

自旋 1/2 的正反费米子电磁束缚态 的近似的 B-S 波函数

何炬 张肇西

(中国科学院高能物理研究所)

何祚麻

(中国科学院理论物理研究所)

摘 要

本文在梯形近似下,求解了自旋 1/2 的正反费米子电磁束缚态的 Bethe-Salpeter 方程。除得到标准的满足 Balmer 系的本征值外,还得到了明显具有相对论协变性,具有正确解析性,满足谱条件的近似的 B-S 波函数。以 $\eta^0 \rightarrow \gamma + (e^+e^-)$ 和 $\eta^0 \rightarrow \gamma + (\mu^+\mu^-)$ 为例,表明上述所得到的近似波函数能方便地用来计算相对论电磁束缚态的产生、湮灭和跃迁等问题。

一、引 言

关于 Bethe-Salpeter 方程的求解问题,前人曾进行了大量工作^[1]。许多工作都是从瞬时相互作用近似逼近物理的解答的^[2]。瞬时近似的优点是便于导出薛定格方程和求出微扰解答。缺点是破坏了方程的协变性,所获得的波函数将不能有效地用来探讨高速飞行的复合粒子体系。

对于协变形式的 Bethe-Salpeter 方程的解答,Wick 和 Cutkosky 做了开创性的工作,他们对两个自旋为零的粒子组成的束缚态(传递两个粒子之间相互作用的粒子是零质量并自旋为零),在梯形近似下的 B-S 方程进行了详尽的分析^[3,4]。他们不仅对组成束缚态的粒子具有相等质量时的情形,给出了完整的解答,而且实际上给出了不等质量情形下的完全解答。沿用他们的方法对于有自旋粒子组成的束缚态,求解 B-S 方程要困难得多。由于实际上遇到的情况都是组成束缚态的粒子自旋不是零,所以继 Wick 和 Cutkosky 之后沿着这一方向的发展有限。因而,到目前为止即使是梯形近似下的 B-S 方程,也还没有一个接近真实物理情况并满足协变性要求的近似解答。

近年来,由于对强子结构问题的兴趣日渐增加,有许多人用电子计算机求 B-S 方程的数值解^[5],还有一些人尝试用四维谐振子位势或四维方位阱求出它们的协变性的解^[6]。但在这些工作中或者破坏了 B-S 波函数所应有的解析性和谱条件,或者有些解答只能在 O_4 空间中给出,但如何延拓回到闵柯夫斯基空间的问题尚待研究,因此,用这些解答来计算

物理过程时,就会出现一些连定性上都不合理的结果。

为解决上述问题,本文尝试对自旋为 1/2 的正反费米子的电磁相互作用束缚态的 B-S 方程,求出一个能满足上述要求的近似的解答。在第二节中,从梯形近似下的 B-S 方程出发,首先将 4×4 的矩阵方程分解为具有四个或八个不变函数的标量方程。证明在精确度是 $1 + O(\alpha)$ 量级的情况下,略去小分量后,上述四个不变函数方程和八个不变函数方程中四个大分量方程,均能进一步退耦并近似地满足 Wick-Cutkosky 方程。第三节中利用 W-C 方程在 $\frac{P^2}{4m^2} \rightarrow -1$ 时的近似解求出自旋是 $(\frac{1}{2}, \frac{\bar{1}}{2})$ 原子体系的全部解,指出这一解答将特别适用于探讨高速飞行的相对论原子。第四节中应用这一波函数计算了 $\eta^0 \rightarrow \gamma + (e^+e^-)$, $\eta^0 \rightarrow \gamma + (\mu^+\mu^-)$ 的过程,并探讨了从实验上获得 $(\mu^+\mu^-)$ 原子束的一些可能性。

本文结果表明,这一方法将完全可能扩展到求解 $0-0$, $0-\frac{1}{2}$ 等复合粒子系统的相对论协变的近似 B-S 波函数。

二、自旋是 $(1/2, \bar{1}/2)$ 的电磁束缚态的原子所满足的 B-S 方程 和各个标量函数所满足的联立的积分方程

对于自旋是 $(1/2, \bar{1}/2)$ 的电磁束缚态原子体系,易写出它们在梯形近似下所满足的 B-S 方程式,

$$(i\hat{p}_1 + m)\chi_p(p)(i\hat{p}_2 + m) = \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p'}{(p-p')^2} \gamma_\mu \chi_p(p') \gamma_\mu. \quad (1)$$

