

渐近自由与 J/ψ 、 Υ 粒子的 零点波函数和能级

周邦融

(中国科学技术大学)

摘 要

本文根据唯象 QCD 假定, 层子间的强相互作用在非相对论近似下由线性位势和类库仑位势描述, 并取层子-胶子间的等效耦合常数具有 QCD 的渐近自由极限. 文中由 J/ψ 和 Υ 的零点波函数与质量的实验值定出位势参数, 继而对 ψ' 和 Υ' 进行了计算. 结果表明, 这些粒子零点波函数的相对值和质量可以得到统一的说明.

一、引 言

一九七七年 $\Upsilon(9.5)$ 等粒子的发现^[1], 使已有实验证据的层子味的数目由 $4(u, d, s, c)$ 扩大到 $5(u, d, s, c, b)$. 目前普遍认为, 矢量介子 J/ψ 和 Υ 分别是轨道角动量 $l=0$ 、自旋 $J=1$ 的层子-反层子束缚态 ($c\bar{c}$) 和 ($b\bar{b}$); ψ' 和 Υ' 分别是 J/ψ 和 Υ 的第一径向激发态. 它们的质量、轻子衰变宽度和零点波函数模方的数值列于表 I^[2]:

表 I

矢量介子 V	J/ψ	ψ'	Υ	Υ'
质量 $m^V(\text{GeV})$	3.098 ± 0.003	3.684 ± 0.004	9.46 ± 0.01	10.012 ± 0.010
轻子宽度 $\Gamma_{e^+e^-}^V(\text{keV})$	4.8 ± 0.6	2.1 ± 0.3	1.3 ± 0.2	0.5 ± 0.2
零点波函数模方 $ \psi^V(0) ^2(\text{GeV}^3)$	0.039 ± 0.005	0.024 ± 0.003	0.391 ± 0.060	0.168 ± 0.067

表 I 中的零点波函数模方由推广的层子模型公式^[3]

$$\Gamma_{e^+e^-}^V = 16\pi\alpha^2 e_q^2 |\psi^V(0)|^2 / (m^V)^2 \quad (1.1)$$

给出. 此公式已考虑到层子有三种颜色. 其中 α 为精细结构常数, e_q^2 为层子电荷的平方. 对于粲层子, $e_c^2 = 4/9$; 而对于 b 层子, 取 $e_b^2 = 1/9$, 这已经得到了实验的支持^[4].

由表 I 可以看出:

1. 基态

$$|\phi_{1s}^Y(0)|^2 \sim (m^V)^3, \quad \nu = 2.07 \pm 0.18 \sim 2 \sim m^2, \quad (1.2)$$

这里的 m 代表层子的质量。在弱耦合假定下,可以粗略地认为,基态矢量介子的质量为组成它的层子、反层子质量之和。

2. 第一径向激发态和基态零点波函数模方之比:

$$\begin{aligned} \frac{|\phi_{2s}^{\psi}(0)|^2}{|\phi_{1s}^{\psi}(0)|^2} &= 0.62 \sim \frac{1}{2} = \frac{1}{n} \Big|_{n=2}, \\ \frac{|\phi_{2s}^{\psi'}(0)|^2}{|\phi_{1s}^{\psi'}(0)|^2} &= 0.43 \sim \frac{1}{2} = \frac{1}{n} \Big|_{n=2}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

这里 n 代表径向量子数。

3. 第一径向激发态和基态的能级差

$$m(\psi') - m(J/\psi) \simeq m(Y') - m(Y)$$

或

$$\Delta E \sim m^0. \quad (1.4)$$

实验上 1, 2, 3 这三个特点能否从动力学理论给予统一的解释? 这就是本文所要讨论的问题。

应当指出,层子之间究竟实现着怎样的相互作用? 层子是如何束缚成为强子的? 这是强子结构问题的核心,但也是一个至今尚未正确回答的难题。

目前一个比较吸引人的理论前景,就是试图将层子间的强相互作用建立在颜色 SU_3 规范理论(即 QCD)^[5] 的基础上。这一理论假定,强相互作用具有完全的颜色对称性,物理上所观察到的强子都处于颜色单态,而层子间的强相互作用是通过带颜色的胶子来传递的。人们还发现,近几年来实验上所发现的粲子素(Charmonium)谱及 b 层子素(Bottomonium)谱正好可以用作检验 QCD 思想的理想客体^[6,7]。由于 c 层子和 b 层子的质量都比较大,因而它们在强子内部运动的动量要比其静止质量小得多,由它们组成的强子系统的激发能级间隔远小于强子的静止质量。因此,可以在非相对论近似下,采用位势的概念来研究层子-反层子间的相互作用,而且层子越重,这种近似就越好。

