

从布朗运动观点研究核裂变的速率问题

吴锡真 卓益忠

(中国科学院原子能研究所)

摘 要

本文用布朗运动的观点研究了核裂变的速率问题。以简便的求速率本征值方法解福克-普朗克方程。将粘滞张量、惯量系数、温度作为变形坐标的函数,研究了它们对裂变速率的影响。

一、引 言

迄今为止,计算裂变宽度均采用跃迁态方法^[1]。这个方法建立在复合核态和鞍点态处在热力学平衡这一概念的基础上,本文从另外观点进行裂变速率的研究。早期,克拉麦(Kramer)^[2]曾用布朗运动理论讨论处在位阱中的粒子越过位垒的逃脱问题。但是他使用了准稳态近似解福克-普朗克方程,并且把粘滞张量、核温度、惯量系数等参量都取作与变形无关的常数,这不能很好反映裂变过程特征,尤其不适用于研究核温度接近于位垒高度和高于位垒高度的情况。

本文把核的变形运动看作布朗粒子的扩散运动,把单粒子自由度与变形自由度的耦合(单粒子与运动核壁的作用)比作介质分子对布朗粒子的碰撞作用,核在变形的过程中,在每一变形下都达到局部平衡,因此可以把核温度、粘滞张量等都看成变形坐标的函数。

本文在二中推导了福克-普朗克方程(以下简称F-P方程),给出了速率本征值求解方法;三中给出了计算结果和讨论;四阐述了几点结论。

二、F-P 方程的建立和求解

首先写下两维F-P方程的一般形式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(v, q, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial v} [A_v W(v, q, t)] - \frac{\partial}{\partial q} [A_q W(v, q, t)] \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} [B_{vv} W(v, q, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial q \partial v} [B_{qv} W(v, q, t)] \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} [B_{qq} W(v, q, t)]. \end{aligned} \quad (1)$$

为了求得其中的系数 $A_v, A_q, B_{vv}, B_{vq}, B_{qq}$, 我们从朗之万方程出发, 为了计算简便, 首先考虑一维变形自由度, 即拉长自由度的情况。

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\beta}{m}P + K(q) + A(t). \quad (2)$$

其中: q 是变形坐标; P 是共轭动量; $K(q)$ 是核表面张力与库仑力之和; β 是粘滞张量; m 是惯量系数; $A(t)$ 是无规力。

在每一变形下, 达到局部平衡, 故渐近的速度分布应是麦克斯韦分布, 应用能量均分原理:

$$\langle v^2 \rangle = \frac{kT}{m},$$

其中 T 是核温度, k 是玻尔兹曼常数。

根据朗之万方程, 在没有外力作用时有:

$$\langle v^2 \rangle = v_0^2 e^{-\frac{2\beta}{m}t} + \frac{\alpha}{2\beta m} (1 - e^{-\frac{2\beta}{m}t}).$$

其中: $\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(Q) dQ$, $\phi(Q) = \langle A(t_1)A(t_2) \rangle_{av}$, $Q = t_2 - t_1$, v_0 是初速。

渐近的速度平方的平均值:

$$\langle v^2 \rangle_{\text{渐近}} = \alpha/2\beta m.$$

所以, $\alpha = 2\beta kT$ 。

这样就将含有关联函数 $\langle A(t_1)A(t_2) \rangle$ 的积分用核温度和粘滞张量表示出来, 于是得到全部系数:

$$\begin{aligned} A_q &= v, \\ A_v &= -\beta \frac{v}{m} + \frac{K(q)}{m}, \\ B_{vq} &= 0, \\ B_{qq} &= 0, \\ B_{vv} &= \frac{2\beta kT}{m^2}. \end{aligned}$$

