Psi_n \\ & + a\partial_\mu \Psi_n) + \frac{a^3}{2}\sum_{n,\mu}(\bar{\Psi}_n + a\partial_\mu \bar{\Psi}_n)(1+\gamma_\mu)(\phi^0_n + a\partial_\mu \phi^0_n) \\ & \cdot \left[1 + \frac{iag}{2}(B^i_{n\mu} + C^i_{n\mu})\hat{I}_i\right]\phi^{0^{-1}}_n \Psi_n = -ma^4\sum_n \bar{\Psi}_n \Psi_n \\ & - a^4 \sum_{n,\mu}\Big\{\bar{\Psi}_n \gamma_\mu \partial_\mu \Psi_n + \bar{\Psi}_n \gamma_\mu \phi^0_n \partial_\mu \phi^{0^{-1}}_n \cdot \Psi_n \\ & - \frac{ig}{2}\bar{\Psi}_n \gamma_\mu \phi^0_n (B^i_{n\mu} + C^i_{n\mu})\hat{I}_i \phi^{0^{-1}}_n \Psi_n + \partial_\mu[\bar{\Psi}_n(1+\gamma_\mu)\Psi_n]\Big\}, \end{aligned}$$

略去上式最后的散度项，当 $a \to 0$ 时，得到

$$\lim_{a\to 0} A_\psi = \int d^4x \left\{-m\bar{\Psi}\Psi - \bar{\Psi}\gamma_\mu\left[\partial_\mu + \phi_0 \partial_\mu \phi_0^{-1} - \frac{ig}{2}(B^i_\mu + C^i_\mu)\phi_0 \hat{I}_i \phi_0^{-1}\right]\Psi\right\}. \tag{2.22}$$

然后考虑 A_B 项，

$$\begin{aligned} A_B &= \frac{1}{2g^2}\sum_{n,\mu,\nu}\mathrm{Tr}(U_{n\mu}U_{n+\hat{\mu},\nu}U^+_{n+\hat{\nu},\mu}U^+_{n\nu} + \mathrm{h.c.}) \\ &= \frac{1}{2g^2}\sum_{n,\mu,\nu}\mathrm{Tr}\Big(e^{-\frac{iag}{2}(B^i_{n\mu}+C^i_{n\mu})\hat{I}_i}\, e^{-\frac{iag}{2}(B^i_{n+\hat{\mu},\nu}+C^i_{n+\hat{\mu},\nu})\hat{I}_i} \\ &\quad \cdot e^{\frac{iag}{2}(B^i_{n+\hat{\nu},\mu}+C^i_{n+\hat{\nu},\mu})\hat{I}_i}\, e^{\frac{iag}{2}(B^i_{n\nu}+C^i_{n\nu})\hat{I}_i} + \mathrm{h.\,c.}\Big), \end{aligned}$$

利用下列展开式

$$\begin{aligned} B^i_{n+\hat{\mu},\nu} &\approx B^i_{n\nu} + a\partial_\mu B^i_{n\nu}, \quad C^i_{n+\hat{\mu},\nu} \approx C^i_{n\nu} + a\partial_\mu C^i_{n\nu}, \\ B^i_{n+\hat{\nu},\mu} &\approx B^i_{n\mu} + a\partial_\nu B^i_{n\mu}, \quad C^i_{n+\hat{\nu},\mu} \approx C^i_{n\mu} + a\partial_\nu C^i_{n\mu}. \end{aligned}$$

则可得到

$$\begin{aligned} A_B \approx & \frac{1}{2g^2}\sum_{n,\mu,\nu}\mathrm{Tr}\Big(e^{-\frac{iag}{2}(B^i_{n\mu}+C^i_{n\mu})\hat{I}_i}\, e^{-\frac{iag}{2}(B^i_{n\nu}+C^i_{n\nu}+a\partial_\mu B^i_{n\nu}+a\partial_\mu C^i_{n\nu})\hat{I}_i} \\ & \cdot e^{\frac{iag}{2}(B^i_{n\mu}+C^i_{n\mu}+a\partial_\nu B^i_{n\mu}+a\partial_\nu C^i_{n\mu})\hat{I}_i}\, e^{\frac{iag}{2}(B^i_{n\nu}+C^i_{n\nu})\hat{I}_i} + \mathrm{h.\,c.}\Big). \end{aligned}$$