当然,所引入的位势必须满足 QCD 的基本假定和要求。首先,层子-反层子间位势必须是味道无关的;其次,由于 QCD 所证明的渐近自由,已很好地解释了在电子-核子、中微子-核子的深度非弹实验中所观察到的无标度性及无标度性破坏现象,说明在短距离时,层子是准自由的,因此,位势的短距离行为也应当具有渐近自由的性质;第三, QCD 的红外(即大距离)行为,虽然目前尚未得到证明,但是从点阵规范理论^[8]及其他一些禁闭模型得到的启示,人们猜测,在大距离时,层子之间的相互作用可能是某种类弦结构的禁闭作用,因而可以唯象引入某种随距离加大而增长的禁闭位势来作为这种相互作用的非相对论极限。

事实上,这种唯象描述已经获得了不少成功。例如艾希顿等人^[9]采用库仑位势加线性位势

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + kr, \quad (1.5)$$

能够很好地解释粲子素谱, 而且从弦模型可以得出^[10],

$$2\pi k \simeq \frac{1}{\alpha'} \quad (1.6)$$

正好是 Regge 轨迹斜率的倒数。但是; 在 $\Upsilon(9.5)$ 发现之后, 这种位势在统一解释粲子素谱与 b 层子素谱问题上却遇到了一些困难。例如上述实验上的特点 1 和 3 就不能很好解释。于是奎格等人^[11]又提出了对数位势

$$V(r) = C \ln \frac{r}{r_0}, \quad (1.7)$$

它能较好地解释上述的特点 2 与 3, 但也不能很好说明 $|\phi_L^{\prime}(0)|^2 \sim m^2$ 的问题。

因此, 一个有待澄清的问题是, 能否在 QCD 的框架内, 统一解释实验结果 1, 2, 3?

可以先作定性的分析。如果一般地假定位势

$$V(r) = ar^{\epsilon}, \quad (1.8)$$

利用薛定谔方程进行分析^[2]表明: 零点波函数模方

$$|\phi(0)|^2 \sim m^{3/(2+\epsilon)}, \quad (1.9)$$

$$|\phi_n(0)|^2 \sim \begin{cases} n^{2(\epsilon-1)/(2+\epsilon)} & \text{当 } \epsilon > 0 \\ n^{(\epsilon-2)/(2+\epsilon)}, & \text{当 } -2 < \epsilon < 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

能级间隔

$$\Delta E \sim m^{-\epsilon/(2+\epsilon)}. \quad (1.11)$$

为了给出 $|\phi(0)|^2 \sim m^2$, 要求 $\epsilon = -1/2$; 但为了给出 $|\phi_n(0)|^2 \sim 1/n$ 和 $\Delta E \sim m^0$, 要求 $\epsilon = 0$ 。因此如果只采用单一的幂律位势, 不可能同时较好地解释特点 1, 2, 3。如果采用不同幂律位势的线性组合, 例如采用库仑位势 ($\epsilon = -1$) 与线性位势 ($\epsilon = +1$) 的组合, 则由(1.9)–(1.11)式不难看出, 也有可能分别说明 1, 2, 3。而且用同一种组合, 同时说明 1, 2, 3 的可能性也不是不存在的。

库仑位势加线性位势除了能较好解释粲子素谱和 Regge 轨迹以外, 还有一个理论上的优点, 就是它可能更具场论基础。短距离的库仑位势对应于 QCD 中的单胶子交换相互作用, 而线性位势可看作某种红外禁闭作用的非相对论极限。前面所指出的它在解释 b 层子素谱时遇到的困难, 不一定成为我们要放弃它的理由。可以猜想, 这种困难之所以出现, 有可能是没有比较精确地考虑渐近自由的缘故。由表 I 见到, Υ 和 Υ' 的零点波函数模方分别比 J/ψ 和 ψ' 的零点波函数模方大得多, 因而 Υ 和 Υ' 的平均半径分别比 J/ψ 和 ψ' 的平均半径要小得多, 所以它们之间的差别, 可能与位势的短距离行为有很大关系。采用位势概念, 也能够较为精确地考虑渐近自由。如果将短距离位势唯象地代之以渐近自由位势, 则可能有利于统一解释粲子素和 b 层子素的实验事实。这将是本文的尝试。