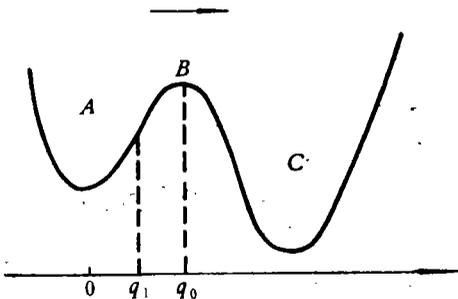


图 1

最后得 F-P 方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(v, q, t)}{\partial t} &= \frac{\beta}{m} W + \frac{\beta}{m} v \frac{\partial W}{\partial v} - \frac{K(q)}{m} \\ &\cdot \frac{\partial W}{\partial v} - v \frac{\partial W}{\partial q} + \frac{\beta kT}{m^2} \frac{\partial^2 W}{\partial v^2}. \quad (3) \end{aligned}$$

求解这个方程, 使用了波拉姆波格 (C. Blomberg) 提出的方法^[3]. 所用的位是由抛物线型平滑连结组成的, 如下图所示, A, C 是位阱, B 是位垒. 初始时刻裂变核处在变形为零的基态位阱中. 由于布朗力的作用, 便通过位垒 B , 扩散到位于 C . 在 t 很大以后,

整个系统达到平衡,成为波尔兹曼分布. 因此分布函数必须由两部分组成,一部分是变化部分,一部分是稳定部分. 根据我们所用的初始条件,稳定部分和变化部分的相对大小取决于两个位阱的相对深度. 当位阱 A 很浅,位阱 C 很深时,在初始时刻,阱 A 中分布函数稳定部分很小,变化部分很大,而在阱 C 中,初始时刻,两个部分总是大小相当,互相抵消. 在阱 A 中,分布函数变化部分的衰减常数(以下称速率本征值)对应着衰变速率,速率本征值通过在位连结点连续条件求解. 初始衰变速率 R 取决于初始分布中稳定部分和变化部分的相对大小. 即:

$$R = - \frac{d}{dt} \iint_{-\infty}^{\infty} [W_0(v, q) + W(v, q, t)] dv dq / \iint_{-\infty}^{\infty} [W_0(v, q) + W(v, q, t)] dv dq$$

$$= \omega \iint_{-\infty}^{\infty} W(v, q, t) dv dq / \iint_{-\infty}^{\infty} [W_0(v, q) + W(v, q, t)] dv dq,$$

ω 称速率本征值.

$W_0(v, q)$ 是分布函数的稳定部分, $W(v, q, t)$ 是分布函数的变化部分. 我们研究裂变速率问题,认为初始时刻在阱 A 中的都是可裂变的,故取 $R = \omega$. 关于分布函数,我们根据问题的需要,主要讨论位阱 A 和位垒 B 上的形式:

分布函数的稳定部分,是波尔兹曼分布,

$$W_0(v, q) = C \exp \left[- \frac{mv^2}{2kT} - \frac{cq^2}{2kT} \right].$$

分布函数的衰减部分:

$$W(v, q, t) = \sum_n e^{-m\nu^2/2kT} H_{cn} \left(\sqrt{\frac{m}{kT}} v \right) \varphi_n(q, t),$$

$$\varphi_n(q, t) = \varphi_n(q) e^{-\omega t},$$

$$H_{cn} \left(\sqrt{\frac{m}{kT}} v \right) = \frac{1}{2^{n/2}} H_n \left(\sqrt{\frac{m}{2kT}} v \right). \tag{4}$$

很显然,当 $v \rightarrow \pm\infty$ 时, $W(v, q, t) \rightarrow 0$, 并且由于 $e^{-m\nu^2/2kT} H_{cn} \left(\sqrt{\frac{m}{kT}} v \right)$ 是一个完全集,所以 $W(v, q, t)$ 总可以按它展开.