由 Baker-Hausdorff 公式

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]+\cdots}, \tag{2.23}$$

因为指数上的高次项在取连续极限时将提供多余的 a 的幂次而无贡献，所以只需利用上式的近似

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]},$$

这样就有

$$A_B \approx \frac{1}{2g^2}\sum_{n,\mu,\nu} \mathrm{Tr}\{ e^{-\frac{iag}{2}(B^i_{n\mu}+B^i_{n\nu}+a\partial_\mu B^i_{n\nu}+C^i_{n\mu}+C^i_{n\nu}+a\partial_\mu C^i_{n\nu})\hat{I}_i - \frac{a^2g^2}{8}[(B^i_{n\mu}+C^i_{n\mu})\hat{I}_i,(B^j_{n\nu}+C^j_{n\nu})\hat{I}_j]}$$

$$\cdot e^{\frac{iag}{2}(B^i_{n\mu}+B^i_{n\nu}+a\partial_\nu B^i_{n\mu}+C^i_{n\mu}+C^i_{n\nu}+a\partial_\nu C^i_{n\mu})\hat{I}_i - \frac{a^2g^2}{8}[(B^i_{n\mu}+C^i_{n\mu})\hat{I}_i,(B^j_{n\nu}+C^j_{n\nu})\hat{I}_j]} + \mathrm{h.\ c.}\}$$

$$= \frac{1}{2g^2}\sum_{n,\mu,\nu} \mathrm{Tr}\left\{\exp\left[-\frac{ia^2g}{2}(\partial_\mu(B^i_{n\nu}+C^i_{n\nu})-\partial_\nu(B^i_{n\mu}+C^i_{n\mu}))\hat{I}_i - \frac{ia^2g^2}{2}f_{ijk}(B^j_{n\mu}+C^j_{n\mu})(B^k_{n\nu}+C^k_{n\nu})\hat{I}_i\right] + \mathrm{h.\ c.}\right\}.$$

若记

$$F^i_{n\mu\nu} = \partial_\mu(B^i_{n\nu}+C^i_{n\nu}) - \partial_\nu(B^i_{n\mu}+C^i_{n\mu}) + gf_{ijk}(B^j_{n\mu}+C^j_{n\mu})(B^k_{n\nu}+C^k_{n\nu}), \tag{2.24}$$

则

$$A_B \approx \frac{1}{2g^2}\sum_{n,\mu,\nu}\mathrm{Tr}(e^{-\frac{ia^2g}{2}F^i_{n\mu\nu}\hat{I}_i} + h.\ c.) = \frac{1}{2g^2}\sum_{n,\mu,\nu}\mathrm{Tr}\left(2 - \frac{a^4g^2}{4}F^i_{n\mu\nu}F^j_{n\mu\nu}\hat{I}_i\hat{I}_j + \cdots\right).$$

上式的高次项对于 $a\to 0$ 的连续极限无贡献，故可略去，不计 A_B 内的常数项，则有

$$A_B \approx -\frac{1}{4}a^4\sum_{n,\mu,\nu}F^i_{n\mu\nu}F^i_{n\mu\nu}.$$

当 $a\to 0$ 时，有极限值

$$\lim_{a\to 0} A_B = \int d^4x\left(-\frac{1}{4}F^i_{\mu\nu}F^i_{\mu\nu}\right). \tag{2.25}$$

因此，(2.18) 式是在点阵上定域规范不变且在 $a\to 0$ 时有通常连续极限的点阵作用量.

三、群 G 是手征群的情形

当群 G 是手征群时，费米子的质量由 Higgs 场来生成. 我们以群 $G=SU(N)_L\times SU(N)_R$ 为例给出陪集空间纯规范场 $SU(N)_L\times SU(N)_R/SU(N)$ 的点阵形式. 在群的流形上选取适当的局部坐标系，群 G 的元素 $g(x)$ 可以表示成 $g(x)=e^{i\hat{a}\gamma_5}e^{i\hat{b}}$，其中 $\hat{a}=a^l(x)\hat{I}_l$，$\hat{b}=b^l(x)\hat{I}_l$，而 $\hat{I}_l$ 是子群 $H=SU(N)$ 的生成元 ($l=1,\cdots,N^2-1$). 子群 H 的元素 $h(x)$ 可以表示成 $e^{i\hat{b}}$，陪集 G/H 的元素 $\phi(x)$ 可以表示成 $e^{i\hat{a}\gamma_5}$.