与常规做法不同的另一点是, 在确定位势参数时, 本文不仅以基态粒子质量为输入, 而且还以基态的零点波函数模方为输入, 这是为了更好地考察零点波函数值对位势参数的要求。

本文第二节即给出渐近自由相互作用位势的具体形式, 第三节叙述了计算方法及结果, 第四节进行了讨论。

二、渐近自由相互作用位势

根据 QCD 的渐近自由性质,在动量传递 Q^2 很大时,层子与胶子相互作用的等效耦合常数 $\bar{g} = \bar{g}(Q^2)$ 是 Q^2 的函数,其显示形式为^[5]

$$\bar{g}^2(Q^2) \xrightarrow{Q^2 \text{ 很大}} \frac{2}{b_0 \ln Q^2/\Lambda^2} + \frac{8b_1}{b_0^3} \frac{\ln \left[\frac{1}{2} \ln(Q^2/\Lambda^2) \right]}{[\ln(Q^2/\Lambda^2)]^2} + O\left(\frac{1}{[\ln(Q^2/\Lambda^2)]^2}\right), \quad (2.1)$$

$$b_0 = \frac{33 - 2N_f}{24\pi^2}, \quad b_1 = \frac{2(19N_f - 153)}{3(16\pi^2)^2}. \quad (2.2)$$

其中 N_f 是层子味的数目, Λ 为由实验来确定的参数.

不难看出,当 $Q^2 \gg \Lambda^2$ 时,第一项的贡献为主(单圈图近似),因而 $\bar{g}(Q^2)$ 以对数形式趋于零.

假定层子-反层子间的短距离相互作用是通过单胶子交换进行的,则当 Q^2 很大时,相互作用在动量表象中可以写成

$$V_{AF}^c(Q^2) = -\frac{4}{3} \bar{g}(Q^2) \frac{1}{Q^2}. \quad (2.3)$$

其中 $(-4/3)$ 是由于颜色^[6], 负号表示层子与反层子相互吸引. 可以将 $V_{AF}^c(Q^2)$ 进行傅里叶变换变到坐标表象. 为了去掉被积函数的奇点,可用 $\ln(\zeta + Q^2/\Lambda^2)$ ($\zeta > 1$) 代替(2.1)式分母中的 $\ln Q^2/\Lambda^2$, 变换后再令 ζ 为零. 在层子-反层子系统的质心系, $Q^2 = \mathbf{q}^2 - q_0^2 = \mathbf{q}^2$, $V_{AF}^c(Q^2)$ 的傅里叶变换为

$$V_{AF}^c(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\mathbf{q} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} V_{AF}^c(Q^2 = \mathbf{q}^2) = -\frac{a}{r} \left\{ \frac{1}{\ln B} + \frac{\pi^2}{3} \frac{1}{(\ln B)^3} - \dots \right\} \\ - \frac{d}{r} \left\{ \frac{\ln \left(\frac{1}{2} \ln B \right)}{(\ln B)^2} + \frac{\pi^2}{(\ln B)^4} \left[\ln \left(\frac{1}{2} \ln B \right) - \frac{5}{6} \right] + \dots \right\}, \quad (2.4)$$

其中

$$B = \frac{1}{\Lambda^2 r^2 e^{2C}}, \quad a = \frac{16\pi}{(33 - 2N_f)^2}, \\ d = \frac{96\pi(19N_f - 153)}{(33 - 2N_f)^3}, \quad (2.5)$$

而 $C = 0.5772\dots$ 是欧拉常数. 运算中我们将被积函数按 $(1/\ln B)$ 作了级数展开. 只要 $\Lambda^2 r^2 e^{2C}$ 足够小,这一展开式是收敛的. 不难看出

$$V_{AF}^c(r) \xrightarrow{\Lambda^2 r^2 e^{2C} \ll 1} -\frac{16\pi}{33 - 2N_f} \frac{1}{\ln \frac{1}{\Lambda^2 r^2 e^{2C}}} \frac{1}{r}, \quad (2.6)$$

即由 QCD 的渐近自由得出,短距离位势的耦合常数在 $\Lambda^2 r^2 e^{2C} \rightarrow 0$ 时,以对数方式趋于零.