式(1)中 P 是原子体系的总动量, p 是相对动量, $p_1 = \frac{P}{2} + p$, $p_2 = -\frac{P}{2} + p$, $\chi_p(p)$ 是 B-S 波函数,其定义是

$$\chi_p(p) = \int d^4x e^{-ipx} \chi_p(x), \quad (2)$$

而

$$\frac{1}{\sqrt{2E}} \chi_p(x) = \left\langle 0 \left| T \left(\psi \left(\frac{x}{2} \right) \bar{\psi} \left(-\frac{1}{2} \right) S \right) \right| \left(\frac{1}{2}, \frac{\bar{1}}{2} \right) \right\rangle. \quad (3)$$

首先讨论处在 S 波的波函数,即这时 $J^{pc} = 0^{++}, 1^{--}$ 两种情形。由洛仑兹分析和 CPT 变换可知,对于 $J^{pc} = 0^{++}$ 的态共有四个不变函数 f_1, \dots, f_4 , 对于 $J^{pc} = 1^{--}$ 的态将有八个不变函数 $g_1, \dots, g_8^{[7]}$ 。这时,将有

$$J^{pc} = 0^{++}, \quad \chi_p^0(p) = \gamma f_1(p) + \frac{i\hat{p}}{2m} \gamma f_2(p) + \frac{i\hat{p}}{m} \frac{(pP)}{2m^2} \gamma f_3(p) + \frac{i}{2m^2} P_\mu p_\nu \sigma_{\mu\nu} \gamma f_4(p), \quad (4)$$

$$J^{pc} = 1^{--}, \quad \chi_p^1(p) = \hat{f}^1 g_1(p) + \frac{i\hat{P}}{2m} \hat{f}^1 g_2(p) + \frac{i(pf^1)}{m} g_3(p) + \frac{(pf^1)\hat{p}}{m^2} g_4(p) + \frac{1}{2m^3} (pf^1) p_\nu P_\rho \sigma_{\nu\rho} g_5(p)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2m^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} f_{\mu}^{\lambda} p_{\nu} P_{\rho} \gamma_{\sigma} \gamma_5 g_5(p) \\
 & + \frac{1}{m} \sigma_{\mu\nu} f_{\mu}^{\lambda} p_{\nu} \frac{(pP)}{2m^2} g_7(p) + \frac{(pf^{\lambda})}{4m^4} (pP) \hat{p} g_8(p). \quad (5)
 \end{aligned}$$

其中 $f(p)$ 、 $g(p)$ 是 p 、 P 的标量函数， λ 是总角动量指标， $f_{\mu}^{\lambda}(P)$ 是束缚态的极化矢量，有

$$P_{\mu} f_{\mu}^{\lambda}(P) = 0, \quad \sum_{\lambda} f_{\mu}^{\lambda} f_{\nu}^{\lambda} = \delta_{\mu\nu} + \frac{P_{\mu} P_{\nu}}{m^2}, \quad \sum_{\mu} f_{\mu}^{\lambda} f_{\mu}^{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'}. \quad (6)$$

为了求出上述标量函数所满足的积分方程，可将(1)式左边的微分算子移到右边，则有

$$\begin{aligned}
 \chi_p(p) = & \frac{ie^2}{(2\pi)^4 (p_1^2 + m^2)(p_2^2 + m^2)} \\
 & \cdot \int \frac{d^4 p'}{(p-p')^2} (-i\hat{p}_1 + m) \gamma_{\mu} \chi_p(p') \gamma_{\mu} (-i\hat{p}_2 + m). \quad (7)
 \end{aligned}$$

