第 6 卷 第 1 期　　高能物理与核物理　　Vol. 6, No. 1
1982 年 1　　PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS　　Jan., 1982

$U(3)$ 群 C–G 级数公式

曾 高 坚
(湖南师范学院)

摘　　要

作为工作[1]的推广,本文给出了一个一般的 $U(3)$ 群 C–G 级数公式. 这个公式是非常优美而有效的.

$U(3)$ 群的不可约表示常用 $[m_1, m_2, m_3]$ 表示,这里整数 m_i 满足 $m_1 \geqslant m_2 \geqslant m_3$. 对 $SU(3)$ 群, $[m_1, m_2, m_3]$ 和 $[m_1 - m_3, m_2 - m_3, 0]$ 是等价的[2],因此,为简单计,最好令 $m_3 = 0$, 即用 $[m_1, m_2, 0]$ 来表示不可约表示. $[m_1, m_2, 0]$ 和工作[1]使用的记号 $R(\mu, \lambda)$ 之间的关系是: $m_1 - m_2 = \mu$, $m_2 = \lambda$[5].

在作者的 $SU(3)$ 群 C–G 级数公式中[1],以 $m_1 - m_2$ 代 μ, $m_2 - m_3$ 代 λ, $m_1 - m_3$ 代 $\lambda + \mu$, 并稍许作点变化,便可得 $U(3)$ 群 C–G 级数公式:

定理 在 $U(3)$ 群 C–G 级数

$$[M_1, M_2, M_3] \otimes [m_1, m_2, m_3] = \sum_{(m_1' m_2' m_3')} \oplus N([m_1', m_2', m_3'])[m_1', m_2', m_3'] \tag{1}$$

中, $[m_1', m_2', m_3']$ 为

$$m_1' = M_1 + m_1 - n, \quad m_2' = M_2 + m_2 - k, \quad m_3' = M_3 + m_3 + n + k, \tag{2}$$

式中正整数 n, 整数 k 决定于

$$0 \leqslant n \leqslant n_{\max}, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} n_{\max} \triangleq \min \Big\{ & M_1 - M_3,\ m_1 - m_3,\ M_1 - M_2 + m_1 - m_2, \\ & \frac{1}{2}(M_1 - M_2 + 2m_1 - m_2 - m_3), \\ & \frac{1}{2}(m_1 - m_2 + 2M_1 - M_2 - M_3), \\ & \frac{1}{3}(2M_1 - M_2 - M_3 + 2m_1 - m_2 - m_3) \Big\}, \end{aligned}$$

$$k_{\min} \leqslant k \leqslant k_{\max}, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} k_{\max} \triangleq \min \Big\{ & M_2 - M_3,\ m_2 - m_3,\ M_1 - M_3 - n,\ m_1 - m_3 - n, \\ & \frac{1}{2}(M_2 - M_3 + m_2 - m_3 - n) \Big\}, \end{aligned}$$

本文 1980 年 11 月 7 日收到.

表 1

n	k	m_1'	m_2'	m_3'	d	N
0	0	24	14	6	990	1
	1	24	13	7	798	1
	2	24	12	8	585	1
1	−1	23	15	6	855	1
	0	23	14	7	720	2
	1	23	13	8	561	2
	2	23	12	9	384	1
2	−2	22	16	6	693	1
	−1	22	15	7	612	2
	0	22	14	8	504	3
	1	22	13	9	375	2
	2	22	12	10	231	1
3	−2	21	16	7	480	1
	−1	21	15	8	420	2
	0	21	14	9	336	3
	1	21	13	10	234	2
	2	21	12	11	120	1
4	−2	20	16	8	315	1
	−1	20	15	9	273	2
	0	20	14	10	210	3
	1	20	13	11	132	2
	2	20	12	12	45	1
5	−2	19	16	9	192	1
	−1	19	15	10	165	2
	0	19	14	11	120	3
	1	19	13	12	63	2
6	−2	18	16	10	105	1
	−1	18	15	11	90	2
	0	18	14	12	60	3
	1	18	13	13	21	1
7	−2	17	16	11	48	1
	−1	17	15	12	42	2
	0	17	14	13	24	2
8	−2	16	16	12	15	1
	−1	16	15	13	15	1
	0	16	14	14	6	1

$$k_{\min} = \max\{-n, -M_1 + M_2, -m_1 + m_2, n - M_1 + M_2 - m_1 + m_2\}$$

这里记号Ω表示取等于或小于 min{　} 的最大整数．而 $[m_1', m_2', m_3']$ 的重数为

$$N = M_1 - M_2 + m_1 - m_2 - n + 1 - (M_1 - M_2 - n)\theta(M_1 - M_2 - n)$$
$$-(m_1 - m_2 - n)\theta(m_1 - m_2 - n) - \theta(n - m_1 + m_2 - 1)(k - M_2$$