(2.6) 仅仅是 QCD 所能给出的极小距离位势的渐近式. 至于更大距离如 $\Lambda^2 r^2 e^{2C} \lesssim 1$

处的位势, 无法由 QCD 理论得出. 我们不妨唯象引入如下位势

$$V_{AF}(r) = \begin{cases} V_{AF}^0(r) & \text{当 } \Lambda r e^C \leq \delta < 1 \\ -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r}, & \text{当 } \Lambda r e^C > \delta \end{cases} \quad (2.7)$$

来描述层子-反层子间的单胶子交换作用, 其中

$$V_{AF}^0(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{1 + G\alpha_s \ln \frac{\delta^2}{\Lambda^2 r^2 e^{2C}}} \frac{1}{r}, \quad (2.8)$$

$$G = \frac{(33 - 2N_f)}{12\pi}. \quad (2.9)$$

当 $\Lambda^2 r^2 e^{2C} \ll 1$ 时, $V_{AF}^0(r)$ 趋于 QCD 所给出的渐近自由极限(2.6)式; 而当 $\Lambda^2 r^2 e^{2C} \lesssim \delta^2$ 时, (2.8) 式只是一种唯象的假定. 位势中的距离参数 δ 依靠与实验符合的情况来定. α_s 正是具有渐近自由极限的位势 V_{AF}^0 与库仑位势连接点处的耦合常数, 也由实验来确定.

三、计算及结果

假定层子-反层子间的相互作用可由线性位势加库仑位势来描述, 考虑到渐近自由之后, 在层子-反层子系统的质心系, 等效哈密顿量

$$\hat{H} = 2m - \frac{1}{m} \nabla^2 + k r + V_{AF}(r) + V_0, \quad (3.1)$$

k 假定是与层子味和层子质量无关的常数. $V_{AF}(r)$ 由(2.7)式给出. V_0 为常数位势. 波函数 ψ 满足薛定格方程

$$\hat{H}\psi = m^V \psi, \quad (3.2)$$

m^V 是束缚态的质量.

本文的计算基于变分法. 因此所面临的一个问题是如何选取尝试波函数. 可以证明, 方程(3.2)在 $r \rightarrow \infty$ 时满足束缚态条件的渐近解是

$$\psi \sim \frac{1}{\rho} A_i(\rho) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{\rho^{5/4}} e^{-\frac{2}{3}\rho^{3/2}}, \quad (3.3)$$

其中无量纲变量 $\rho = (mk)^{\frac{1}{3}} r$, $A_i(\rho)$ 是 Airy 函数. 因此, 我们可以用高斯型函数来近似代表波函数在无穷远处的行为. 另一方面, 如果将 \hat{H} 中的 $V_{AF}(r)$ 全部用库仑位势代替, 则方程(3.2)在 $r \rightarrow 0$ 时的 s 态解为

$$\psi(l=0) \sim a_0(1 - a_1\rho + \dots), \quad (a_1 > 0) \quad (3.4)$$

这对我们选取尝试波函数也将有所借鉴.

1. 基态:

考虑到(3.3)和(3.4), 可近似取基态尝试波函数为

$$\phi_{1s}^V(r) = (\lambda^3/\pi^{3/2})^{1/2} e^{-\lambda^2 r^2/2}, \quad (3.5)$$

λ 为变分参数. 基态质量

$$m_{1s}^V(\lambda) = \int \phi_{1s}^V \hat{H} \phi_{1s}^V d\mathbf{r} = 2m + \frac{3\lambda^2}{2m} + \frac{2k}{\sqrt{\pi}\lambda}$$

$$-\frac{8\lambda}{3\sqrt{\pi}}G\left(\alpha\int_0^1\frac{e^{-\alpha z}dz}{\beta-\ln z}+\frac{1}{\beta}e^{-\alpha}\right)+V_0, \quad (3.6)$$

基态能量最低,应满足条件 $\partial m_{1c}^V(\lambda)/\partial\lambda=0$,由此得如下方程

$$\frac{3\sqrt{\pi}}{2m}\lambda^3=k+\frac{4\lambda^2}{3G}\left[\int_0^1\frac{(3\alpha-2\alpha^2z)e^{-\alpha z}}{\beta-\ln z}dz+\frac{1}{\beta}(1-2\alpha)e^{-\alpha}\right]. \quad (3.7)$$

其中,

$$\beta=\frac{1}{G\alpha_s}, \quad \alpha=\frac{\delta^2\lambda^2}{\Lambda^2e^{2c}}. \quad (3.8)$$

在方程(3.6)和(3.7)中,以零点波函数模方

$$|\phi_{1c}^V(0)|^2=\lambda^3/\pi^{3/2} \quad (3.9)$$

和基态矢量介子质量 m_{1c}^V 的实验值为输入,将其中的 (λ, m) 分别代以 (λ_c, m_c) 和 (λ_b, m_b) (c, b 分别标记 c 层子和 b 层子), m_{1c}^V 分别代以 $m(J/\psi)$ 和 $m(Y)$ 的实验值,可得四个一组联立方程. 待定参数有 $\delta^2, \alpha_s, k, V_0, m_c, m_b$ 六个. 由于 δ^2, α_s 出现在被积函数中,为了求解的方便,可先假定一组 δ^2, α_s 值,然后求解 k, V_0, m_c, m_b . (3.6)、(3.7) 式中的积分用数值积分的方法算出. 所得的一组最佳参数值列于表 II 的下半部分.