在群 G 上定域规范不变的拉氏函数是

$$\mathscr{L}^{(B)} = -\frac{1}{4}F^{l(A)}_{\mu\nu}F^{l(A)}_{\mu\nu} - \bar{\Psi}\gamma_\mu(\partial_\mu+\hat{B}_\mu)\Psi - G\bar{\Psi}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\Phi + \frac{1-\gamma_5}{2}\Phi^+\right)\Psi$$
$$-\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\{(\partial_\mu\Phi^+ + \hat{B}_{\mu L}\Phi^+ - \Phi^+\hat{B}_{\mu R})(\partial_\mu\Phi + \hat{B}_{\mu R}\Phi - \Phi\hat{B}_{\mu L})\}$$
$$-V\left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Phi^+\Phi\right), \tag{3.1}$$

其中 Ψ 是费米子场，Φ 是 Higgs 场，$F^{l(A)}_{\mu\nu}$ 是子群 H 上的规范场强，$\hat{B}_\mu$ 是由陪集纯规范场构成的群 G 上的规范势，$\hat{B}_{\mu L}$、$\hat{B}_{\mu R}$ 由下式确定

$$\hat{B}_\mu = \frac{1+\gamma_5}{2}\hat{B}_{\mu L} + \frac{1-\gamma_5}{2}\hat{B}_{\mu R}. \tag{3.2}$$

在拉氏函数(3.1)中陪集元素没有明显地表示出来，这对给出陪集空间纯规范场的点阵形式是不方便的，为此需要写出显含陪集元素的拉氏函数。将特定的陪集元素 ϕ_0 表示成 $e^{i\hat{\theta}_0\gamma_5}$，则

$$\hat{B}_\mu = e^{i\hat{\theta}_0\gamma_5}(\partial_\mu + \hat{A}_\mu)e^{-i\hat{\theta}_0\gamma_5} = \frac{1+\gamma_5}{2}e^{i\hat{\theta}_0}(\partial_\mu + \hat{A}_\mu)e^{-i\hat{\theta}_0} + \frac{1-\gamma_5}{2}e^{-i\hat{\theta}_0}(\partial_\mu + \hat{A}_\mu)e^{i\hat{\theta}_0},$$

与(3.2)式比较可以得到

$$\hat{B}_{\mu L} = e^{i\hat{\theta}_0}(\partial_\mu + \hat{A}_\mu)e^{-i\hat{\theta}_0}, \quad \hat{B}_{\mu R} = e^{-i\hat{\theta}_0}(\partial_\mu + \hat{A}_\mu)e^{i\hat{\theta}_0} \tag{3.3}$$

因此可将 $\mathscr{L}^{(B)}$ 写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^{(B)} = &\frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\hat{F}^{(A)}_{\mu\nu}\hat{F}^{(A)}_{\mu\nu} - \bar{\Psi}\gamma_\mu(\partial_\mu + e^{i\hat{\theta}_0\gamma_5}\partial_\mu e^{-i\hat{\theta}_0\gamma_5} + e^{i\hat{\theta}_0\gamma_5}\hat{A}_\mu e^{-i\hat{\theta}_0\gamma_5})\Psi \\ &- \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\{[\partial_\mu\Phi^+ + e^{i\hat{\theta}_0}(\partial_\mu + \hat{A}_\mu)e^{-i\hat{\theta}_0}\Phi^+ - \Phi^+ e^{-i\hat{\theta}_0}(\partial_\mu + \hat{A}_\mu)e^{i\hat{\theta}_0}] \\ &\cdot [\partial_\mu\Phi + e^{-i\hat{\theta}_0}(\partial_\mu + \hat{A}_\mu)e^{i\hat{\theta}_0}\Phi - \Phi e^{i\hat{\theta}_0}(\partial_\mu + \hat{A}_\mu)e^{-i\hat{\theta}_0}]\} \\ &- G\bar{\Psi}\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\Phi + \frac{1-\gamma_5}{2}\Phi^+\right)\Psi - V\left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Phi^+\Phi\right).\end{aligned} \tag{3.4}$$

拉氏函数(3.4)在下列群 G 上的定域规范变换下不变

$$\begin{cases}\Psi' = e^{i\hat{a}\gamma_5}e^{i\hat{b}}\Psi; \quad \Phi' = e^{-i\hat{a}}e^{i\hat{b}}\Phi e^{-i\hat{b}}e^{-i\hat{a}} \\ \hat{A}'_\mu = e^{i\hat{b}'}(\partial_\mu + \hat{A}_\mu)e^{-i\hat{b}'}; \quad \hat{\theta}'_0 = \hat{\theta}'.\end{cases} \tag{3.5}$$

