

# 光子-核子散射的双谱函数和 $\gamma + p \rightarrow p + \pi^+ + \pi^-$ 非弹性截面

宋孝同 王民昌  
(杭州大学)

## 摘 要

本文将带区近似法<sup>[1-3]</sup>推广到光子-核子散射过程。由  $s$  道弹性么正条件导出了光子-核子散射的带区谱函数和  $s$  道散射振幅的吸收部分,由此计算了光生  $\pi$  介子的非弹性截面,并与实验作了比较。

## 一、运动学和么正条件

我们只考虑如图1的  $s$  道  $2\pi$  中间态,由于守恒定律的限制,  $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi \rightarrow \gamma\gamma$  只能通过总同位旋为零的道,因此不必标出  $N$  和  $\bar{N}$  的同位旋指标,并且末态双光子流也只有同位标量部分。

设  $(p_1, p_2), (q_1, q_2), (k_1, k_2)$  分别是  $(N_1, \bar{N}_2), (\pi_1, \pi_2), (\gamma_1, \gamma_2)$  的四动量,  $(\alpha, \beta)$  是中间态  $\pi$  介子的同位旋指标,  $(\epsilon_1, \epsilon_2)$  是光子的极化四矢量。

定义如下的不变量

$$\begin{cases} t = -(p_1 + p_2)^2 = -(q_1 + q_2)^2 = -(k_1 + k_2)^2, \\ s = -(p_1 - k_1)^2; s' = -(p_1 - q_1)^2; s'' = -(q_1 - k_1)^2, \\ \bar{s} = 2M^2 - s - t; \bar{s}' = 2(M^2 + m^2) - s' - t; \\ \bar{s}'' = 2m^2 - s'' - t, \end{cases} \quad (1)$$

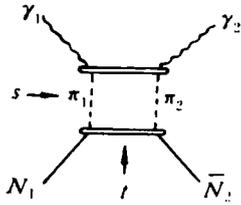


图 1

其中  $M$  和  $m$  是核子和  $\pi$  介子的静质量, 本文采用的度规是  $p^2 =$

$p_\mu p_\mu = p^2 - E^2$ , 狄拉克矩阵  $\gamma_\mu$  及  $\gamma_5$  均取为厄米的, 并取  $\hbar = c = 1$ 。

过程  $N\bar{N} \rightarrow \gamma\gamma$  的  $S$  矩阵元可写为<sup>[4]</sup>

$$S = i(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - k_1 - k_2) \sqrt{\frac{M^2}{4p_{10}p_{20}k_{10}k_{20}}} \langle \gamma_1 \gamma_2 | T | N_1 \bar{N}_2 \rangle, \quad (2)$$

其中

$$\langle \gamma_1 \gamma_2 | T | N_1 \bar{N}_2 \rangle = \epsilon_{2\mu} \bar{v}(p_2) \mathcal{M}_{\mu\nu} u(p_1) \epsilon_{1\nu}, \quad (3)$$

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = A_1 \frac{P'_\mu P'_\nu}{P'^2} + A_2 \frac{N_\mu N_\nu}{N^2} + A_3 \frac{P'_\mu N_\nu - P'_\nu N_\mu}{(P'^2 N^2)^{1/2}} i\gamma_5 + A_4 \frac{P'_\mu P'_\nu}{P'^2} i\gamma \cdot K$$

$$+ A_5 \frac{N_\mu N_\nu}{N^2} i\gamma K + A_6 \frac{P'_\mu N_\nu + P'_\nu N_\mu}{(P'^2 N^2)^{1/2}} i\gamma_5 i\gamma K. \quad (4)$$

式中  $A_i = A_i(t, s, \bar{s})$ ,  $i = 1 \cdots 6$ ;  $P = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)$ ;  $K = \frac{1}{2}(k_1 - k_2)$ ;  $Q = k_1 + k_2$ ;  
 $P'_\mu = P_\mu - \frac{P \cdot K}{K^2} K_\mu$ ;  $N'_\mu = i\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} P'_\nu K_\rho Q_\lambda$ .

对于过程  $\pi\pi \rightarrow \gamma\gamma$ ,  $S$  矩阵元可写为<sup>[5]</sup>

$$S = i(2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 - q_1 - q_2) \sqrt{\frac{1}{16k_{10}k_{20}q_{10}q_{20}}} \langle \gamma_1 \gamma_2 | T | \pi_1 \pi_2 \rangle,$$

其中  $\langle \gamma_1 \gamma_2 | T | \pi_1 \pi_2 \rangle = \epsilon_{2\mu} m_{\mu\nu} \epsilon_{1\nu}$ ;

$$m_{\mu\nu} = D_1^{(0)}(t, s'') \delta_{\mu\nu} + 2t D_2^{(0)}(t, s'') \Delta_\mu \Delta_\nu. \quad (5)$$

而  $\Delta_\mu = \frac{1}{2}(q_1 - q_2)_\mu$

对于过程  $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ , 相应<sup>[6]</sup>

$$\langle \pi_1 \pi_2 | T | N_1 \bar{N}_2 \rangle = \bar{v}(p_2) \{ -a^{(0)}(t, s') + i\gamma \cdot \Delta b^{(0)}(t, s') \} u(p_1). \quad (6)$$