将(4)代入(3)得到 $\varphi_n(q)$ 的微分方程组:

$$- \omega \varphi_0(q) = - \left(\frac{kT}{m} \right)^{1/2} \frac{\partial \varphi_1(q)}{\partial q},$$

$$\left(\frac{\beta}{m} - \omega \right) \varphi_1(q) = \frac{K(q)}{(mkT)^{1/2}} \varphi_0(q) - \sqrt{\frac{kT}{m}} \left(\frac{d\varphi_0(q)}{dq} + 2 \frac{d\varphi_2(q)}{dq} \right)$$

.....

$$\left(\frac{n\beta}{m} - \omega \right) \varphi_n(q) = \frac{K(q)}{(mkT)^{1/2}} \varphi_{n-1}(q) - \sqrt{\frac{kT}{m}} \left(\frac{d\varphi_{n-1}(q)}{dq} + (n+1) \frac{d\varphi_{n+1}(q)}{dq} \right).$$

在位阱 A 中 $\varphi_n(q)$ 写成:

$$\varphi_n(q) = (-1)^n e^{-cq^2/4kT} U \left(A - \frac{1}{2} + n, - \sqrt{\frac{c}{kT}} q \right) b_n. \tag{5}$$

其中： C 是位阱曲率， $U(a, x)$ 是抛物柱函数^[6]， A 是待定数， b_n 是待定系数。

易见， $q \rightarrow -\infty$ 时， $\varphi_n(q) \rightarrow 0$ 。

将(5)代入微分方程组得线性方程组：

$$\left. \begin{aligned} \omega \sqrt{\frac{m}{c}} b_0 + b_1 &= 0, \\ \left(\frac{\beta}{(mc)^{1/2}} - \omega \sqrt{\frac{m}{c}} \right) b_1 - Ab_0 - 2b_2 &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ \left(n \frac{\beta}{(mc)^{1/2}} - \omega \sqrt{\frac{m}{c}} \right) b_n - [A + (n-1)]b_{n-1} - (n+1)b_{n+1} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

在位垒上取，

$$\varphi_n(q') = e^{dq'^2/4kT} \left[\Gamma(A' - n + 1)U \left(A' - n + \frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{d}{kT}} q' \right) + (-1)^{n+1} \Gamma(A' - n + 1)U \left(A' - n + \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{d}{kT}} q' \right) \right] b'_n. \quad (5')$$

其中： d 是位垒的曲率， $q' = q - q_0$ ， q_0 是鞍点坐标， $\Gamma(a)$ 是伽马函数。 A' 是待定数， b'_n 是待定系数， $\varphi_0(q) = \int_{-\infty}^{\infty} W(v, q, t) dv$ 是平均几率分布函数， $\varphi_1(q) = \int_{-\infty}^{\infty} vW(v, q, t) dv$ 是几率流。

在位垒上 $\varphi_0(q')$ 是反对称的，它在鞍点左边为正，右边为负，鞍点上为0， $\varphi_1(q')$ 在鞍点上不为0，但 $\frac{\partial \varphi_1(q')}{\partial q'} = 0$ ，说明分布函数 $W(v, q', t)$ 在鞍点上满足连续性方程：

$$\frac{\partial W(v, q', t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q'} [vW(v, q', t)] = 0,$$

即分布函数的衰减部分在鞍点上没有积聚，这正是物理上所要求的。至于 φ_0 在鞍点的右边为负也是合理的，因为在位阱 c 中，初始时刻要求稳定部分和变化部分总是大小相当，互相抵消，变化部分随时间衰减，正好相应于总分布函数增加。

将(5)'代入微分方程也得一组线性方程组：

$$\left. \begin{aligned} \omega \sqrt{\frac{m}{d}} b'_0 + b'_1 &= 0, \\ \left(\frac{\beta}{(md)^{1/2}} - \omega \sqrt{\frac{m}{d}} \right) b'_1 - A'b'_0 - 2b'_2 &= 0, \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{n\beta}{(md)^{1/2}} - \omega \sqrt{\frac{m}{d}} \right) b'_n - [A' - (n-1)]b'_{n-1} - (n+1)b'_{n+1} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