而 $\hat{\theta}'$、$\hat{b}'$ 由下列方程决定

$$e^{i\hat{a}\gamma_5}e^{i\hat{b}}e^{i\hat{\theta}_0\gamma_5} = e^{i\hat{\theta}'\gamma_5}e^{i\hat{b}'}. \tag{3.6}$$

为了写出体系在点阵上的作用量，我们仍把子群 H 上的矢量规范场 $\hat{A}_\mu$ 定义在键上，把费米子场 Ψ、Higgs 场 Φ 和陪集纯规范场 θ_0 定义在格点上，分别记为 $\hat{A}_{n\mu}$、Ψ_n、Φ_n 和 θ^0_n。引入如下的点阵上的 Higgs 场的协变微分

$$D_\mu\Phi_n = \frac{1}{a}(e^{-i\hat{\theta}^0_n}U_{n\mu}e^{i\hat{\theta}^0_{n+\hat{\mu}}}\Phi_{n+\hat{\mu}}e^{i\hat{\theta}^0_{n+\hat{\mu}}}U^+_{n\mu}e^{-i\hat{\theta}^0_n} - \Phi_n), \tag{3.7}$$

其中 $U_{n\mu} = e^{a\hat{A}_{n\mu}}$。点阵上的定域规范变换定义为

$$\begin{cases}\Psi'_n = e^{i\hat{a}_n\gamma_5}e^{i\hat{b}_n}\Psi_n \\ \Phi'_n = e^{-i\hat{a}_n}e^{i\hat{b}_n}\Phi_n e^{-i\hat{b}_n}e^{-i\hat{a}_n} \\ U'_{n\mu} = e^{i\hat{b}'_n}U_{n\mu}e^{-i\hat{b}'_{n+\hat{\mu}}} \\ \hat{\theta}^{0\prime}_n = \hat{\theta}'_n,\end{cases} \tag{3.8}$$

而 $\hat{b}'_n$、$\hat{\theta}'_n$ 满足条件

$$e^{i\hat{a}_n\gamma_5}e^{i\hat{b}_n}e^{i\hat{\theta}^0_n\gamma_5} = e^{i\hat{\theta}'_n\gamma_5}e^{i\hat{b}'_n}. \tag{3.9}$$

或者

$$\begin{aligned}&e^{i\hat{a}_n}e^{i\hat{b}_n}e^{i\hat{\theta}^0_n} = e^{i\hat{\theta}'_n}e^{i\hat{b}'_n}, \\ &e^{-i\hat{a}_n}e^{i\hat{b}_n}e^{-i\hat{\theta}^0_n} = e^{-i\hat{\theta}'_n}e^{i\hat{b}'_n}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

由(3.7)式所引入的 Higgs 场的协变微分在定域变换(3.8)之下的变换性质与点阵上 Higgs 场的变换性质相同，事实上，

$$(D_\mu\Phi_n)' = \frac{1}{a}\left(e^{-i\hat{\theta}_0{}'_n} U'_{n\mu} e^{i\hat{\theta}_0{}'_{n+\hat{\mu}}} \Phi'_{n+\hat{\mu}} e^{i\hat{\theta}_0{}'_{n+\hat{\mu}}} U^{+\prime}_{n\mu} e^{-i\hat{\theta}_0{}'_n} - \Phi'_n\right)$$

$$= e^{-i\hat{a}_n} e^{i\hat{b}_n} (D_\mu\Phi_n) e^{-i\hat{b}_n} e^{-i\hat{a}_n}.$$

在 $a\to 0$ 时，(3.7) 式趋于通常连续情形下的 Higgs 场的协变微分。将 $U_{n\mu}$、$e^{i\hat{\theta}_{0\,n+\hat{\mu}}}$ 和 $\Phi_{n+\hat{\mu}}$ 展开到 a 的一次项，代入(3.7)式，得到

$$D_\mu\Phi_n \approx \frac{1}{a}\{e^{-i\hat{\theta}_{0n}}(1 + a\hat{A}_{n\mu})(e^{i\hat{\theta}_{0n}} + a\partial_\mu e^{i\hat{\theta}_{0n}})(\Phi_n + a\partial_\mu\Phi_n)$$

$$\cdot(e^{i\hat{\theta}_{0n}} + a\partial_\mu e^{i\hat{\theta}_{0n}})(1 - a\hat{A}_{n\mu})e^{-i\hat{\theta}_{0n}} - \Phi_n\},$$