将式(5)和(6)分别代入式(7)，并把一系列由 γ 矩阵和四动量 P_{μ} 、 p_{ν} 等的组合乘上去后求迹，就可得到一系列联立的积分方程组。对于 0^{-+} 态的原子有

$$f_1 = I \left\{ -4 \left(m^2 + p^2 - \frac{P^2}{4} \right) f_1 + P^2 f_2 + \frac{(p'P)^2}{m^2} f_3 \right\}. \quad (8a)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{P^2}{2m^2} f_2 + \frac{(pP)^2}{2m^4} f_3 = & I \left\{ 4P^2 f_1 + P^2 \left(1 - \frac{P^2}{4m^2} - \frac{p^2}{m^2} + \frac{2(pP)^2}{m^2 P^2} \right) f_2 \right. \\
 & \left. + \frac{(p'P)^2}{m^4} \left(m^2 - p^2 - \frac{P^2}{4} + \frac{2(pP)}{(p'P)} (p'p) \right) f_3 \right\}, \quad (8b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{(pP)}{2m^2} f_2 + \frac{p^2(pP)}{2m^4} f_3 = & I \left\{ 4(pP) f_1 + \frac{(pP)}{m^2} \left(m^2 - \frac{P^2}{4} + p^2 \right) f_2 \right. \\
 & \left. - \frac{(pP)(p'P)^2}{2m^4} f_3 + \frac{(p'p)(p'P)}{m^4} \left[\frac{P^2}{4} + m^2 + 2(p'p) - p^2 \right] f_3 \right\}, \quad (8c)
 \end{aligned}$$

$$f_4 = -I \left\{ 8m^2 f_1 + 4m^2 f_2 + 4(p'P) \frac{p^2(p'P) - (pP)(p'p)}{p^2 P^2 - (pP)^2} f_3 \right\}, \quad (8d)$$

对于 1^{-} 态的原子，有

$$\begin{aligned}
 g_1 + \frac{(pf^{\lambda})^2}{m^2} g_4 = & I \left\{ -2 \left[m^2 - \frac{P^2}{4} + p^2 - 2(pf^{\lambda})^2 \right] g_1 + 8(pf^{\lambda})(p'f^{\lambda}) g_3 \right. \\
 & - 2(p'f^{\lambda})^2 \left(1 - \frac{P^2}{4m^2} + \frac{p^2}{m^2} \right) g_4 + \frac{4}{m^2} (p'f^{\lambda})(p'f^{\lambda})(p'p) g_4 \\
 & + \frac{1}{m^2} [P^2(p'p) - (pP)(p'P) - P^2(pf^{\lambda})(p'f^{\lambda})] g_5 \\
 & \left. + \frac{1}{m^4} (p'f^{\lambda})(p'f^{\lambda})(p'P)(pP) g_8 \right\}. \quad (9a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_1 + \frac{p^2}{m^2} g_4 + \frac{(pP)^2}{4m^4} g_8 = & I \left\{ -2 \left(m^2 - \frac{P^2}{4} - p^2 \right) g_1 + \frac{8(p'f^{\lambda})}{(pf^{\lambda})} p^2 g_3 \right. \\
 & - \frac{2}{m^2} \frac{(p'f^{\lambda})}{(pf^{\lambda})} \left(m^2 - \frac{P^2}{4} - p^2 \right) (p'p) g_4 - \frac{1}{m^2} \frac{(p'f^{\lambda})}{(pf^{\lambda})} (p'P)(pP) g_4 \\
 & \left. - \frac{1}{2m^4} \frac{(p'f^{\lambda})}{(pf^{\lambda})} (pP)(p'P) \left(\frac{P^2}{4} + m^2 - p^2 \right) g_8 \right\}, \quad (9b)
 \end{aligned}$$

$$g_4 + \frac{P^2}{4m^2} g_8 = I \left\{ 4m^2 g_1 + 8m^2 \frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)} g_3 - 2 \frac{(p'f^\lambda)(p'P)}{(pf^\lambda)(pP)} \left(m^2 + \frac{P^2}{4} + p^2 \right) g_4 \right. \\ \left. + 4 \frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)} (p'p) g_4 - \frac{1}{2} \frac{(p'P)(p'f^\lambda)}{(pP)(pf^\lambda)} \frac{P^2}{m^2} \left(m^2 + \frac{P^2}{4} + p^2 \right) g_8 \right. \\ \left. + \frac{1}{m^2} \frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)} (p'P)(pP) g_8 \right\}, \quad (9c)$$

$$g_2 + \frac{(pf^\lambda)^2}{m^2} g_5 + \frac{p^2 - (pf^\lambda)^2}{m^2} g_7 = I \left\{ 4m^2 g_1 - 8(pf^\lambda)(p'f^\lambda) g_3 + 4(p'f^\lambda)^2 g_4 \right\}, \quad (9d)$$