根据  $\epsilon$  道么正条件, 只取  $2\pi$  中间态, 则在质心系可得  $\mathcal{M}_{\mu\nu}$  的吸收部分为

$$\begin{aligned} Abs_{\pi\pi} \mathcal{M}_{\mu\nu} &= \frac{-|\mathbf{q}|}{32\pi^2 \sqrt{\epsilon}} \int dQ_{\hat{q}} \{ -a^{(0)}(t, s') + i\gamma \cdot \Delta b^{(0)}(t, s') \} \\ &\times \{ D_1^{(0)}(t, s'') \delta_{\mu\nu} + D_2^{(0)}(t, s'') 2t \Delta_\mu \Delta_\nu \}. \end{aligned} \quad (7)$$

上式两边均已将旋量  $\bar{v}(p_2)$  和  $u(p_1)$  略去不写,  $|\mathbf{q}|$  是  $\pi$  介子在  $\epsilon$  道质心系三维动量的大小, 而  $\hat{q}$  是单位矢量  $\mathbf{q}/|\mathbf{q}|$ . (5)、(6)、(7) 式中的上指标 (0) 表示这些振幅是  $\epsilon$  道总同位旋为零的振幅。

## 二、谱函数的表示式

以 (4) 式代入 (7) 式左边, 利用关系式  $P'_\mu \cdot N'_\mu = 0$  以及  $\bar{v}(p_2)(i\gamma P + M)u(p_1) = 0$  等, 可以求得六个振幅的  $\epsilon$  道吸收部分 (见附录 B)

$$\left\{ \begin{aligned} Abs_{\pi\pi} A_1^{(\epsilon)} &= c(t) \int dQ_{\hat{q}} \left\{ a^{(+)}(t, s') + \frac{f_1}{f} M b^{(+)}(t, s') \right\} \left\{ d_1^*(t, s'') - \frac{8f_1^2}{f} d_2^*(t, s'') \right\}, \\ Abs_{\pi\pi} A_2^{(\epsilon)} &= c(t) \int dQ_{\hat{q}} \left\{ a^{(+)}(t, s') + \frac{f_1}{f} M b^{(+)}(t, s') \right\} \left\{ d_1^*(t, s'') \right. \\ &\quad \left. + \frac{2tf_3}{t - 4M^2} \sin^2 \phi_1 \cdot d_2^*(t, s'') \right\}, \\ Abs_{\pi\pi} A_3^{(\epsilon)} &= 0, \\ Abs_{\pi\pi} A_4^{(\epsilon)} &= -c(t) \int dQ_{\hat{q}} \left\{ \frac{f_2}{f} b^{(+)}(t, s') \right\} \left\{ d_1^*(t, s'') - \frac{8f_1^2}{f} d_2^*(t, s'') \right\}, \\ Abs_{\pi\pi} A_5^{(\epsilon)} &= -c(t) \int dQ_{\hat{q}} \left\{ \frac{f_2}{f} b^{(+)}(t, s') \right\} \left\{ d_1^*(t, s'') + \frac{2tf_3}{t - 4M^2} \sin^2 \phi_1 \right. \\ &\quad \left. \times d_2^*(t, s'') \right\}, \end{aligned} \right. \quad (8)$$

$$\left[ Abs, A_b^{(s)} = -c'(t, s) \int d\Omega_{\hat{q}} \left\{ a^{(+)} + \frac{f_3}{t - 4M^2} M b^{(+)} \right\} \{ f_1 f_3^{1/2} \sin \phi_1 \cdot d_2^*(t, s') \} \right]$$

其中  $\sin \phi_1 = \hat{q} \cdot (\hat{p} \times \hat{k}) / |\hat{q} \times \hat{p}|$ , 如图2, 并且

$$\left\{ \begin{aligned} c(t) &= \frac{|\mathbf{q}|}{32\pi^2 \sqrt{3t}}; \quad c'(t, s) = \frac{\sqrt{3} c(t)}{M} \cdot \frac{[t(t - 4M^2)]^{1/2}}{f(t, s)}; \\ f &= f(t, s) = \frac{1}{4} \{ st + (s - M^2)^2 \}, \\ f_1 &= f_1(t, s, s', s'') = \frac{1}{4} \left\{ \frac{t}{2} (s - s' + s'') + (s - M^2)(s' - m^2) \right\}, \\ f_2 &= f_2(t, s, s', s'') = \frac{1}{4} \left\{ \frac{t}{2} (s + s' - s'') + (s - M^2)(s' - M^2 - m^2) + 2M^2(s'' - m^2) \right\}, \\ f_3 &= f_3(t, s') = 4M^2 m^2 - s't - (s' - M^2 - m^2)^2, \\ f_4 &= f_4(t, s') = t + 2(s' - M^2 - m^2). \end{aligned} \right. \quad (9)$$