利用两组线性方程组，通过在位的连结点的连续条件和初始条件，定出速率本征值 ω 和其他的未定数，我们选速率本征值的最小的一个作裂变速率。

三、结果和讨论

在二中,我们讨论了速率本征值方法的物理图象,也简述了位阱中和位垒上分布函数的性质,下面我们再讨论一下这个方法的适用范围。二中的两个代数方程组都是无数维的,要解出它们必须在某一项切断,这就存在一个收敛快的条件。可以找到这个条件是: $\beta/2\sqrt{m_0c} > 1$, 其中 m_0 是基态质量, c 是基态位阱曲率。根据裂变动力学计算^[4],对重核从鞍点到断点的粘滞系数 $\mu = 9 \times 10^{-24} \text{ MeV} \cdot \text{Sec}/\text{fm}^3$, 并且一般还认为^[5]在鞍点之前的粘滞性比鞍点到断点之间还要大,经过估算说明,对于重核裂变,速率本征值方法可以使用,在以下的实际计算结果中也正说明了这一点。

在计算中,考虑了 β, m, T 是常数和是变形 q 的函数两种情况。

当它们是变形的函数时,对粘滞张量采用两体摩擦机制来计算,在只考虑一维变形,即拉长变形的情况下,得到 β 与变形的关系:

$$\beta = 4\pi\mu R_0 \frac{R_0^3}{a^2},$$

μ 是粘滞系数, R_0 是球形核的半径, a 是对称轴一半的长度。 q 是随 a 的增加而增加的,对惯量系数,是从流体力学理论推导出来的,它和变形的关系是:

$$m(q) = \frac{1}{5} M_0 A_N \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R_0^3}{a^3} \right),$$

其中 M_0 是核子的质量, A_N 是核的质量数。

对于核温度,我们采用了经验关系:

$$E^* = \frac{A_N}{8} T^2 - T, E^* \text{ 是核的有效激发能, 它和变形的关系是:}$$

$$E^* = E_0 - \frac{1}{2} cq^2. E_0 \text{ 是从初始核温度 } T_0 \text{ 计算的.}$$

在考虑 β, m, T 是变形的函数时,计算中取了近似,即忽略了 $\frac{\partial W(v, q, t)}{\partial q}$ 项中的 $\frac{\partial T}{\partial q}, \frac{\partial m}{\partial q}$ 项这种近似虽然是粗糙的,但是在我们通过位的连结点计算速率本征值时,它们比起主要项来小一个数量级,因此并不影响结果的定性性质。

本文以 ^{235}U 为例进行计算,研究裂变速率随粘滞张量,核温度以及位垒高度的变化规律。我们首先计算了 β, m, T 取常数时的裂变速率,图中曲线 1 和 2 就表示这种情况下的计算结果,其中曲线 1 表示只考虑分布函数中含有 φ_0, φ_1 项的计算结果,曲线 2 表示考虑了更高次项时的结果。图中曲线 3 和 4 表示 β, m, T 作为变形坐标函数时的情况,曲线 3 的意义与 1 相同,曲线 4 的意义与 2 相同。从计算可知,在我们研究裂变速率问题中,不考虑分布函数展开式中高于四次以上的项是完全可以的。

图 2 显示了粘滞系数的大小对裂变速率的影响。粘滞系数愈大,即单粒子自由度和集体自由度的耦合愈大,裂变速率愈小。随着粘滞性的增大,曲线的变化逐步变平缓。当考虑变形对 β, m, T 等参量的影响时,裂变速率降低了,但曲线 3 和 4 的变化趋势与曲

