第5卷 第1期 高能物理与核物理 Vol. 5, No. 1
1981年1月 PHYSICA ENERGIAE FORTIS ET PHYSICA NUCLEARIS Jan., 1981

能带真空的背景场强

王明中 郑希特 汪克林
(中国科学院成都科技大学) (中国科学技术大学)
冼鼎昌 章正刚
(中国科学院高能物理研究所) (成都地质学院)

摘 要

计算了能带真空在一个半径为 R 的有限三维球体中的背景场强，它一般并不为零. 随 $R \to \infty$ 背景场强趋于零.

所谓真空,过去被理解为: 它一方面是能量的最低态,另方面它又是任何可观测的物理量都是零的状态. 可是 Coleman[1] 在讨论 Schwinger 模型时指出一个有趣的事实: 在这 1 + 1 维空时的模型中,真空态的电场一般并不为零,即存在所谓的背景场强.

若把真空态表示为 $|0\rangle$, 令 T 是使拓朴数改变为 1 的规范变换,由于真空态在规范变换下不变,必有

$$T|0\rangle = e^{i\theta}|0\rangle, \tag{1}$$

Coleman 给出

$$\theta = \frac{2\pi}{e}E, \tag{2}$$

e 是该模型中费米子所带的电荷. 对 $\theta \neq 0$ 的真空就存在着背景场强 $E \neq 0$. (2) 给出了 θ 的物理解释: 它反映着背景场的大小. Coleman 论证了这现象只在 1+1 维的电动力学(Schwinger 模型)中才存在. 在 3 + 1 维的情形里如果仍有背景场强的话,那么真空中产生虚的带电粒子对时,由于背景场强的存在,它们将无限分开而变成一对实的带电粒子,这是不可能的.

Creutz 和 Tudron[2] 在非阿贝尔规范场的情形下通过 T 算符,在时间规范中在一个有限的大球面上讨论了不随空间座标而改变的经典"电场"解 F_{i0} 与经典的 θ 值间的关系,它是在假定理论存在经典极限下得到的. 在量子水平上,在 3 + 1 维非阿贝尔规范均场理论中标志真空的 θ 参量是否与背景场以某种方式的存在有关,仍是一个有待讨论的有趣问题.

如 Coleman 所论证的,在 3 + 1 维的理论中背景场强应为零. 但是,我们设想在一个局域的有限空间中背景场强可以不为零，当这个有限空间趋于无穷大时，背景场强趋于零，这样来排除虚粒子对靠背景场强而变为真实粒子对的可能. 这问题的实际意义在于

本文 1979 年 12 月 19 日收到.

和层子禁闭相联系，有必要讨论靠了某种禁闭机制而与层子一道囿限在一个有限空间区域中的非阿贝规范场和它的背景场的情况．当然，这时的背景场是层子与 Y-M 场相互作用的结果，但这里我们暂不考虑层子．

Y-M 场的真空现在被认为是一个所谓 θ 真空，应用 Bitar-Chang[3] 提出的讨论真空过渡的 MPEP 方法，我们曾得到了物理的 θ 真空用推广的绕数变量 q 的本征态的连续积分的表示[4]．由于现在的 q 是连续变化的，因此，除了 q 为整数的那些态外，一般地，场强不恒为零．现在我们从[4]的 θ 真空出发，计算一下一个有限半径 R 的大球内的场强．一方面考察这背景场强与 R 的关系，另方面也提出一个有限空间背景场强的计算办法．

由于 θ 真空的周期性，我们可以把讨论局限于绕数变量 q 只在 0 与 1 之间变化，要用到[3,4]中如下的几点结果：

(i) 绕数变量 q 与相应的参数 λ 之间的关系

$$q=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2+a^2}}\left(3-\frac{\lambda^2}{\lambda^2+a^2}\right),\ (0\leqslant q\leqslant 1,\ -\infty\leqslant\lambda\leqslant+\infty) \tag{3}$$