当 $a\to 0$ 时，上式即趋向于

$$\lim_{a\to 0} D_\mu\Phi_n = \partial_\mu\Phi + \hat{B}_{\mu R}\Phi - \Phi\hat{B}_{\mu L}.$$

现在可以写下体系在点阵上的作用量

$$A = \frac{1}{2g^2}\sum_{n,\mu,\nu}\mathrm{Tr}(U_{n\mu}U_{n+\hat{\mu},\nu}U^+_{n+\hat{\nu},\mu}U^+_{n\nu} + h.c.) - k\sum_{n,\mu}\bar{\Psi}_n\gamma_\mu e^{i\hat{\theta}_{0n}\gamma_5} U_{n\mu} e^{-i\hat{\theta}_{0\,n+\hat{\mu}}\gamma_5}\Psi_{n+\hat{\mu}}$$

$$+ k\sum_{n,\mu}\bar{\Psi}_{n+\hat{\mu}}\gamma_\mu e^{i\hat{\theta}_{0\,n+\hat{\mu}}\gamma_5} U^+_{n\mu} e^{-i\hat{\theta}_{0n}\gamma_5}\Psi_n - Ga^4\sum_n\bar{\Psi}_n\left(\frac{1+\gamma_5}{2}\Phi_n + \frac{1-\gamma_5}{2}\Phi^+_n\right)\Psi_n$$

$$+ \frac{a^2}{4}\sum_{n,\mu}\mathrm{Tr}(e^{i\hat{\theta}_{0n}}U_{n\mu}e^{-i\hat{\theta}_{0\,n+\hat{\mu}}}\Phi_{n+\hat{\mu}}e^{-i\hat{\theta}_{0\,n+\hat{\mu}}}U^+_{n\mu}e^{i\hat{\theta}_{0n}}\Phi_n + h.\ c.)$$

$$- \frac{5a^2}{4}\sum_n\mathrm{Tr}(\Phi^+_n\Phi_n) - a^4\sum_n V\left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\Phi^+_n\Phi_n\right), \tag{3.11}$$

其中 $k = \frac{a^3}{2}$. 容易验证作用量(3.11)在定域变换(3.8)下保持不变.

为了讨论(3.11)式的连续极限，我们逐项进行分析。第一项，完全类似于(2.25)式，在 $a\to 0$ 时有

$$\lim_{a\to 0}\frac{1}{2g^2}\sum_{n,\mu,\nu}\mathrm{Tr}(U_{n\mu}U_{n+\hat{\mu},\nu}U^+_{n+\hat{\nu},\mu}U^+_{n\nu} + h.\ c.) = \int d^4x\frac{1}{2g^2}\mathrm{Tr}\,\hat{F}^{(A)}_{\mu\nu}\hat{F}^{(A)}_{\mu\nu}.$$

第二、三项，在对 $\Psi_{n+\hat{\mu}}$、$U_{n\mu}$ 和 $e^{i\hat{\theta}_{0\,n+\hat{\mu}}}$ 按 a 展开到一次项之后可以写为

$$-k\sum_{n,\mu}\bar{\Psi}_n\gamma_\mu e^{i\hat{\theta}_{0n}\gamma_5}(1 + a\hat{A}_{n\mu})(e^{-i\hat{\theta}_{0n}\gamma_5} + a\partial_\mu e^{-i\hat{\theta}_{0n}\gamma_5})(\Psi_n + a\partial_\mu\Psi_n)$$

$$+ k\sum_{n,\mu}(\bar{\Psi}_n + a\partial_\mu\bar{\Psi}_n)\gamma_\mu(e^{i\hat{\theta}_{0n}\gamma_5} + a\partial_\mu e^{i\hat{\theta}_{0n}\gamma_5})(1 - a\hat{A}_{n\mu})e^{-i\hat{\theta}_{0n}\gamma_5}\Psi_n$$

$$\approx -a^4\sum_{n,\mu}\bar{\Psi}_n\gamma_\mu(\partial_\mu + e^{i\hat{\theta}_{0n}\gamma_5}\partial_\mu e^{-i\hat{\theta}_{0n}\gamma_5} + e^{i\hat{\theta}_{0n}\gamma_5}\hat{A}_{n\mu}e^{-i\hat{\theta}_{0n}\gamma_5})\Psi_n,$$