按照通常 QCD 对电生和 e^+e^- 湮灭实验中无标度性破坏的分析,我们取了 $\Lambda\sim 1\text{GeV}^{[5]}$. 而 N_f 取为 6,这是出于某些弱作用理论对层子味的要求^[2].

表 II 中基态粒子的平均半径由

$$\bar{r}_{1c}^V=\int|\phi_{1c}^V(r)|^2rdr=\frac{2}{\sqrt{\pi}\lambda} \quad (3.10)$$

给出.

由基态零点波函数和质量为极限输入所确定的库仑位势的耦合常数 $\alpha_s=0.49$ 虽然较大,但是由于考虑了渐近自由,当层子-反层子更靠近时,耦合常数可以变得很小,并不违反 QCD. 由 $\Lambda^2r^2e^{2c}=\delta^2=0.47$ 可以求出渐近自由位势 V_{AF} 存在的最大距离为 $r(8)0.39\text{GeV}^{-1}$,由表 II 可见,这一距离小于 Y 粒子的平均半径.

我们所得的线性位势作用强度 $k=0.184$,接近粲子素谱实验所定的 $k=0.20$. 虽然现在 α_s 较大,但对于 $(c\bar{c})$ 的激发态,其平均半径大于基态半径,因而线性位势仍将起主要作用. 所以如用这一位势去计算粲子素的能谱,估计不会与实验产生较大的矛盾.

为了看出以上由基态的零点波函数值所决定的位势能否统一解释 ψ', Y' 的零点波函数值和实验 $m(\psi')-m(J/\psi)\simeq m(Y')-m(Y)$,须进而考虑第一径向激发态.

2. 第一径向激发态:

考虑到(3.3)和(3.4),尝试波函数可近似取为

$$\phi_{2c}^V(r)=A(\eta-\xi r)e^{-\xi^2r^2/2}. \quad (3.11)$$

其中 η, ξ 是参数, A 是归一化常数. 由 $\phi_{2c}^V(r)$ 与基态 $\phi_{1c}^V(r)$ [(3.5)] 的正交条件得出

$$\xi^2=\eta^2\lambda^2/(8/\pi-\eta^2). \quad (3.12)$$

(3.11)中, η 与 ξ 必须同号,若规定 $\eta>0$,则由(3.12)有

$$0<\eta<(8/\pi)^{1/2}. \quad (3.13)$$

由 $\phi_{2s}^V(r)$ 的归一化条件和(3.9)式,可以得到第一径向激发态与基态零点波函数模方之比

$$\frac{|\phi_{2s}^V(0)|^2}{|\phi_{1s}^V(0)|^2} = \eta^5 / \left(\frac{8}{\pi} - \eta^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\eta^2 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \eta + \frac{3}{2} \right). \quad (3.14)$$

若以 $|\phi_{1s}^V(0)|^2$ 和 $|\phi_{2s}^V(0)|^2$ 的实验值为输入,则由(3.13)和(3.14)式可以定出相应的 η 值.再考虑到(3.12)式,波函数 $\phi_{2s}^V(r)$ 就已完全确定.由此可以估计第一径向激发态的质量 m_{2s}^V 和平均半径 \bar{r}_{2s}^V . m_{2s}^V 和 \bar{r}_{2s}^V 的表达式如下:

$$m_{2s}^V = \int \phi_{2s}^V \hat{H} \phi_{2s}^V d\mathbf{r} = \frac{\lambda^2}{2m} A_1 + \frac{k}{\sqrt{\pi} \lambda} A_2 - \frac{8\alpha_s}{3\sqrt{\pi}} \lambda \left[\alpha A_3 \int_0^1 (\eta - \sqrt{\gamma z})^2 \frac{\ln z}{\beta - \ln z} e^{-r^2} dz + A_4 \right]. \quad (3.15)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= (3\eta^2 - 8\eta/\sqrt{\pi} + 7/2)N/M, \\ A_2 &= (2\eta^2 - 3\sqrt{\pi}\eta + 4)N^{-1/2}/M, \\ A_3 &= N^{3/2}/M, \\ A_4 &= (\eta^2 - \sqrt{\pi}\eta + 1)N^{1/2}/M, \\ N &= \eta^2/(8/\pi - \eta^2), \\ M &= \eta^2 - 4\eta/\sqrt{\pi} + 3/2, \\ \gamma &= \alpha N \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

而 λ 已由基态零点波函数值确定, α, β 已在解基态方程时确定 [见(3.8)式].