$$g_2 + \frac{(pf^\lambda)^2}{m^2} g_5 + \frac{(pP)^2}{P^2 m^2} g_7 = I \left\{ 4m^2 g_1 - 8(p'f^\lambda)(pf^\lambda)(g_3 + g_6) \right. \\ \left. + 4(p'f^\lambda)^2 g_4 + 8(p'p) g_6 - 8 \frac{(p'P)(pP)}{P^2} g_6 \right\}, \quad (9e)$$

$$g_2 + \frac{p^2 P^2 - (pP)^2}{m^2 P^2} g_5 + \frac{(pP)^2}{m^2 P^2} g_7 = I \left\{ 4m^2 g_1 + 8 \frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)} \left[\frac{(pP)^2}{P^2} - p^2 \right] g_3 \right. \\ \left. - 4 \frac{(p'f)}{(pf)} \left[\frac{(pP)(p'P)}{P^2} - (p'p) \right] g_4 \right\}. \quad (9f)$$

$$g_3 = I \left\{ 4m^2 g_1 + \frac{4(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)} \left(\frac{P^2}{4} + m^2 - p^2 \right) g_3 + \frac{4(p'f^\lambda)(p'p)}{(pf^\lambda)} g_4 \right. \\ \left. + \frac{1}{m^2} \frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)} (p'P)(pP) g_8 \right\}, \quad (9g)$$

$$g_6 = I \left\{ -4m^2 g_1 + 2 \left(\frac{P^2}{4} + m^2 - p^2 \right) \frac{p'^2 P^2 - P^2 (p'f^\lambda)^2 - (p'P)^2}{p^2 P^2 - P^2 (pf^\lambda)^2 - (pP)^2} g_6 \right\}. \quad (9h)$$

在式(8)和(9)中;算子 I 的定义是

$$I \equiv \frac{ie^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{(p_1^2 + m^2)(p_2^2 + m^2)} \int \frac{d^4 p'}{(p - p')^2}. \quad (10)$$

式(8)–(10)即是所要求的 B-S 方程的 S 态各个标量函数所满足的联立积分方程组, 要想严格求解这两组积分方程将是十分困难的. 但如果注意到在“弱耦合”的条件下(即结合能很小), 由 B-S 波函数的谱条件, 可知有^[8]

$$\frac{P^2}{4m^2} \sim -1 + O(\alpha^2), \quad \frac{P^2}{m^2} \sim O(\alpha^2), \quad \frac{P^4}{m} \sim O(\alpha^2), \quad (11)$$

这就可能利用式(11)而大大简化(8)和(9)式¹⁾. 当我们略去了这些 $O(\alpha^2)$ 项之后, (8)式简化为

$$f_1 = I[-4m^2 f_1], \quad (8'a)$$

$$f_2 = I[4m^2 f_1], \quad (8'b)$$

$$f_3 = I[-4m^2 f_1], \quad (8'c)$$

$$f_4 = I[-4m^2 f_1]. \quad (8'd)$$

1) 准确一点说, 式(11)只是当波函数 f, g 积分后不发散时才是正确的. 如 f, g 的近似解将导致(8)和(9)式右方中的积分发散, 那末式(11)将不再正确. 在第三节中将证明 f, g 将以 p^6 方式下降, 再考虑到算子 I 中含有 $(p - p')^{-2}$ 因子, 因而如果将 f, g 的近似解代入(8)和(9)各式的右方, 将不难验证显然存在(11)式.

(9)式简化为

$$g_1 = I\{-4m^2 g_1\}, \quad (9'a)$$

$$g_2 = I\{4m^2 g_1\}, \quad (9'b)$$

$$g_3 = I\{4m^2 g_1\}, \quad (9'c)$$

$$g_4 = I\left\{4m^2 \left[1 - \frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)}\right] g_1 - 4m^2 \frac{(p'f^\lambda)^2}{(pf^\lambda)^2} g_4\right\}, \quad (9'd)$$

$$g_5 = I\left\{4m^2 \frac{(p'f^\lambda)^2}{(pf^\lambda)^2} g_4\right\}, \quad (9'e)$$

$$g_6 = I\{-4m^2 g_1\}, \quad (9'f)$$

$$g_7 = I\left\{-8m^2 \frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)} g_1\right\}, \quad (9'g)$$

$$g_8 = I\left\{-4m^2 \frac{(p'f^\lambda)^2}{(pf^\lambda)^2} g_4 + 4m^2 \frac{(p'f^\lambda)}{(pf^\lambda)} g_6\right\}, \quad (9'h)$$