上式右边已经略去了散度项. 第五、六项可以改写为

$$-\frac{a^4}{4}\sum_{n,\mu}\mathrm{Tr}\left\{\frac{1}{a}(e^{i\hat{\theta}_{0n}}U_{n\mu}e^{-i\hat{\theta}_{0\,n+\hat{\mu}}}\Phi^+_{n+\hat{\mu}}e^{-i\hat{\theta}_{0\,n+\hat{\mu}}}U^+_{n\mu}e^{i\hat{\theta}_{0n}} - \Phi^+_n)\right.$$

$$\left.\cdot\frac{1}{a}(e^{-i\hat{\theta}_{0n}}U_{n\mu}e^{i\hat{\theta}_{0\,n+\hat{\mu}}}\Phi_{n+\hat{\mu}}e^{i\hat{\theta}_{0\,n+\hat{\mu}}}U^+_{n\mu}e^{-i\hat{\theta}_{0n}} - \Phi_n)\right\}$$

$$= -\frac{a^4}{4}\sum_{n,\mu}\mathrm{Tr}\{(D_\mu\Phi_n)^+(D_\mu\Phi_n)\}.$$

总括起来，当 $a\to 0$ 时有

$$\lim_{a\to 0} A = \int d^4x\mathscr{L}^{(B)}, \tag{3.12}$$

因此，(3.11)式是在点阵上保持定域规范不变且在 $a\to 0$ 时回到通常连续极限的作用量.

四、陪集纯规范场对体系禁闭性质的影响

在前面两节里我们写出了层子体系在点阵上的作用量．为了讨论陪集纯规范场对体系禁闭性质的影响，我们可以计算点阵上的流-流传播子．按照格点规范理论，在点阵上计算场论的传播子可以用相应的物理量的统计平均值来代替．现在举一个简单的例子来说明这种计算方法．当群 G 不是手征群而且群空间的拓扑性质为平凡时，通过引入陪集空间纯规范场 $\phi_0(x)$，可以由在子群 H 上定域规范不变的拉氏函数 $\mathscr{L}^{(A)}$ 构造一个在群 G 上定域规范不变的拉氏函数 $\mathscr{L}^{(B)}$．显然拉氏函数 $\mathscr{L}^{(A)}$ 和 $\mathscr{L}^{(B)}$ 仅仅相差一个群 G 上的规范变换，例如取规范条件 $\phi_0(x)=1$，$\mathscr{L}^{(B)}$ 就化为 $\mathscr{L}^{(A)}$．我们举出这种平庸的情况为例子，目的是指出在明显保留陪集纯规范场时进行的一些计算和取可重整规范时的计算结果是一致的．在现在所讨论的情形下，体系在点阵上的作用量可以写为

$$\begin{aligned}A = &-c\sum_n \bar{\Psi}_n\Psi_n + k\sum_{n,\mu}\bar{\Psi}_n(1-\gamma_\mu)\phi_n^0 U_{n\mu}\phi_{n+\hat{\mu}}^{0^{-1}}\Psi_{n+\hat{\mu}}\\ &+ k\sum_{n,\mu}\bar{\Psi}_{n+\hat{\mu}}(1+\gamma_\mu)\phi_{n+\hat{\mu}}^0 U_{n\mu}^+\phi_n^{0^{-1}}\Psi_n\\ &+\frac{1}{2g^2}\sum_{n,\mu,\nu}\mathrm{Tr}(U_{n\mu}U_{n+\hat{\mu},\nu}U_{n+\hat{\nu},\mu}^+U_{n\nu}^+ + h.\ c.),\end{aligned} \tag{4.1}$$

其中 $U_{n\mu}=e^{-iagA_{n\mu}^l \hat{I}_l}=e^{a\hat{A}_{n\mu}}$，而 $\hat{I}_l$ 是子群 H 的生成元 $(l=1,\cdots,n_H)$，$A_{n\mu}^l$ 是子群 H 上的矢量规范场，ϕ_n^0 是陪集纯规范场．点阵上的流-流传播子为

$$D_{l,o}=\frac{1}{Z}\int\prod_{n,\mu}dU_{n\mu}\prod_n d\phi_n^0\prod_n d\Psi_n d\bar{\Psi}_n\bar{\Psi}_l\Gamma\Psi_l\bar{\Psi}_o\Gamma_0\Psi_o e^A, \tag{4.2}$$

其中

$$Z=\int\prod_{n,\mu}dU_{n\mu}\prod_n d\phi_n^0\prod_n d\Psi_n d\bar{\Psi}_n e^A, \tag{4.3}$$