表 II

	(cc)				(bb)			
	实验值	本文结果	V_2'	S'	实验值	本文结果	V_2'	S'
$m_{1s}^V(\text{GeV})$	3.098 ± 0.003	<u>3.098</u>			9.46 ± 0.01	<u>9.46</u>		
$ \phi_{1s}^V(0) ^2(\text{GeV}^3)$	0.039 ± 0.005	<u>0.042</u>	0.09	0.073	0.391 ± 0.060	<u>0.36</u>	0.44	0.49
$ \phi_{2s}^V(0) ^2(\text{GeV}^3)$	0.024 ± 0.003	<u>0.024</u>	0.063	0.053	0.168 ± 0.067	<u>0.168</u>	0.260	0.281
$m_{2s}^V(\text{GeV})$	3.684 ± 0.004	3.745			10.012 ± 0.010	10.078		
$m_{2s}^V - m_{1s}^V(\text{GeV})$	0.586 ± 0.007	0.647	0.580	0.606	0.552 ± 0.020	0.618	0.522	0.611
$\bar{r}_{1s}^V(\text{GeV}^{-1})$		1.83				0.90		
$\bar{r}_{2s}^V(\text{GeV}^{-1})$		4.46				2.27		
$k(\text{GeV}^2)$		0.18	0.2	0.25				
α_s		0.49	0.375	0.45				
$V_0(\text{GeV})$		-0.111	-1.238	-0.162				
δ^2		0.47						
$m_c(\text{GeV})$		1.47	2	1.5				
$m_b(\text{GeV})$		4.90	5.34	4.82				
$\Delta(\text{GeV})$		1	1	1				
N_f		6	6	6				

$$\bar{r}_{2r}^V = A_2/\sqrt{\pi\lambda} \quad (3.17)$$

计算结果列于表 II。

皮格农和皮克蒂^[43]曾报道了他们用线性位势加库仑位势再加常数位势,并考虑了渐近自由之后,计算粲子素谱和 b 层子素谱的结果。他们有关基态 (1^3S_1) 和第一径向激发态 (2^3S_1) 的结果,也列入了表 II,以便与本文比较。

从表 II 可见,本文所计算的理论值 $m(\psi') - m(J/\psi) \simeq m(Y') - m(Y)$, 同时与实验值相当接近。考虑到所采用的尝试波函数的近似性,可以认为理论与实验是基本符合的,甚至包括质量差 $m(Y') - m(Y)$ 略小于 $m(\psi') - m(J/\psi)$ 这一点。

表 II 中的 V'_2 和 S' 列是皮格农和皮克蒂的计算结果。 V'_2 对应类矢量的禁闭作用(与本文暗含的假定相同), S' 对应标量禁闭作用。表 II 的下半部分给出了三种情况下所取的参数值。他们的耦合常数 $\alpha_s \sim 0.4$, 也比较大,与本文的结果相一致。不同的是,他们将引入渐近自由相互作用的距离固定在 $r = 1 \text{ GeV}^{-1}$; 而本文是将距离 δ 作为可调参数,这样做,从唯象的观点看,对解释 $|\psi_L^V(0)|^2 \sim (m^V)^2$ 特点是重要的(见第四节的讨论)。

四、讨 论

本文的计算表明,如果认为层子-反层子相互作用的非相对论近似对应线性位势和库仑位势而在小距离极限下有渐近自由行为,那么适当地选择位势参数,则基本上能统一解释 ($c\bar{c}$) 和 ($b\bar{b}$) 的基态和第一径向激发态的零点波函数值和能级间隔。所得的 $k = 0.18 \text{ GeV}^2$, 因此用这种位势去计算粲子素谱及 Regge 轨迹时,不会与实验产生较大的矛盾。这说明,渐近自由有可能是强子内部层子间强相互作用的一个普遍性质。它不仅异乎明显地表现为高能深度非弹实验中的无标度性现象,而且也一般地表现在层子结合力的短距离行为中,对强子的零点波函数和能级产生影响,特别是在统一解释不同味层子束缚成的强子的能谱实验时,渐近自由可能是应当考虑的一个重要因素。