在导出(8)式时,曾利用了如下一些关系式<sup>[6,7]</sup>

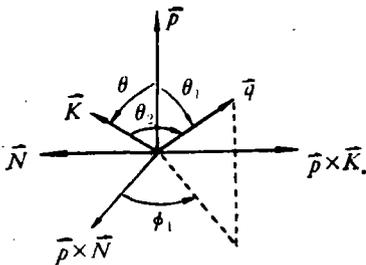


图 2

$$\left\{ \begin{aligned} a^{(0)} &= \sqrt{6} a^{(+)}, \quad b^{(0)} = \sqrt{6} b^{(+)}, \\ D_{1,2}^{(0)} &= \sqrt{\frac{1}{3}} (2D_{1,2}^c + D_{1,2}^n), \\ d_{1,2} &= 2D_{1,2}^c + D_{1,2}^n. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

s 道振幅的同位旋分解是<sup>[4]</sup>

$$A_i(s, t) = A_i^{(s)}(s, t) + \tau_3 A_i^{(u)}(s, t), \quad (11)$$

并且

$$A_i^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{6}} A_i^{(0)}. \quad (12)$$

利用  $a^{(+)}, b^{(+)}, d_1, d_2$  等振幅的单色散关系(固定  $t$ , 对  $s, \bar{s}$ ) 以及下列公式(积分号前的  $\Delta$  表示取积分在复  $s$  平面正实轴上的跳跃)

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \int d\Omega_{\hat{q}} \frac{1}{(s_1 - s')(s_2 - s'')} &= \frac{2\pi^2}{|\mathbf{q}|} \cdot \frac{1}{[K(t, s, s_1, s_2)]^{1/2}}, \\ \Delta \int d\Omega_{\hat{q}} \frac{\sin \phi_1}{(s_1 - s')(s_2 - s'')} &= 0, \\ \Delta \int d\Omega_{\hat{q}} \frac{\sin^2 \phi_1}{(s_1 - s')(s_2 - s'')} &= \frac{2\pi^2}{|\mathbf{q}|} \\ &\quad \times \frac{2pf_2(t, s, s_1, s_2) + p^2[K(t, s, s_1, s_2)]^{1/2}}{f(t, s)f_3(t, s_1)}. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

最后可得谱函数的表示式(上标  $(s)$  表示同位标量部分)

$$\left\{ \begin{aligned}
 \rho_1^{(s)}(s, t) &= \frac{1}{8\sqrt{3} \pi^2} \int ds_1 \int ds_2 \left\{ a_i^{(+)}(s_1, t) + \frac{f_1(t, s, s_1, s_2)}{f(t, s)} M b_i^{(+)}(s_1, t) \right\} \\
 &\quad \times \left\{ d_{1s}^*(s_2, t) - \frac{8f_1^2}{f} d_{2s}^*(s_2, t) \right\} \frac{1}{[tK(t, s, s_1, s_2)]^{1/2}}, \\
 \rho_2^{(s)}(s, t) &= \frac{1}{8\sqrt{3} \pi^2} \int ds_1 \int ds_2 \left\{ a_i^{(+)}(s_1, t) + \frac{f_1}{f} M b_i^{(+)}(s_1, t) \right\} \\
 &\quad \times \left\{ d_{1s}^* + \frac{tK(t, s, s_1, s_2)}{2f} d_{2s}^* \right\} \frac{1}{[tK(t, s, s_1, s_2)]^{1/2}}, \\
 \rho_3^{(s)}(s, t) &= \rho_6^{(s)}(s, t) = 0, \\
 \rho_4^{(s)}(s, t) &= -\frac{1}{8\sqrt{3} \pi^2} \int ds_1 \int ds_2 \left\{ \frac{f_2}{f} b_i^{(+)} \right\} \left\{ d_{1s}^* - \frac{8f_1^2}{f} d_{2s}^* \right\} \\
 &\quad \times \frac{1}{[tK(t, s, s_1, s_2)]^{1/2}}, \\
 \rho_5^{(s)}(s, t) &= -\frac{1}{8\sqrt{3} \pi^2} \int ds_1 \int ds_2 \left\{ \frac{f_2}{f} b_i^{(+)} \right\} \left\{ d_{1s}^* + \frac{tK(t, s, s_1, s_2)}{2f} d_{2s}^* \right\} \\
 &\quad \times \frac{1}{[tK(t, s, s_1, s_2)]^{1/2}},
 \end{aligned} \right. \quad (14)$$

其中

$$\left\{ \begin{aligned}
 K(t, s, s_1, s_2) &= \frac{1}{4} f(s, s_1, s_2) [t - t_0(s, s_1, s_2)], \\
 f(s, s_1, s_2) &= [s - (\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2})^2] [s - (\sqrt{s_1} - \sqrt{s_2})^2], \\
 t_0(s, s_1, s_2) &= \frac{4}{f(s, s_1, s_2)} \{ m^2 s^2 + [(s_1 - M^2 - m^2)(s_2 - m^2) \\
 &\quad - 2M^2 m^2] s - M^2(s_1 - s_2)(s_2 - m^2) + M^4 s_2 \}.
 \end{aligned} \right. \quad (15)$$

### 三、光生介子的非弹性截面

在带区近似下,  $\gamma$ - $N$  散射振幅  $s$  道吸收部分可表示为

$$\text{Im}_s A_i^{(s)}(s, t) \approx \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\rho_i(s, t')}{t' - t} dt'. \quad (16)$$