而作用量 A 由(4.1)式给出，$\int\prod_{n,\mu}dU_{n\mu}$ 代表子群上的不变积分，Γ、Γ_0 代表各种 γ 矩阵．

通常在点阵上计算 (4.2) 式都是将 e^A 按 k 的幂次进行展开[4]，先进行费米子的积分．利用 Grassman 数的积分性质

$$\int d\xi\xi = 1,\qquad \int d\xi = 0$$

可知，在展开式里只有 $\bar{\Psi}_n(1-\gamma_\mu)\phi_n^0U_{n\mu}\phi_{n+\hat{\mu}}^{0^{-1}}\Psi_{n+\hat{\mu}}$ 和 $\bar{\Psi}_{n+\hat{\mu}}(1+\gamma_\mu)\phi_{n+\hat{\mu}}^0U_{n\mu}^+\phi_n^{0^{-1}}\Psi_n$ 首尾相联构成封闭迴路的项才对积分有贡献．我们先看一种最简单的情形，即 l、0 两个格点是点阵上(11)和(00)两点(如图 1 示)的情形．这时在 k 的最低次近似下，(4.2)式可以

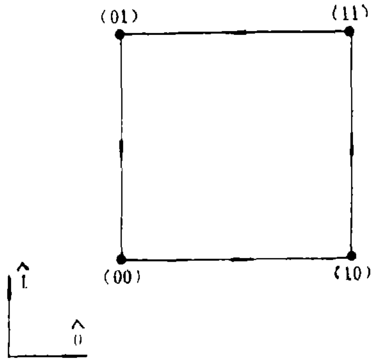

图 1

写成

$$
\begin{aligned}
D_{11,00} \sim\ & k^4 \int \prod_{n,\mu} dU_{n\mu} \prod_n d\phi_n^0 \prod_n d\Psi_n d\bar{\Psi}_n \bar{\Psi}_{11} \Gamma \Psi_{11} \bar{\Psi}_{00} \Gamma_0 \Psi_0 \\
& \bar{\Psi}_{00}(1-\gamma_0)\phi_{00}^0 U_{00,0} \phi_{10}^{0^{-1}} \Psi_{10} \bar{\Psi}_{10}(1-\gamma_1)\phi_{10}^0 U_{10,1}\phi_{11}^{0^{-1}}\Psi_{11} \\
& \bar{\Psi}_{11}(1+\gamma_0)\phi_{11}^0 U_{01,0}^{+}\phi_{01}^{0^{-1}}\Psi_{01}\bar{\Psi}_{01}(1+\gamma_1)\phi_{01}^0 U_{00,1}^{+}\phi_{00}^{0^{-1}}\Psi_{00} e^{-c\sum_n \bar{\Psi}_n \Psi_n} e^{A_0} \\
=\ & k^4 \int \prod_{n,\mu} dU_{n\mu} \prod_n d\phi_n^0 \prod_n d\Psi_n d\bar{\Psi}_n \bar{\Psi}_{00}(1-\gamma_0)\phi_{00}^0 U_{00,0}\phi_{10}^{0^{-1}}\Psi_{10} e^{-c\bar{\Psi}_{10}\Psi_{10}} \bar{\Psi}_{10} \\
& (1-\gamma_1)\phi_{10}^0 U_{10,1}\phi_{11}^{0^{-1}}\Psi_{11}\bar{\Psi}_{11}\Gamma\Psi_{11} e^{-c\bar{\Psi}_{11}\Psi_{11}} \bar{\Psi}_{11}(1+\gamma_0)\phi_{11}^0 U_{01,0}^{+}\phi_{01}^{0^{+}}\Psi_{01} e^{-c\bar{\Psi}_{01}\Psi_{01}} \\
& \bar{\Psi}_{01}(1+\gamma_1)\phi_{01}^0 U_{00,1}^{+}\phi_{00}^{0^{-1}}\Psi_{00}\bar{\Psi}_{00}\Gamma_0\Psi_{00} e^{-c\bar{\Psi}_{00}\Psi_{00}} \cdot e^{-c\sum_n{}' \bar{\Psi}_n \Psi_n} e^{A_0},
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

这里 $\sum_n{}'$ 表示对点阵上格点的求和不包括图示的四个格点在内，而式中

$$
A_0 = \frac{1}{2g^2} \sum_{n,\mu,\nu} \mathrm{Tr}\,(U_{n\mu} U_{n+\hat{\mu},\nu} U_{n+\hat{\nu},\mu}^{+} U_{n\nu}^{+} + h.\ c.). \tag{4.5}
$$

