第5卷 第2期 高能物理与核物理 Vol. 5, No. 2
1981年3月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS March, 1981

研究简报

广义库仑规范固定不确定性问题

顾鸣皋 李新洲
(复 旦 大 学)

摘 要

对于一类广义库仑规范，存在着一对满足该规范条件的场被规范变换相联系，并且我们改正了 Maskawa-Nakajima 定理的证明.

自从 Gribov[1] 提出在非阿贝尔规范理论中存在规范固定退化问题以来，这方面已有了许多工作. 但是规范固定退化的整个结构还是不清楚的，Maskawa 和 Nakajima[2] 从新的角度进行了讨论，他们解决了在库仑规范条件 $\partial_i A_i = 0$ 下，对于给定的一个规范变换 U，能否联结两个不同的场 A_i 及 ${}^UA_i$ 问题. 他们把结果归结为一条定理，但是我们发现他们所使用的引理是错误的，因此定理的证明是错误的. 因为，若 $\boldsymbol{r} \in \mathfrak{U}_2$，则 $\mathfrak{U}'_2 = \mathfrak{U}_2 + \boldsymbol{r} = \mathfrak{U}_2$. 又因 $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2 = \phi$，于是 $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}'_2 = \phi$ 且 $\boldsymbol{n} \perp (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2)$，$\boldsymbol{r} \in \mathfrak{U}_2$，得 $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = 0$ 即与原引理矛盾.

本文给出了修正的引理，并利用它重新证明 Maskawa-Nikajima 定理，同时我们把定理的结论推广到更一般的情形，即在规范固定为 $\partial_i A_i = c(\boldsymbol{x})$ 时，对于给定的任一规范变换 U，能否联结两个不同场 A_i 及 ${}^UA_i$ 的问题. 本文符号与文献[2]基本一致. 定义规范变换群 G 的子集 $G^{[n]}$ 如下:

$G^{[n]} = \{U \mid$ 在 R^3 中除去一个零测度区域外的秩 $[\Omega] = n$，$U \in G\}$ 其中，$[\Omega]_{ai} = \Omega^a_i$，$U\partial_i U^+ = i\Omega^a_i \tau^a$.

引理: 设 V 为一矢量空间，$\mathfrak{U}_1$ 和 $\mathfrak{U}_2$ 为 V 的子空间，$\boldsymbol{r} \notin \mathfrak{U}_2$，定义集 $\mathfrak{U}'_2 = \boldsymbol{r} + \mathfrak{U}_2$ 及空间 $N = \{\boldsymbol{n} | \boldsymbol{n} \perp (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2)\}$ 即 $N = (\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2) + N$，如果 $(\boldsymbol{r}, N) = 0$，则 $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}'_2 \neq \phi$. (其中符号 ϕ 是空集)

证明: 条件 $(\boldsymbol{r}, N) = 0$ 等价于 $\boldsymbol{r} \subset \mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2$. 因为 $\boldsymbol{r} \notin \mathfrak{U}_2$，可将 $\boldsymbol{r}$ 分解为 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2$，$\boldsymbol{r}_1 \subset \mathfrak{U}_1$，$\boldsymbol{r}_2 \subset \mathfrak{U}_2$ 且 $\boldsymbol{r}_1 \neq 0$，于是有 $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}'_2 = \boldsymbol{r}_1 \neq 0$，引理获证.

但是逆引理并不成立，即从 $(\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}'_2) \neq 0$ 并不能推出 $(\boldsymbol{r}, N) = 0$. 如令 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_3$，其中 $\boldsymbol{r}_1 \subset \mathfrak{U}_1$，$\boldsymbol{r}_3 \subset N$，这时有 $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}'_2 = \boldsymbol{r}_1 \neq \phi$，但是 $(\boldsymbol{r}, N) = (\boldsymbol{r}_3, N) \neq 0$.

下面我们重新证明 Maskawa 和 Nakajima 的结果 (定理 1) 并证明广义库仑规范下的定理.

定理 1: (Maskawa-Nakajima) 对于任一 $U \subset G^{[3]}$，可求得 A_i，使 $\partial_i A_i = 0$，$\partial_i {}^UA_i =$

本文 1979 年 11 月 20 日收到.

0，其中 ${}^UA_i = U^+A_iU + U^+\partial_iU$.