$t_0$  和  $t_1$  是  $s$  值固定时, 第一带区的积分下限和上限, 利用光学定理以及  $\gamma$ - $NS$  道散射振幅的三维表示式, 取朝前散射, 则得(在所取近似下,  $\text{Im}_s A_i^{(v)}(s, t) = 0$ )

$$\sigma_{\gamma p}^{in}(s) \approx \sigma_{\gamma n}^{in}(s) \approx \frac{1}{M} \left\{ M \text{Im}_s A_i^{(s)}(s, 0) - \frac{M^2}{p\sqrt{s}} \text{Im}_s A_1^{(s)}(s, 0) \right\}. \quad (17)$$

为了具体算出截面的值, 我们对 (11) 式中的  $a_i^{(+)}$ ,  $b_i^{(+)}$ ,  $d_{1s}$ ,  $d_{2s}$  作如下的选择:

(i)  $\gamma + p \rightarrow \Delta^{++} + \pi^- \rightarrow \gamma + p$ . (如图 3). 不难求得, 单  $\pi$  介子项:

$$d_{1s} = 0, \quad d_{2s} = \frac{4\pi e^2}{\sqrt{3} \cdot t} \delta(s_2 - m^2) \quad (18)$$

$\Delta^{++}$  共振项:

$$a_i^{(+)}(s_1, t) = 4\pi[\alpha_1(s_1) + \alpha_2(s_1)t], \quad (19)$$

$$M b_i^{(+)}(s_1, t) = 4\pi[\beta_1(s_1) + \beta_2(s_1)t]. \quad (20)$$

(ii)  $\gamma + p \rightarrow \rho^0 + p \rightarrow \gamma + p$  (如图4), 类似可求得, 单核子项:

$$a_i^{(+)} = 0, \quad b_i^{(+)} = \pi g_r^2 \delta(s_1 - M^2) \quad (21)$$

$\rho$  共振项:

$$\begin{cases} d_{1s} = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{m_\rho}{m}\right)^2 f_{\rho\pi\gamma}^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{(s_2 - m_\rho^2)^2}{4s_2}\right] \delta(s_2 - m_\rho^2), \\ d_{2s} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \left(\frac{m_\rho}{m}\right)^2 f_{\rho\pi\gamma}^2 \frac{1}{4s_2} \delta(s_2 - m_\rho^2). \end{cases} \quad (22)$$

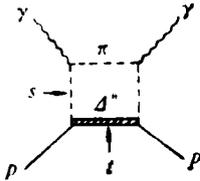


图 3

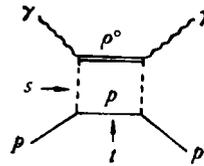


图 4

由此可求得  $\gamma + p \rightarrow p + \pi^+ + \pi^-$  (只包括  $\Delta^{++}\pi^-$  和  $\rho^0 p$  末态) 的截面, 与实验数据的比较见图5。计算中我们取耦合常数

$$g_r^2/4\pi \approx 14; \quad f_{\rho\pi\gamma}^2/4\pi = 1.0 \times 10^{-4} \text{ (相应于 } \Gamma_{\rho^0 \rightarrow \pi^0 \gamma} \approx 0.12 \text{ MeV)}$$

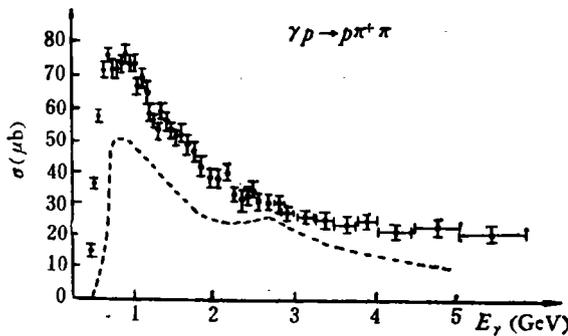


图 5

$\Delta^{++}$  共振项的参数取自 [8, 10] 的相移分析, 因此在本文的计算中只有  $f_{\rho\pi\gamma}^2/4\pi$  是一个可调节的参数。

### 四、 讨 论

由理论曲线与实验数据<sup>[9]</sup>比较可以看出:

(i)  $E_\gamma = 0.9 \text{ GeV}$  处的峰主要来自  $\gamma p \rightarrow \Delta^{++}\pi^-$  的边缘碰撞产生, 但是在  $E_\gamma < 2 \text{ GeV}$

的区域内,理论值较实验值为小,这可能是由于带区近似没有考虑非边缘碰撞的贡献。而实验证据表明,在  $E_\gamma$  小的区域内,大动量转移事件对  $\Delta^{++}$  产生有不小的贡献。

(ii) 在  $E_\gamma > 2\text{GeV}$  的能量区域内,  $\gamma p \rightarrow \rho^0 p$  的产生起主要作用,按本文的计算,直到  $E_\gamma < 5\text{GeV}$ ,理论值虽然偏低,但与实验值的变化趋势还是相似的,这表明带区近似在此能量区域内有合理的因素。

(iii) 在计算中(见(16)式)略去了  $t_1 > 16m^2$  的谱函数的影响,这相当于略去大动量转移碰撞的贡献。另外还略去了  $u$  (或  $\bar{s}$ ) 道谱函数的贡献。就第一带区而言,这部分贡献约为