然而,在我们的计算中,选用了位势 V_{AF}^0 , 这对一些参数的决定产生了影响。第二节曾指出, V_{AF}^0 只是在短距离极限下才与 QCD 的渐近自由一致,而在更大些的距离上,选用它只是一种唯象的假定。这种选择,对于解释实验上 $|\psi^Y(0)|^2 \gg |\psi^{J/\psi}(0)|^2$ 的特点,似乎并不是最有利的。

因为,如果将位势写成 $V = gU$ (g 是耦合常数),则由薛定格方程可以证明,对于 S 态

$$|\phi(0)|^2 = \frac{m}{4\pi} g \left\langle \frac{dU}{dr} \right\rangle, \quad (4.1)$$

由表 II 可见, Y 的平均半径为 0.9 GeV^{-1} , 约比 J/ψ 的平均半径 (1.83 GeV^{-1}) 小一倍左右,它的波函数更集中在原点附近的短距离内,所以加大短距离位势的 g 和 dU/dr , 才利于解释 $|\psi^Y(0)|^2 \gg |\psi^{J/\psi}(0)|^2$ 。

但是,容易证明,对于 $V_{AF}^0 = \alpha_s U_{AF}^0$, 在 $\Lambda r e^c < \delta$ 的距离内,其斜率 dU_{AF}^0/dr 总是小于纯库仑位势 ($-\frac{4}{3} \frac{1}{r}$) 的斜率。因而为了解释 $|\psi^Y(0)|^2 \gg |\psi^{J/\psi}(0)|^2$, 除了加大耦合常数 α_s 以外,还必须使得引入距离 $r(\delta)$ 小于 Y 粒子的平均半径,以致在 Y 的平均半径范

围内, 不仅有 V_{AF}^0 , 而且还有一段斜率较大的库仑位势, 以增加对 $|\psi^V(0)|^2$ 的贡献。皮格农和皮克蒂将引入距离固定在 1 GeV^{-1} , 它大于或近于 Υ 的平均半径, 结果在 Υ 的平均半径内, 斜率较小的渐近自由位势将起主要作用, 这显然是他们的零点波函数比值 $|\psi^V(0)|^2/|\psi^{J/\psi}(0)|^2$, 与实验符合不好的一个原因。例如他们所得的比值只有实验值的 0.5—0.7 左右。

在本文的计算中, 尽管调正了 δ^2 的数值, 仍需较大的 α_s 值。此外, 为了使 k 值接近以往粲子素谱实验定出的数值, c 层子的质量 $m_c = 1.47 \text{ GeV}$, 取了偏小的值, 这也是由于 $|\psi^V(0)|^2 \gg |\psi^{J/\psi}(0)|^2$ 的缘故(注意到方程(3.7)的左方 $\propto |\psi^V(0)|^2/m$)。

改进上述缺点的一种做法是加大短距离位势的斜率。例如, 可以放弃 V_{AF}^0 , 将短距离位势全部换为库仑位势, 同样可以解释 $(c\bar{c})$ 和 $(b\bar{b})$ 的基态和第一径向激发态的零点波函数和能级, 这时定出的 $k = 0.19 \text{ GeV}^2$, 而 $\alpha_s = 0.42$ 在所有距离上都很大, 这将违背 QCD 的基本要求。如果我们不想放弃小距离时的渐近自由, 就可在略大的中间距离上采取某种大斜率位势。从(4.1)可见, 位势斜率 dU/dr 的加大将能减小耦合常数 $\alpha_s (=g)$ 的数值, 并可能得到更为满意的结果。

另一种做法或许是应当考虑相对论的修正。由表 II 中 $(c\bar{c})$ 和 $(b\bar{b})$ 基态的平均半径和层子质量, 可以估计出 c 层子和 b 层子在介子内部运动速度与光速之比分别为 0.37 和 0.23, 因此相对论效应对于 $(c\bar{c})$ 要比对 $(b\bar{b})$ 更为重要一些。例如, 如果考虑一级辐射修正(相对论效应), 则轻子衰变宽度公式将不是(1.1)式, 而代之以^[4]

$$\Gamma_{e^+e^-}^V = 16\pi\alpha^2 e_Q^2 \frac{|\psi^V(0)|^2}{(m^V)^2} \left[1 - \frac{16}{3\pi} \alpha_s ((m^V)^2) \right]. \quad (4.2)$$