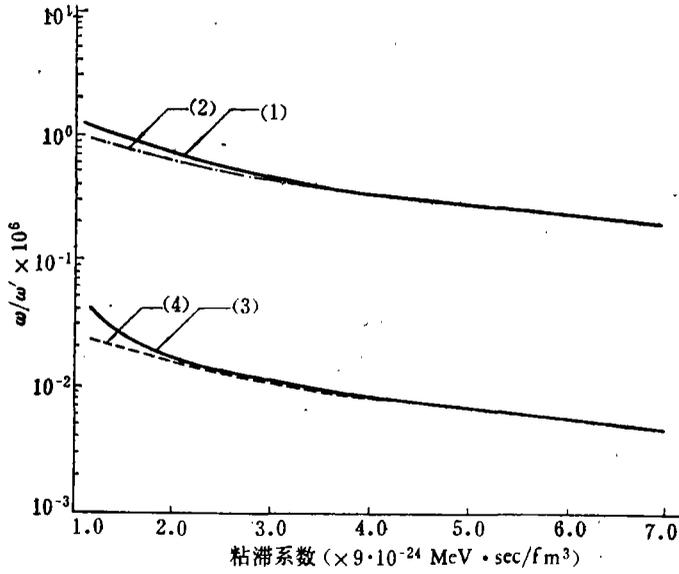


图2 裂变速率对粘滞系数的依赖关系。其中粘滞系数以 $9 \times 10^{-24} \text{ Sec} \cdot \text{MeV}/\text{fm}^3$ 为单位。位垒高度取 6.00 MeV ，基态位阱曲率 ($\hbar\omega'$) 取 0.5 MeV ，位垒曲率 0.5 MeV ，基态位阱核温度 0.5 MeV ，鞍点的变形取 $\delta_2 = 0.8$

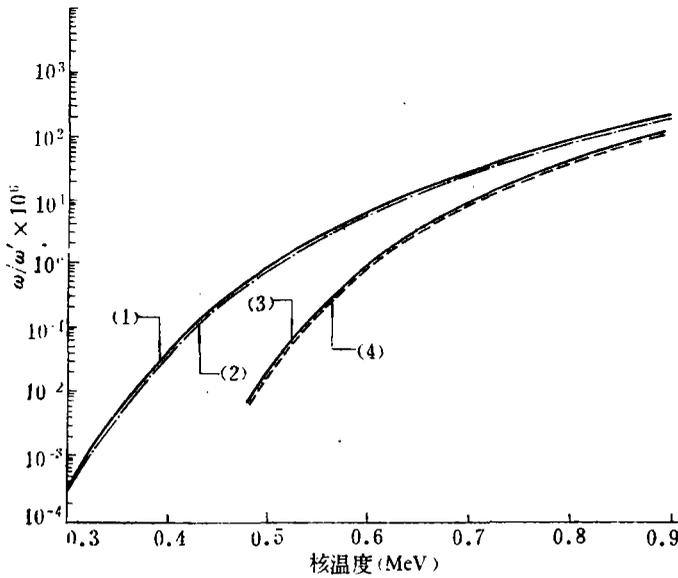


图3 裂变速率对核温度的依赖关系。粘滞系数取 $1.5 \times 9 \times 10^{-24} \text{ Sec} \cdot \text{MeV}/\text{fm}^3$ ；除核温度外；其他参量同图2

线1和2并没有明显不同。对 ^{235}U 核，当取位垒高度 6.00 MeV ，位垒和基态位阱曲率 0.5 MeV ，核激发能约 7 MeV ，粘滞系数 $1.5 \times 10^{-24} \text{ Sec} \cdot \text{MeV}/\text{fm}^3$ 时，计算出裂变宽度 0.01 eV ，这个数值是合理的。