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{t_u} \frac{\rho_u(s, t')}{t' - t} dt'$$

由于积分上限  $t_u \leq -29m^2$ , 因此当  $t = 0$  时,它对(13)式中  $Im_s A_i(s, 0)$  的贡献估计将是比较小的。

(iv) 由(17)式以及近似地  $\sigma_{\gamma p}^T \approx \sigma_{\gamma n}^T$  (弹性截面),因而有

$$\sigma_{\gamma p}^T \approx \sigma_{\gamma n}^T.$$

实验上虽然  $\sigma_{\gamma p}^T > \sigma_{\gamma n}^T$ , 但在  $s$  很大时,  $\sigma_{\gamma p}^T \rightarrow \sigma_{\gamma n}^T$ 。

(v) 我们在另文中利用带有形状因子的单粒子交换模型计算了  $\gamma p \rightarrow \Delta^{++} \pi^-$  和  $\gamma p \rightarrow \rho^0 p$  等过程,但由于带区近似法主要是利用色散关系以低能散射(如本文的  $\gamma \pi$  和  $\pi N$  散射)数据作为输入来计算高能  $\gamma p$  散射振幅,因此出发点和计算方法都和单粒子交换模型(按最近分析,  $\gamma p \rightarrow \rho^0 p$  的主要机制是交换 Pomeron 的衍射产生)不同,虽然两种方法的计算结果可能差不多,但不能肯定这两种方法是等价的。

## 附 记

本文的主要公式及计算结果早在 1966 年前已经完成,虽然当时的实验数据还很少,但理论计算与实验点的趋势是一致的,1968 年以后,  $\gamma p$  的大量实验数据发表以后,我们重新整理本文并与最近的实验数据作了比较。

### 附录 A : 道质心系运动学

按定义,在  $s$  道质心系中有

$$\begin{cases} k_1 = (\mathbf{k}, ik); k_2 = (-\mathbf{k}, ik); k = |\mathbf{k}|; q_1 = (\mathbf{q}, i\omega); q_2 = (-\mathbf{q}, i\omega); \\ \omega = \sqrt{\mathbf{q}^2 + m^2}; p_1 = (\mathbf{p}, i\delta); p_2 = (-\mathbf{p}, i\delta); \delta = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2}, \end{cases} \quad (\text{A1})$$

因此

$$K = \frac{1}{2}(k_1 - k_2) = (\mathbf{k}, i0), \Delta = \frac{1}{2}(q_1 - q_2) = (\mathbf{q}, i0), P = \frac{1}{2}(p_1 - p_2) = (\mathbf{p}, i0), \quad (\text{A2})$$

$$K^2 = \mathbf{k}^2 = \frac{t}{4}; \Delta^2 = \mathbf{q}^2 = \frac{t}{4} - m^2; P^2 = \mathbf{p}^2 = \frac{t}{4} - M^2 \quad (\text{A3})$$

$$P \cdot K = \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = \frac{1}{2} \left( s + \frac{t}{2} - M^2 \right), P \cdot \Delta = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{2} \left( s' + \frac{t}{2} - M^2 - m^2 \right)$$

$$K \cdot \Delta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{q} = \frac{1}{2} \left( s'' + \frac{t}{2} - m^2 \right) \quad (\text{A4})$$

定义

$$\begin{cases} Q_\mu = (k_1 + k_2)_\mu = (0, i\sqrt{t}) \\ P'_\mu = P_\mu - \frac{P \cdot K}{K^2} K_\mu = \left( p - \frac{p \cdot k}{k^2} k, i0 \right) \\ N_\mu = i\epsilon_{\mu\nu\rho\lambda} P'_\nu K_\rho Q_\lambda = (-\sqrt{t}(\mathbf{p} \times \mathbf{k}), i0) \end{cases} \quad (\text{A5})$$

由此可得

$$N \cdot \Delta = N \cdot \mathbf{q} = -q\sqrt{t} |\mathbf{p} \times \mathbf{k}| \sin \theta_1 \sin \phi_1. \quad (\text{见图 2}) \quad (\text{A6})$$

不难证明

$$P'_\mu \cdot N_\mu = 0; K_\mu \cdot N_\mu = 0; Q_\mu N_\mu = 0. \quad (\text{A7})$$

在质心系 ( $t$  道中)

$$P'^2 = \frac{4}{t} (\mathbf{p} \times \mathbf{k})^2 = \frac{1}{t} (s\bar{s} - M^4), N^2 = t(\mathbf{p} \times \mathbf{k})^2 = \frac{t}{4} (s\bar{s} - M^4). \quad (\text{A8})$$

由此不难求得

$$\begin{cases} 2t \frac{(P' \cdot \Delta)^2}{P'^2} = \frac{32}{s\bar{s} - M^4} [f_1(t, s, s', s'')]^2, & 2t \frac{(N \cdot \Delta)^2}{N^2} = \frac{2tf_2(t, s')}{t - 4M^2} \sin^2 \phi_1, \\ 2t \frac{(P' \cdot \Delta)(N \cdot \Delta)}{\sqrt{P'^2 N^2}} = \frac{8\sqrt{t}}{\sqrt{s\bar{s} - M^4} \sqrt{t - 4M^2}} [f_3(t, s')]^{1/2} f_1(t, s, s', s'') \sin \phi_1, \end{cases} \quad (\text{A9})$$