$$
\begin{aligned}
&+ M_3 + m_1 - m_2)\theta(k - M_2 + M_3 + m_1 - m_2) - \theta(n - M_1 + M_2 \\
&- 1)(k - m_2 + m_3 + M_1 - M_2)\theta(k - m_2 + m_3 + M_1 - M_2) \\
&- \theta(m_1 - m_2 - n)(n + k - M_2 + M_3)\theta(n + k - M_2 + M_3) \\
&- \theta(M_1 - M_2 - n)(n + k - m_2 + m_3)\theta(n + k - m_2 + m_3) \\
&+ k[1 - \theta(k)]
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$
\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{6}
$$

公式(1)—(6)适用于任意度的不可约表示的直乘，具有最大的普遍性．它对直乘的两个不可约表示的字母明显地对称，因此看去是优美的．它用起来很方便，因为只要知道直乘的两个不可约表示的字母，便可进行运算，而且运算是极为简单的．读者比较一下以前人们做出的工作，例如文献[2, 3]，便可知公式(1)—(6)的优越性．

为说明公式(1)—(6)的正确性和有效性，我们举出下面的例子．计算过程列在表内，结果为：

$$
\begin{aligned}
&[10, 8, 2]^{(105)} \otimes [14, 6, 4]^{(162)} = [24, 14, 6]^{(990)} \oplus [24, 13, 7]^{(798)} \\
&\oplus [24, 12, 8]^{(585)} \oplus [23, 15, 6]^{(855)} \oplus 2[23, 14, 7]^{(720)} \oplus 2[23, 13, 8]^{(561)} \\
&\oplus [23, 12, 9]^{(384)} \oplus [22, 16, 6]^{(693)} \oplus 2[22, 15, 7]^{(612)} \oplus 3[22, 14, 8]^{(504)} \\
&\oplus 2[22, 13, 9]^{(375)} \oplus [22, 12, 10]^{(231)} \oplus [21, 16, 7]^{(480)} \oplus 2[21, 15, 8]^{(420)} \\
&\oplus 3[21, 14, 9]^{(336)} \oplus 2[21, 13, 10]^{(234)} \oplus [21, 12, 11]^{(120)} \oplus [20, 16, 8]^{(315)} \\
&\oplus 2[20, 15, 9]^{(273)} \oplus 3[20, 14, 10]^{(210)} \oplus 2[20, 13, 11]^{(132)} \oplus [20, 12, 12]^{(45)} \\
&\oplus [19, 16, 9]^{(192)} \oplus 2[19, 15, 10]^{(165)} \oplus 3[19, 14, 11]^{(120)} \oplus 2[19, 13, 12]^{(63)} \\
&\oplus [18, 16, 10]^{(105)} \oplus 2[18, 15, 11]^{(90)} \oplus 3[18, 14, 12]^{(60)} \oplus [18, 13, 13]^{(21)} \\
&\oplus [17, 16, 11]^{(48)} \oplus 2[17, 15, 12]^{(42)} \oplus 2[17, 14, 13]^{(24)} \oplus [16, 16, 12]^{(15)} \\
&\oplus [16, 15, 13]^{(15)} \oplus [16, 14, 14]^{(6)}.
\end{aligned}
$$

(右上角数字表示度数)．读者在审查这个例子时，要记起 $U(3)$ 群不可约表示 $[m_1, m_2, m_3]$ 的度为[2,4]：

$$
d = \frac{1}{2}(m_1 - m_2 + 1)(m_2 - m_3 + 1)(m_1 - m_3 + 2) \tag{7}
$$

将公式(1)—(6)运用于 SU_3 群时，可令 $M_3 = m_3 = 0$，并将 $[m_1', m_2', m_3']$ 换以 $[m_1' - m_3', m_2' - m_3', 0]$，因为表征 SU_3 群不可约表示时，用两个非负整数即够．这是再次强调的．

参　考　文　献

[1] 曾高坚，高能物理与核物理，**5**(1981)，82.

[2] J. D. Louck: *Ame. J. Phy.*, **38**(1970), 3.

[3] L. C. Biedenharn and J. D. Louck, *J. Math. Phy.*, **13**(1972), 1985.

[4] Susumu OKUBO: *Prog. Theor. Phy.*, **27**(1962), 1949.

[5] J. P. Draayer and Yoshimi Akiyama, *J. Math. Phy.*, 14(1973), 1904.

A GENERAL FORMULA ON C-G SERIES OF $U(3)$ GRONP

ZENG GAO-JIAN
(*Hunan Teacher's College*)

ABSTRACT

As a generalization of the work [1], a general formula on C-G series of $U(3)$ group is given. It is beautiful and effective.