注意到(4.4)式中费米子场 Ψ_n 既带有旋量空间指标又带有群空间指标，设 $U_{n\mu}$ 和 ϕ_n^0 都是$N\times N$矩阵（N是群G的表示的维数)，则可将 Ψ_n 的这些指标显示地写出为 $(\Psi_n)_\alpha^i$，其中下标 α 表示旋量指标，上标 i 表示群空间指标． 把(4.4)式所含的各种指标明确地写出，再利用关系式

$$
\int d\Psi_n d\bar{\Psi}_n (\Psi_n e^{-c\bar{\Psi}_n\Psi_n}\bar{\Psi}_n)_{\alpha\beta}^{ij} = c^{4N-1}\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}, \tag{4.6}
$$

$$
\int d\Psi_n d\bar{\Psi}_n (\Psi_n \bar{\Psi}_n \Gamma \Psi_n e^{-c\bar{\Psi}_n\Psi_n}\bar{\Psi}_n)_{\alpha\beta}^{ij} = -c^{4N-2}\delta_{ij}\Gamma_{\alpha\beta}, \tag{4.7}
$$

可得

$$
\begin{aligned}
D_{11,00} \sim & -k^4\, \mathrm{Tr}\,[(1-\gamma_0)(1-\gamma_1)\Gamma(1+\gamma_0)(1+\gamma_1)\Gamma_0] \int \prod_{n,\mu} dU_{n\mu} \prod_n d\phi_n^0 \\
& \times \mathrm{Tr}\,(\phi_{00}^0 U_{00,0}\phi_{10}^{0^{-1}} \phi_{10}^0 U_{10,1}\phi_{11}^{0^{-1}} \phi_{11}^0 U_{01,0}^{+}\phi_{01}^{0^{-1}} \phi_{01}^0 U_{00,1}^{+}\phi_{00}^{0^{-1}}) e^{A_0},
\end{aligned}
$$

可见在对费米子场积分之后陪集纯规范场将自动消去，而陪集积分的不变测度又是归一化的[3]，在略去常数因子之后，上式可以写为

$$
D_{11,00} \sim \int \prod_{n,\mu} dU_{n\mu}\, \mathrm{Tr}\,(U_{00,0}U_{10,1}U_{01,0}^{+}U_{00,1}^{+}) e^{A_0}. \tag{4.8}
$$

在一般情形下，当 l、0 是点阵上任意两个格点时，同样的计算可以得到

$$D_{lo} \sim \int \prod_{n,\mu} dU_{n\mu} W(c) e^{A_0}, \tag{4.9}$$

其中 c 是经过点阵上 l、o 两个格点而且具有最少键数的某条迴路，而

$$W(c) = \mathrm{Tr}\left(\prod_{c} U_{n\mu}\right) \tag{4.10}$$

是子群 H 上的 Wilson 迴路算子。因此，在我们所讨论的情形下，由点阵上的流-流传播子的计算得到子群 H 上 Wilson 迴路算子的规范场平均值，这表示体系的禁闭性质完全由子群 H 所决定。在强耦合极限下，如果所考虑的群是紧致群，则由 Wilson 定理可知这时体系处于禁闭相[4]。

当群 G 是平征群或子群 H 上的矢量规范场含有奇异性时，陪集纯规范场对于体系禁闭性质的影响我们将在另外的文章中讨论。

参　考　文　献

[1] 周光召、杜东生、阮图南，*Scientia Sinica*, **22**(1979), 37.
[2] 周光召，*Scientia Sinica*, **23**(1980), 431.
[3] Zhou Guang-Zhao, Ruan Tu-nan, *Journal of CUST*, **11**(1981), 15, & Proceedings of the 1980 Guangzhou Conference on Theoretical Particle Physics, p. 902.
[4] K. G. Wilson, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 2445.

LATTICE FORMULATION OF THE PURE GAUGE FIELDS ON COSET SPACE

Ruan Tu-nan　Jing Si-cong　Liu Zu-wei
(University of Science and Technology of China)

Abstract

In this paper we construct a lattice formulation of the pure gauge fields on a coset space in the cases of a group G with non-trivial topological property and of a chiral group G, and present a local gauge invariant action of a quark system on a four-dimensional Euclidean space lattice, which has the continuum limit as usual. For non-chiral group with trivial topological property, it is shown that the coset pure gauge fields have no influence on the confinement properties of the quark system by calculating lattice current-current propagator when the coset pure gauge fields remain manifest.