其中

$$\begin{cases} f_1(t, s, s', s'') = (P \cdot K)(K \cdot \Delta) - K^2(P \cdot \Delta), \\ f_2(t, s, s', s'') = (K \cdot P)(P \cdot \Delta) - P^2(K \cdot \Delta), \\ f_3(t, s) = (P \cdot K)^2 - P^2 K^2, \end{cases} \quad (\text{A10})$$

以及  $f_3(t, s')$  等表示式均见 (9)。

### 附录 B $t$ 道吸收部分 (8) 式的导出

利用  $P'_\mu \cdot N_\mu = 0$  等式, 由 (4) 式可得

$$\begin{cases} P'_\mu (A_{3s} \mathcal{M}_{\mu\nu}) P'_\nu = P'^2 (A_{1t} + A_4 i\gamma K) \\ N_\mu (A_{3s} \mathcal{M}_{\mu\nu}) N_\nu = N^2 (A_{2t} + A_3 i\gamma K) \\ P'_\mu (A_{3s} \mathcal{M}_{\mu\nu}) N_\nu = \sqrt{P'^2 N^2} i\gamma_s (A_{3t} + A_4 i\gamma K) \end{cases} \quad (\text{B1})$$

其中  $A_{it}$  表示  $A_i$  的吸收部分。以 (7) 式代入上式左边, 则得

$$\begin{cases} A_{1t} + A_4 i\gamma K = \frac{q}{32\pi^2 \sqrt{t}} \int dQ_q \{-a + i(\gamma \cdot \Delta)b\} \left\{ D_1^* + 2t \frac{(P' \cdot \Delta)^2}{P'^2} D_2^* \right\}, \\ A_{2t} + A_3 i\gamma K = \frac{q}{32\pi^2 \sqrt{t}} \int dQ_q \{-a + i(\gamma \cdot \Delta)b\} \left\{ D_1^* + 2t \frac{(N \cdot \Delta)^2}{N^2} D_2^* \right\}, \\ i\gamma_s (A_{3t} + A_4 i\gamma K) = \frac{q}{32\pi^2 \sqrt{t}} \int dQ_q \{-a + i(\gamma \cdot \Delta)b\} \left\{ 2t \frac{(P' \cdot \Delta)(N \cdot \Delta)}{\sqrt{P'^2 N^2}} D_2^* \right\}. \end{cases} \quad (\text{B2})$$

利用  $\bar{v}(p_2)(i\gamma P + M)u(p_1) = \bar{v}(p_2) \left( \frac{i\gamma p_1 + M}{2} - \frac{i\gamma p_2 - M}{2} \right) u(p_1) = 0$  (B2) 式可以写为

$$\begin{cases} -\frac{i\gamma P}{M} A_{1t} + i\gamma K A_4 = \frac{q}{32\pi^2 \sqrt{t}} \int dQ_q \left\{ \frac{i\gamma P}{M} a + i(\gamma \cdot \Delta)b \right\} \{\text{I}\}, \\ -\frac{i\gamma P}{M} A_{2t} + i\gamma K A_3 = \frac{q}{32\pi^2 \sqrt{t}} \int dQ_q \left\{ \frac{i\gamma P}{M} a + i(\gamma \cdot \Delta)b \right\} \{\text{II}\}, \\ i\gamma_s (A_{3t} + i\gamma K A_4) = \frac{q}{32\pi^2 \sqrt{t}} \int dQ_q \left\{ \frac{i\gamma P}{M} a + i(\gamma \cdot \Delta)b \right\} \{\text{III}\}. \end{cases} \quad (\text{B3})$$

式中 {I}, {II}, {III} 代表 (B2) 中相应各式的最后花括号部分, 其并不包括  $r$  矩阵. (B3) 式前二式对于  $r$  矩阵的依赖关系相同, 利用

$$r_\mu r_\nu + r_\nu r_\mu = 2\delta_{\mu\nu},$$

可得

$$\begin{cases} \left( -\frac{P^2}{M} \begin{pmatrix} A_{1s} \\ A_{2s} \end{pmatrix} + (P \cdot K) \begin{pmatrix} A_{4s} \\ A_{5s} \end{pmatrix} \right) = \frac{q}{32\pi^2 \sqrt{t}} \int dQ_q \left\{ \frac{P^2}{M} a + (P \cdot \Delta) b \right\} \begin{pmatrix} \{I\} \\ \{II\} \end{pmatrix}, \\ \left( -\frac{(P \cdot K)}{M} \begin{pmatrix} A_{1s} \\ A_{2s} \end{pmatrix} + K^2 \begin{pmatrix} A_{4s} \\ A_{5s} \end{pmatrix} \right) = \frac{q}{32\pi^2 \sqrt{t}} \int dQ_q \left\{ \frac{P \cdot K}{M} a + (K \cdot \Delta) b \right\} \begin{pmatrix} \{I\} \\ \{II\} \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (B4)$$