证明：令 $\mathfrak{U}_1 = \mathscr{H}_N(0)$，$\mathfrak{U}_2 = \mathscr{H}_N({}^U\Omega)$，$r = {}^U\Omega$，${}^U\Omega_i \equiv U^+\partial_iU$. 因文献[2]中已证明 $n = 0$，即 $({}^U\Omega, n) = 0$，同时可证 ${}^U\Omega \notin \mathscr{H}_N({}^U\Omega)$. 利用反证法，若 ${}^U\Omega \in \mathscr{H}_N({}^U\Omega)$，则 ${}^U\Omega \perp \mathscr{H}_T({}^U\Omega)$ 于是有

$$\int \mathrm{Tr}{}^U\Omega_i\nabla_i({}^U\Omega)hdx = \int \mathrm{Tr}{}^U\Omega_i\partial_ihdx = -\int \mathrm{Tr}\partial_i{}^U\Omega_ihdx \equiv 0.$$

上式中 $\nabla_i({}^U\Omega)$ 定义为 $\nabla_i({}^U\Omega)f = \partial_if + [{}^U\Omega_i, f]$，根据定义 $\nabla_i({}^U\Omega)h \in \mathscr{H}_T({}^U\Omega)$. 所以上式积分为0. 但是 $\partial_i{}^U\Omega_i \neq 0$（因为在库仑规范 $\partial_iA_i = 0$ 下，$A_i = 0$ 时没有规范固定退化）所以 $\int \partial_i{}^U\Omega_ihdx$ 不恒等零，即 ${}^U\Omega$ 不垂直于 $\mathscr{H}_T({}^U\Omega)$，${}^U\Omega \notin \mathscr{H}_N({}^U\Omega)$ 于是自引理有 $\mathscr{H}_N(0)\cap({}^U\Omega + \mathscr{H}_N({}^U\Omega)) = \{A\} \neq \phi$. 定理1证毕.

下面我们讨论在更一般的规范 $\partial_iA_i = C(x)$ 下定理的推广，其中 $C(x)\subset L^2$，令 $B(x)$ 为方程 $\partial_i^2B = C(x)$ 的解，$B\subset L^2$. 如果在定理2中令 $C(x) = 0$，则 $B(x)$ 也为零，对于任意的 U，都有 $[U, \partial_iB] = 0$，这时我们就回到定理1，所以定理1是定理2的特例.

定理2：对于任一 $U\subset G$[3]，且 $[U, \partial_iB] = 0$，可求得 A_i 使 $\partial_iA_i = C(x)$，$\partial_i{}^UA_i = C(x)$，其中 ${}^UA_i = {}^+UA_iU + U^+\partial_iU$.

证明：引入新的规范势 $A'_i = A_i - \partial_iB$，${}^UA'_i = U^+A'_iU + U^+\partial_iU$，这时 $\delta\|A'_i\|^2 = 0$ 相当于 $\partial_iA_i = C(x)$，因为

$$\delta\|A'_i\|^2 = \delta\int \mathrm{Tr}\, A'^2_idx = 2\int \mathrm{Tr}\, A'_i\nabla_i(A')hdx = -2\int \mathrm{Tr}\,\partial_iA'_ihdx = 0.$$

为了使对任意的 $h(x)$ 都成立，则 $\partial_iA'_i = \partial_iA_i - \partial_i\partial_iB = 0$，所以 $\partial_iA_i = C(x)$. 同样从 $\delta\|{}^UA'_i\|^2 = 0$，可导出 $\partial_i{}^UA'_i = 0$. 限制 U 在 $[U, \partial_iB] = 0$ 的条件下时

$$\begin{aligned}\partial_i{}^UA'_i &= \partial_i[U^+A_iU - U^+\partial_iBU + U^+\partial_iU] = \partial_i[U^+A_iU + U^+\partial_iU - U^+\partial_iBU] \\ &= \partial_i[{}^UA_i - \partial_iB] = \partial_i{}^UA_i - \partial_i^2B = 0,\end{aligned}$$

所以得到 $\partial_i{}^UA_i = C(x)$. 我们在对 U 有限制的条件下，把规范条件 $\partial_iA_i = C(x)$ 化为库仑规范 $\partial_iA'_i = 0$ 问题. 这时我们可以利用定理1，即对于任一规范变换 $U\subset G$[3]，必存在一个 A'_i，有 $\partial_iA'_i = 0$ 及 $\partial_i{}^UA'_i = 0$，于是得到定理2，规范变换 U 在限制 $[U, \partial_iB] = 0$ 的条件下，对于任一 $U\subset G$[3]，必存在 A_i 有 $\partial_iA_i = c(x)$ 及 $\partial_i{}^UA_i = c(x)$.

参考文献

[1] V. N. Gribov, Material for the XII Winter School of the Leningrad Nuclear Research Institute (1977).

[2] T. Maskawa and H. Nakajima, *Prog. Theor. Phys.*, 60(1978), 1526.

GENERAL COULOMB GAUGE FIXING DEGENERACIES

GU MING-GAO　LI XIN-ZHOU

(*Fudan University*)

ABSTRACT

For some gauge transformation of the general coulomb gauge, there exist a pair of fields connected by that gauge transformation. We revise the proof of Maskawa-Nakajima theorem.