其中 a 是表征瞬子大小的参量．

(ii) 绕数变量为 $q(\lambda)$ 的势及场强公式

$$A_0=\frac{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\tau}}{\boldsymbol{x}^2+\lambda^2+a^2}\dot{\lambda};\ \boldsymbol{A}=\frac{\lambda\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{\tau}}{\boldsymbol{x}^2+\lambda^2+a^2}, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{E}=-\frac{2a^2\dot{\lambda}}{(\boldsymbol{x}^2+\lambda^2+a^2)^2}\boldsymbol{\tau};\quad \boldsymbol{B}=-\frac{2a^2}{(\boldsymbol{x}^2+\lambda^2+a^2)^2}\boldsymbol{\tau}. \tag{5}$$

其中 $A_0=A_0^a\frac{\tau^a}{2}$，$\cdots$ 等．

(iii) θ 真空通过 q 变量的本征态 $|q\rangle$ 的积分表示为

$$|\theta\rangle=N_0\int e^{i\theta q}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2mV_n}{n\left(\frac{\theta}{\pi}-n\right)}e^{-2\pi inq}\right]|q\rangle dq. \tag{6}$$

把(5)式改写为

$$E_i^a=-\frac{4a^2\dot{\lambda}}{(\boldsymbol{x}^2+\lambda^2+a^2)^2}\delta_i^a;\ B_i^a=-\frac{4a^2}{(\boldsymbol{x}^2+\lambda^2+a^2)^2}\delta_i^a, \tag{7}$$

显见，除了 q 为整数(目前为 0 或 1)处(对应于 $\lambda=\pm\infty$)以外，对给定的非整数 q，场强在全空间并不为零．由(6)式知道，真正的物理真空 $|\theta\rangle$ 是包含了整数与非整数 q 的 $|q\rangle$ 的一个积分结果，$|\theta\rangle$ 真空有无背景场强也应是由所有 $|q\rangle$ 所对应的场强的贡献来决定．

我们讨论半径 R 为有限的一个球内的情形．

首先注意：(7)式在普遍情况下可以写作

$$E_i^a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=-\frac{4a^2\dot{\lambda}}{[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})^2+\lambda^2+a^2]^2}\delta_i^a,\ B_i^a(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=-\frac{4a^2}{[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})^2+\lambda^2+a^2]^2}\delta_i^a. \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{z}$ 是来自标志瞬子"位置"的参量，$-\infty<z_i<+\infty$，当我们把 Y-M 场限制在一个有限空间中时，其瞬子位置参量可以合理地假定也限制于在这个有限空间范围内选取．因为瞬子解是 Y-M 方程的欧氏解(虚时解)，可以认为是由闵氏空间解作虚时延拓而来，其

空间座标与闵氏空间者相同，所以当闵氏空间的空间座标限定在一个 Ω_R 球中后，相应的瞬子解的位置参数也都限于在该球中选取了．至于瞬子在 Ω 球中在不同 $\boldsymbol{z}$ 位置上的几率则应该是相同的．那么，对一个单瞬子来说，它在不同位置上对在 $\boldsymbol{x}$ 点的"场强"贡献应作为独立事件的贡献来迭加，于是在 Ω_R 球体内 $\boldsymbol{x}$ 点的场强可表示为：（如果 $R \gg a$，那么 Bitar-Chang 的表达式(4)、(5)对有限空间可近似应用）．

$$\bar{E}_i^a(\boldsymbol{x}, \lambda, a) = -\frac{1}{\frac{4\pi}{3}R^3}\int_{\Omega_R}\frac{4a^2\lambda\delta_i^a}{[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})^2+\lambda^2+a^2]^2}d^3z,$$

$$\bar{B}_i^a(\boldsymbol{x}, \lambda, a) = -\frac{1}{\frac{4\pi}{3}R^3}\int_{\Omega_R}\frac{4a^2\delta_i^a}{[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})^2+\lambda^2+a^2]^2}d^3z. \tag{9}$$

积分对半径为 R 的球体 Ω_R 进行，把 z_3 轴选在 $\boldsymbol{x}$ 方向上，$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z} = |\boldsymbol{z}|r\cos\theta$，结果有：$(r = |\boldsymbol{x}|)$．

$$\bar{B}_i^a(r, \lambda, a) = -\frac{1}{\frac{4\pi}{3}R^3}\left\{\frac{\pi}{2r}\ln\frac{(r-R)^2+\lambda^2+a^2}{(r+R)^2+\lambda^2+a^2} + \frac{\pi}{\sqrt{\lambda^2+a^2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{r+R}{\sqrt{\lambda^2+a^2}} - \operatorname{arctg}\frac{r-R}{\sqrt{\lambda^2+a^2}}\right)\right\}4a^2\delta_i^a, \tag{10}$$