图3画出了核温度对裂变速率的影响。随着核温度的增加，裂变速率急剧上升。曲

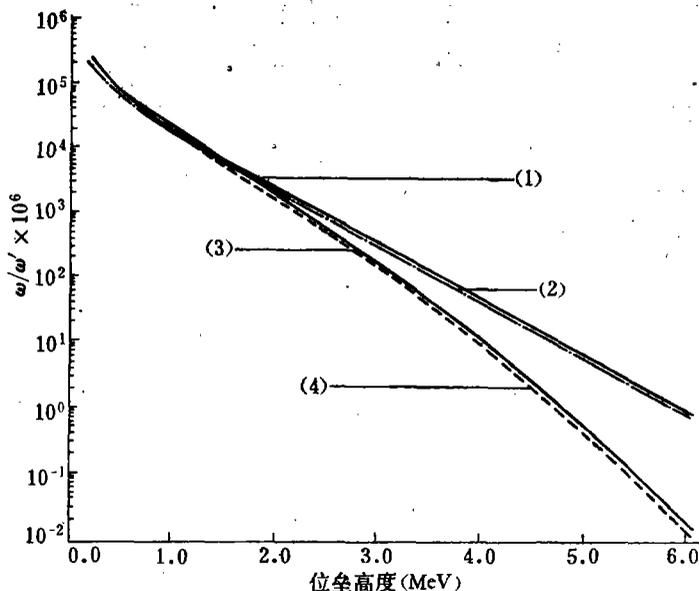


图 4 裂变速率对位垒高度的依赖关系。基态位阱的核温度取 0.5 MeV, 其他参量同图 3

线 3 和 4 显示了 β , m , T 是变形坐标函数时的计算结果。由于随变形的增加, 核温度不断下降, 因此这时算出的裂变速率比将它们取常数时算出的要低, 并且在低温时变化得更快。

图 4 表明位垒高度对裂变速率的影响。从曲线 1 和 2 可以看出: 当核温度在 0.5 MeV 时, 位垒高度在 1 MeV 以上, 裂变速率与 e^{-Q} 成比例, Q 是位垒高度。这正是克拉麦公式中裂变速率和位垒高度的关系。如果核温度提高了, 克拉麦关系成立的位垒高度也要提高。当位垒高度在 1 MeV 以下时, 裂变速率就不和 e^{-Q} 成比例了, 而以更陡的趋势变化。说明当核温度接近位垒或者高于位垒高度时, 克拉麦公式不能用了。曲线 3 和 4 说明, 当把核温度等参量取为变形坐标的函数时, 裂变速率随位垒高度的增加下降得更剧烈, 偏离了半对数关系, 但在高温时, 与曲线 1, 2 基本重合。

四、结 论

1. 用布朗运动观点研究裂变速率的想法基本上是正确的, 得到的裂变速率对粘滞张量、核温度、位垒高度的依赖关系是合理的, 算出的裂变宽度的数值也在合理的范围之内。

2. 本文所用方法和克拉麦方法相比, 没有用准稳态近似, 因此不受位垒要远大于核温度这一条件的限制, 故可用来研究高温度和低位垒的裂变。例如, 对重离子引起非常重的核裂变, 核温度可达 1.5 MeV, 这时实验上观察到 Γ_n/Γ_f 出现反常低的值, 达到 $\frac{1}{30} - \frac{1}{50}$ 。

1973 年斯图津斯基^[7] (Strutinsky) 在克拉麦公式的基础上对这个现象进行了解释, 认为是

由于在基态和鞍点态上稳定的集体态数目的不同造成的;即基态稳定集体态数目大,因此克拉麦公式前乘上一个大于1的因子。本文在位垒高度约是核温度2倍的地方计算了裂变速率,发现比克拉麦公式约大3—5倍,这就从另一方面给出了实验现象的解释。

3. 本文所用方法和跃迁态方法的观点是不同的。跃迁态方法建立在热力学平衡的基础上,本文则取非平衡态扩散的观点,究竟那种方法更正确,有待今后更深入和系统的探讨与研究,最后才能下结论。

参 考 文 献

- [1] N. Bohr and J. A. Wheeler, *Phys. Rev.*, **56** (1939), 426.
- [2] H. A. Kramer, *Physica*, **7** (1940), 284.
- [3] C. Blomberg, *Physica*, **86A** (1977), 49.
- [4] K. T. R. Davies, A. J. Sierk, J. R. Nix, *Phys. Rev.*, **c13** (1976), 2385.
- [5] W. J. Swiatecki, S. Bjrnholm, *Phys. Reports*, **4c** (1972), 327.
- [6] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover (1964).
- [7] V. M. Strutinsky, *Phys. letters*, **47B** (1973), 121.

STUDYING NUCLEAR FISSION RATE FROM THE POINT OF VIEW OF BROWNIAN MOTION

WU XI-ZHEN . ZHUO YI-ZHONG

(*Institute of Atomic Energy, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The problem of the nuclear fission rate is studied from the point of view of Brownian motion. The Fokker-Plank equation is solved by means of the rate eigenvalue method. The viscosity tensors, the inertia coefficients and the temperature are functions of nuclear deformation. Their effects on the fission rate are also studied.