由上二式可解得

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} A_{1s} \\ A_{2s} \end{pmatrix} = \frac{q}{32\pi^2 \sqrt{t}} \int dQ_q \left\{ -a - M \frac{(P \cdot K)(K \cdot \Delta) - K^2(P \cdot \Delta)}{(P \cdot K)^2 - P^2 K^2} b \right\} \begin{pmatrix} \{I\} \\ \{II\} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} A_{4s} \\ A_{5s} \end{pmatrix} = \frac{q}{32\pi^2 \sqrt{t}} \int dQ_q \left\{ \frac{(P \cdot K)(P \cdot \Delta) - P^2(K \cdot \Delta)}{(P \cdot K)^2 - P^2 K^2} b \right\} \begin{pmatrix} \{I\} \\ \{II\} \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (B5)$$

利用 (A9)、(A10) 以及 (10)、(12) 等式, 则由 (B5) 可得 (8) 式中  $A_1, A_2, A_4, A_5$  四个振幅  $t$  道吸收部分的表示式.

现在求  $A_3$  和  $A_6$ , 由 (B3) 第 3 式, 两边左乘  $r$ , 和右乘  $r_s$  相加, 考虑到  $r_\mu r_\nu + r_\nu r_\mu = 0$ , 立即可得  $A_3 = 0$ . 如果两边左乘以  $r_\mu P_\mu$  和右乘以  $r_\mu P_\mu$  相加, 则得

$$r_s \sigma_{\mu\nu} P_\mu K_\nu A_6 = \frac{q}{32\pi^2 \sqrt{t}} \int dQ_q \left\{ \frac{P^2}{M} a + (P \cdot \Delta) b \right\} \{III\},$$

其中  $\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i} (r_\mu r_\nu - r_\nu r_\mu)$ . 由此不难求得

$$A_6 = \frac{q}{32\pi^2 \sqrt{t}} \cdot \frac{1}{|p \times k|} \int dQ_q \left\{ \frac{P^2}{M} a + (P \cdot \Delta) b \right\} \{III\}.$$

令  $f_4(t, s') = 4(P \cdot \Delta) = t + 2(s' - M^2 - m^2)$ , 再利用 (10)、(12) 式, 上式化为 (8) 式中的最后一式, 不过下面我们将看到  $A_6$  对谱函数并无贡献.

### 附录 C 谱函数 (14) 式的导出

利用单色散关系

$$\begin{cases} a^{(+)}(t, s') = \frac{1}{\pi} \int ds_1 \frac{a_1^{(+)}(s_1, t)}{s_1 - s'} + \frac{1}{\pi} \int d\bar{s}_1 \frac{a_{\bar{1}}^{(+)}(\bar{s}_1, t)}{\bar{s}_1 - s'}, \\ d_1(t, s'') = \frac{1}{\pi} \int ds_2 \frac{d_{1s}(s_2, t)}{s_2 - s''} + \frac{1}{\pi} \int d\bar{s}_2 \frac{d_{\bar{1}\bar{s}}(\bar{s}_2, t)}{\bar{s}_2 - s''}, \\ b^{(+)}(t, s') \text{ 与 } d_2(t, s'') \text{ 有类似的表示式.} \end{cases} \quad (C1)$$

代入 (8) 式后将出现如下三类积分

$$I_j = \int dQ_q \frac{\sin^j \phi_j}{(s_1 - s')(s_2 - s'')}, \quad (j = 0, 1, 2) \quad (C2)$$

而

$$\frac{1}{(s_1 - s')(s_2 - s'')} = \frac{1}{4pq^2} \cdot \frac{1}{(\lambda_1 - z_1)(\lambda_2 - z_2)}. \quad (C3)$$

其中

$$\lambda_1 = \frac{s_1 + p^2 + q^2}{2pq}; \quad z_1 = \cos \theta_1 = \frac{s' + p^2 + q^2}{2pq},$$

$$\lambda_2 = \frac{s_2 + k^2 + q^2}{2kq}; \quad x_2 = \cos \theta_2 = \frac{s'' + k^2 + q^2}{2kq}.$$

利用

$$x_2 = x x_1 + (1 - x^2)^{1/2} (1 - x_1^2)^{1/2} \cos \phi_1, \quad (C4)$$

则

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{dx_1}{\lambda_1 - x_1} \left[ \int_0^{2\pi} \frac{\sin^l \phi_1}{a + b \cos \phi_1} d\phi_1 \right]. \quad (C5)$$

式中

$$a = \lambda_2 - x x_1, \quad b = -(1 - x^2)^{1/2} (1 - x_1^2)^{1/2}. \quad (C6)$$

由于  $\int_0^{2\pi} \frac{\sin \phi_1 d\phi_1}{a + b \cos \phi_1} \sim [\ln(a + b \cos \phi_1)]_0^{2\pi} = 0$ , 因此  $I_1 = 0$ , 可见  $A_{e_1}$  对谱函数无贡献, 即  $\rho_e(s, t) = 0$ .

积分  $I_0$  是通常的 Mandelstam 积分, 它在复  $s$  平面正实轴上的跳跃为

$$\Delta I_0 = \frac{2\pi^2}{q} \cdot \frac{1}{[K(t, s, s_1, s_2)]^{1/2}}, \quad (C7)$$

其中  $K(t, s, s_1, s_2)$  见 (15) 式.