从这式子右边乘以 λ 后就给出 $\bar{E}_i^a(r)$ 的表达式．从这里已经可以看出，由于 $\frac{1}{R^3}$ 因子的存在，当 $R\to\infty$ 时，即当我们看无限空间的 Y-M 场时，其背景场强趋于零，这是合理的．

其次：为了把(0,1)区间的 q 对背景场的贡献表达出，应把 λ 通过 q 表示出来．引入

$$\lambda = a\,\mathrm{sh}\,\xi, \tag{11}$$

于是(3)式可化为

$$q = \frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}(3\,\mathrm{th}\,\xi - \mathrm{th}^3\xi)\right]. \tag{12}$$

由(11)、(12)可给出

$$\lambda = \lambda(q). \tag{13}$$

从(6)式我们看到：在 $|\theta\rangle$ 真空中 $|q\rangle$ 本征态出现的几率是

$$W_q = N_0^2\left|1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2mV_n}{n\left(\frac{\theta}{\pi}-n\right)}e^{-2\pi inq}\right|^2. \tag{14}$$

于是，平均规范场强 B_i^a 可表示为

$$\bar{B}_i^a(r) = \int_0^1 W_q\bar{B}_i^a(r, \lambda(q), a)dq. \tag{15}$$

以(10)、(14)代入，则有

$$\bar{B}_i^a(r) = N_0^2\int_0^1 dq\left|1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2mV_n}{n\left(\frac{\theta}{\pi}-n\right)}e^{-2\pi inq}\right|^2\frac{-3a^2\delta_i^a}{R^3}\left\{\frac{1}{2r}\ln\frac{(r-R)^2+\lambda^2(q)+a^2}{(r+R)^2+\lambda^2(q)+a^2}\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\lambda^2(q)+a^2}}\left(\operatorname{arctg}\frac{r+R}{\sqrt{\lambda^2(q)+a^2}}-\operatorname{arctg}\frac{r-R}{\sqrt{\lambda^2(q)+a^2}}\right)\Bigg\} \tag{16}$$

但是,对 $\bar{E}_i^a(r)$ 来说在 $\bar{E}_i^a(r,\lambda)$ 中有 $\dot{\lambda}$ 出现,情况略为复杂一点,由于

$$\dot{\lambda}(q)=\frac{\partial\lambda}{\partial q}\dot{q}=\frac{\partial\lambda}{\partial q}\frac{p}{m}, \tag{17}$$

在绕数空间中,q 作为广义坐标,$p=m\dot{q}$ 为广义动量,所以

$$\begin{aligned}\bar{E}_i^a(r)&=\langle\theta|\bar{E}_i^a(r,\lambda)|\theta\rangle\\&=N_0^2\int_0^1dq\int_0^1dq'\langle q|e^{-i\theta q}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2mV_n}{n\left(\frac{\theta}{\pi}-n\right)}e^{-2\pi inq}\right]\bar{B}_i^a(r,\lambda)\frac{\partial\lambda}{\partial q}\frac{p}{m}\\&\quad\times\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2mV_n}{n\left(\frac{\theta}{\pi}-n\right)}e^{-2\pi inq'}\right]e^{i\theta q'}|q'\rangle.\end{aligned} \tag{18}$$

由于 $|q\rangle$ 是广义坐标的本征态,因而(18)中除 p 外,其余各量中的 q,q' 皆可作为 $|q\rangle$ 的本征值而移出期待值. 而

$$\langle q|p|q'\rangle=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{\infty}pe^{ip(q-q')}dp, \tag{19}$$

故有

$$\begin{aligned}\bar{E}_i^a(r)=&\frac{N_0^2}{m}\int dpdqdq'e^{i(q-q')(p-\theta)}p\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2mV_n}{n\left(\frac{\theta}{\pi}-n\right)}e^{-2\pi inq}\right]\\&\times\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2mV_n}{n\left(\frac{\theta}{\pi}-n\right)}e^{-2\pi inq'}\right]\bar{B}_i^a(r,\lambda(q))\frac{\partial\lambda}{\partial q}.\end{aligned} \tag{20}$$

至此,我们表明原则上可以算出平均场强来. 它们含有 $\frac{1}{R^3}$ 因子,因此在 $R\to\infty$ 时它们趋于零,而在有限空间区域,它一般并不为零.