由于 $\alpha_s(m^2(J/\psi)) > \alpha_s(m^2(\Upsilon))$ (渐近自由), 因而从(4.2)式所得到的比值 $|\psi^V(0)|^2/|\psi^{J/\psi}(0)|^2$ 比由(1.1)式得到的要小, 这可能使理论与目前 $|\phi_{\text{exp}}^V(0)|^2 \sim (m^V)^2$ 的实验特点符合得更好。

最后, 应当指出, 文中为了求解方便, 靠输入 $|\phi^V(0)|^2$ 来决定波函数, 由于所用尝试波函数只是方程的近似解而不是严格解, 因而输入的 $|\phi^V(0)|^2$ 与定出位势后再由方程(4.1)算出的值 $|\phi^V(0)|_{\text{计算}}^2$ 并不完全自治, 二者的比较列于表 III。

表 III

矢量介子 V	J/ψ	ψ'	Υ	Υ'
$ \phi^V(0) _{\text{计算}}^2 (\text{GeV}^3)$	0.069	0.036	0.613	0.206
$ \phi^V(0) _{\text{输入}}^2 (\text{GeV}^3)$	0.0419	0.024	0.36	0.168

从中见到, 二者相对约有 20—40% 的误差。因此本文有关零点波函数的结果, 不能看作是实验值的绝对定量符合。但是 $|\phi_{\text{exp}}^V(0)|^2 \sim (m^V)^2$ 及 $|\phi_{\text{exp}}^V(0)|^2/|\phi_{\text{exp}}^{J/\psi}(0)|^2 \sim 1/2$ 等基本特点, 未因 $|\phi^V(0)|^2$ 绝对量的改变而发生变化。在取定尝试波函数的情况下, 文中求解的位势参数等主要取决于 J/ψ 和 Υ 粒子零点波函数和能级的相对关系, 第一径向激发态的能量, 主要取决于 $|\phi_{\text{exp}}^V(0)|^2/|\phi_{\text{exp}}^{J/\psi}(0)|^2$ 及位势参数等, 它们对零点波函数的绝对量的上述不大变化, 是不敏感的, 因而其数值的近似正确性, 将不受到怀疑。进一步的精

确可用计算机进行。

感谢与中国科学技术大学基本粒子理论组所进行的有益讨论。

参 考 文 献

- [1] S. W. Herb et al., *Phys. Rev. Lett.*, **39** (1977), 252.
- [2] 见 C. Quigg 1978 年 9 月在北京的讲演。
- [3] 中国科学院原子能研究所基本粒子理论组, 原子能, 第 3 期 (1966), 171 页, 文中的公式 (5), 如果忽略层子的反常磁矩, 并考虑到层子有三种颜色, 即为 (1.1) 式。
- [4] C. E. Carlson and R. Suaya, *Phys. Rev. Lett.*, **39** (1977), 908;
J. L. Rosner et al., *Phys. Lett.*, **74B** (1978), 350.
- [5] W. Marciano and H. Pagels, *Phys. Rep.*, **36C** (1978), 139.
- [6] J. D. Jackson, *SLAC-198* (1976).
- [7] V. A. Navikov et al., *Phys. Rep.* **41C** (1978), 1.
- [8] K. G. Wilson *Phys. Rev. D* **10** (1974), 2445.
- [9] E. Eichten et al., *Phys. Rev. Lett.*, **34** (1975), 369; *Phys. Rev.*, **D17** (1978), 3090.
- [10] R. C. Giles and S. -H. H. Tye, *Phys. Rev. Lett.*, **37** (1976), 1175.
- [11] C. Quigg and J. L. Rosner, *Phys. Lett.*, **71B** (1977), 153.
- [12] M. Kobayashi and K. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49** (1973), 652.
- [13] D. Pignon and C. A. Piketty, *Phys. Lett.*, **74B** (1978), 108.
- [14] R. Barbieri et al., *Phys. Lett.*, **57B** (1975), 455.

ASYMPTOTIC FREEDOM AND THE WAVE FUNCTIONS AT THE ORIGIN AND THE ENERGY LEVELS OF THE J/ψ AND THEIR

ZHOU BANG-RONG

(University of Science and Technology of China)

ABSTRACT

On the basis of phenomenological quantum chromodynamics (QCD), a nonrelativistic linear and Coulomb-like potential description of the strong interaction between quarks is assumed and it is considered that the effective quark-gluon coupling constant approaches the asymptotically free limit of QCD. The choice of the potential parameters is so made as to fit the experimental values of the wave functions at the origin as well as the masses of the J/ψ and the Υ . Following the calculation referring to the ψ' and the Υ' , we acquire a consistent explanation for both the relative values of the wave functions at the origin and the experimental mass as differences of these particles.