类似的办法可以求得

$$\Delta I_2 = \frac{2\pi^2}{q} \cdot \frac{2p f_2(t, s, s_1, s_2) + p^2 \sqrt{K(t, s, s_1, s_2)}}{f(t, s) f_2(t, s_1)}. \quad (C8)$$

现在再回来看 (8) 式, 当以 (C1) 式代入 (8) 式后, 取在复  $s$  平面上正实轴上的跳跃, 则得 (以  $A_1$  为例)

$$\begin{aligned} \Delta A b s_1 A_1^{(+)}(t, s) &= c(t) \int ds_1 \int ds_2 \left\{ a_i^{(+)}(s_1, t) + M \frac{f_1}{f} b_i^{(+)}(s_1, t) \right\} \left\{ d_{1e}^*(s_2, t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{8f_1^2}{f} d_{2e}^*(s_2, t) \right\} \frac{\Delta I_0}{\pi^2} + c(t) \int d\bar{s}_1 \int d\bar{s}_2 \left\{ a_i^{(+)}(\bar{s}_1, t) \right. \\ &\quad \left. + M \frac{f_1}{f} b_i^{(+)}(\bar{s}_1, t) \right\} \left\{ d_{1e}^*(\bar{s}_2, t) - \frac{8[f_1(t, s, \bar{s}_1, \bar{s}_2)]^2}{f(t, s)} d_{2e}^*(\bar{s}_2, t) \right\} \\ &\quad \times \frac{\Delta \bar{I}_0}{\pi^2}. \end{aligned}$$

其中  $f_1 = f_1(t, s, \bar{s}_1, \bar{s}_2)$ ,  $\bar{I}_0 = \int dQ_{\bar{e}} \frac{1}{(\bar{s}_1 - \bar{s}')(\bar{s}_2 - \bar{s}'')}$ ,

利用交叉对称关系

$$\begin{cases} a_i^{(+)}(\bar{s}, t) = a_i^{(+)}(s, t); & b_i^{(+)}(\bar{s}, t) = -b_i^{(+)}(s, t), \\ d_{1e,2e}(\bar{s}, t) = d_{1e,2e}(s, t); & f_{1,2}(t, s, \bar{s}_1, \bar{s}_2) = -f_{1,2}(t, s, s_1, s_2), \end{cases} \quad (C9)$$

以及

$$\Delta \bar{I}_0 = \Delta I_0, \quad (C10)$$

可得

$$\begin{aligned} \rho_1^{(+)}(s, t) &= \Delta A b s_1 A_1^{(+)} \\ &= \frac{1}{8\sqrt{3}\pi^2} \int ds_1 \int ds_2 \left\{ a_i^{(+)}(s_1, t) + M \frac{f_1}{f} b_i^{(+)}(s_1, t) \right\} \left\{ d_{1e}^*(s_2, t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{8f_1^2}{f} d_{2e}^*(s_2, t) \right\} \frac{1}{[iK(t, s, s_1, s_2)]^{1/2}}, \end{aligned}$$

这就是 (14) 式中的第一式, 类似地可导出其它各式.

### 参 考 文 献

(1961), 1478.

- [ 2 ] 陈时, 戴元本, 物理学报, **18**(1962), 321; **19**(1963), 398.
- [ 3 ] A. Krzuwicki and J. Wrzuwionko, *Nucl. Phys.*, **41**(1963), 499.
- [ 4 ] A. C. Hearn and E. Leader, *Phys. Rev.*, **126**(1962), 789.
- [ 5 ] M. Gourdin and A. Martin, *Nuovo Cimento*, **17**(1960), 224.
- [ 6 ] W. R. Frazer and J. R. Fulco, *Phys. Rev.*, **117**(1960), 1603.
- [ 7 ] B. R. Desai, *Phys. Rev.*, **124**(1961), 1248.
- [ 8 ] C. G. L. N., *Phys. Rev.*, **106**(1957), 1337.
- [ 9 ] J. Ballam et al., *Phys. Rev.*, **D5**(1972), 545; A. B. B. H. H. M., *Phys. Rev.*, **175**(1968), 1669; Y. Eisenberg et al., *Phys. Rev.*, **D5**(1972), 15.
- [10] J. S. Ball. *Phys. Rev.*, **124**(1961), 2104.

## THE DOUBLE SPECTRAL FUNCTIONS OF PHOTON-NUCLEON SCATTERING AND INELASTIC CROSS-SECTIONS OF

$$\gamma + p \rightarrow p + \pi^+ + \pi^-$$

SONG XIAO-TONG    WANG MIN-CHANG

(Hangzhou University)

### ABSTRACT

Using elastic unitary condition of  $t$  channel, the double spectral function of photon-nucleon scattering and absorbtive parts of scattering amplitude ( $s$  channel) are given. Using date of low energy  $\pi N(3,3)$  resonance  $\rho$  resonance, the photo-production cross-sections of  $\gamma + p \rightarrow p + \pi^+ + \pi^-$  are calculated. The results are compared with the recent experimental data.