为了演示的目的,看(16)式中 $r=0$ 的平均场强,

$$\bar{B}_i^a(0)=B(0)\delta_i^a, \tag{21}$$

这里

$$B(0)=-\frac{3a^2N_0^2}{R^3}\int_0^1dq\left|1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2mV_n}{n\left(\frac{\theta}{\pi}-n\right)}e^{-2\pi inq}\right|^2\frac{2}{\sqrt{\lambda^2(q)+a^2}}\operatorname{arctg}\frac{R}{\sqrt{\lambda^2(q)+a^2}}, \tag{22}$$

它是 θ 的函数,如果 $B(0)$ 中可以只保留 V_1,那么

$$\left|1+\frac{2mV_1}{\frac{\theta}{\pi}-1}e^{-i2\pi q}\right|^2=1+\frac{4m^2V_1^2}{\left(1-\frac{\theta}{\pi}\right)^2}+\frac{4mV_1}{\frac{\theta}{\pi}-1}\cos(2\pi q), \tag{23}$$

所以当 $\theta\ll1$ 时

$$B(0)=-\frac{6a^2N_0^2}{R^3}\left[1+4m^2V_1^2\alpha-4mV_1\beta+(2mV_1-1)\frac{4mV_1\theta}{\pi}\right], \tag{24}$$

其中

$$\alpha=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{\lambda^2(q)+a^2}}\operatorname{arctg}\frac{R}{\sqrt{\lambda^2(q)+a^2}}dq,$$

$$\beta=\int_0^1\frac{\cos(2\pi q)}{\sqrt{\lambda^2(q)+a^2}}\operatorname{arctg}\frac{R}{\sqrt{\lambda^2(q)+a^2}}dq.$$

一般认为 θ 的值很小，那么背景场强在 V_1 为主导项的情况下对 θ 的改变并不敏感.

但是这样给出的 $\overline{B_i^a}$ 是规范协变的，如果存在着某种物理的背景场强，那么，它应该是一个与规范选取无关的量．例如，规范场强在内部空间电磁场方向的投影将给出普通的电磁场张量．但不论电磁场的方向如何，由 (21) 定义出的磁场张量将不会为零，因为 $B_1^1=B_2^2=B_3^3\neq 0$．其余分量皆为零，在 $SU(2)$ 内部空间的三个独立方向上皆有不为零之分量，故磁场张量将不为零，因而存在着一个背景磁场，它是 θ 的函数，也是离有限空间中心的距离 r 的函数．我们猜测电场情况也一样.

在有限半径 R 的一个球体空间中这样得出的背景电磁场，也许会在某种"口袋"模型中产生一定的物理效应．然而，这是需要另外研究的问题.

参　考　文　献

[1] S. Coleman, *Ann. Phys.*, (N. Y.) **101** (1976), 239.
[2] M. Creutz and T. N. Tudron, *Phys. Rev.*, **D16** (1977), 2978.
[3] K. M. Bitar and S-J. Chang, *Phys. Rev.*, **D17** (1978), 486.
[4] 王明中、郑希特、汪克林、冼鼎昌、章正刚，高能物理与核物理，**4**(1980)，160.

THE BACKGROUND FIELD STRENGTH OF THE VACUUM WITH THE ENERGY BAND STRUCTURE

WANG MING-ZHONG　ZHENG XI-TE
(*Chengdu University of Science and Technology*)
WANG KE-LIN
(*University of Science and Technology of China*)
XIAN DING-CHANG
(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)
ZHANG ZHENG-GANG
(*Chengdu Institute of Geology*)

ABSTRACT

The background field strength of the vacuum with the energy band structure in a 3-dimensional sphere with a finite radius R is calculated. In general, it is not equal to zero. It tends to zero as $R\rightarrow\infty$.