由上列两组方程和波函数(4)和(5)的定义,可知以 f_3, g_4, g_5, g_7, g_8 为系数的项,其量级与 $O(\alpha^2)$ 相同,因而在精确度为 $1+O(\alpha)$ 的要求下,可略去这些小分量. 这样就有

$$f_1 = -f_2 = f_4 = g_1 = -g_2 = -g_3 = g_6 = \varphi(p, P). \quad (12)$$

精确度达到 $1+O(\alpha)$ 量级的波函数是

$$0^{+-}: \chi_p^0(p) = \left[1 - \frac{i\hat{P}}{2m} + \frac{i}{2m^2} P_\mu p_\nu \sigma_{\mu\nu}\right] \gamma_5 \varphi(p, P), \quad (13)$$

$$1^{--}: \chi_p^1(p) = \left[\hat{p}^\lambda - \frac{i\hat{P}\hat{p}^\lambda}{2m} - \frac{i(f^\lambda p)}{m} + \frac{1}{2m^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} f^\mu p^\nu P_\rho \gamma_\sigma \gamma_5\right] \varphi(p, P), \quad (14)$$

其中 $\varphi(p, P)$ 将满足

$$\varphi(p, P) = -4m^2 I \varphi(p, P), \quad (15)$$

亦即标量粒子所满足的 W-C 方程^[3,4].

三、关于自旋 1/2 的正反费米子组成的 束缚态的近似的 B-S 波函数

方程(15)曾由 Wick 和 Cutkosky 详尽地研究过它的解答. 在 $\frac{P^2}{4m^2} \rightarrow -1$ 的情况下, 式(15)有下列近似的本征值和本征波函数^[3,4],

$$\frac{\alpha}{2n} = \left(1 + \frac{P^2}{4m^2}\right)^{1/2}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \varphi_n^{lm}(p, P) = & N_{nlm} \left(p^2 + m^2 + \frac{P^2}{4}\right)^{-n} \left[\left(\frac{P}{2} + p\right)^2 + m^2\right]^{-1} \left[\left(\frac{P}{2} - p\right)^2 + m^2\right]^{-1} \\ & \cdot R^{n-l-1} c_{n-l-1}^{l+1} (X/R) \mathcal{Y}_l^m(\mathbf{p}). \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$R^2 = \left(p^2 + m^2 + \frac{P^2}{4}\right)^2 - 4 \frac{(pP)^2}{P^2} \left(m^2 + \frac{P^2}{4}\right), \quad (18)$$

$$X = p^2 + m^2 + \frac{P^2}{4}, \quad (19)$$

而 N_{nlm} 是归一化常数, c_n^l 是盖根鲍威多项式, $\mathcal{Y}_l^m(\mathbf{p})$ 是立体球谐函数. 在运动系中,

$$\mathcal{Y}_l^m(\mathbf{p}) \rightarrow \mathcal{Y}_l^m\left(\sqrt{p^2 - \frac{(pP)^2}{P^2}} \cdot e_p(P)\right), \quad (20)$$

$e_p(P)$ 是方向在 $\mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ 的协变极化矢量. 归一化常数 N_{nlm} 将由下列归一化条件定出,

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{2p^2}{m^2} \varphi^0(p, P) = 1. \quad (21)$$

对于基态是 S 态的体系, $\varphi_1^0(p, P)$ 有如下形式

$$\varphi_1^0(p, P) = \frac{N}{\left[\left(\frac{P}{2} + p\right)^2 + m^2\right] \left[p^2 + m^2 + \frac{P^2}{4}\right] \left[\left(\frac{P}{2} - p\right)^2 + m^2\right]} \quad (22)$$

应用归一化条件(21), 在精确度要求是 $1 + O(\alpha)$ 的情况下, 归一化条件(21)就成为

$$\frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{2p^2}{m^2} [\varphi_1^0(p, P)]^2 = 1. \quad (23)$$

将(22)代入(23), 即可求出

$$\begin{aligned} N &= 16 \sqrt{2\pi} m^4 \left(1 + \frac{P^2}{4m^2}\right)^{5/4} \\ &= 4 \sqrt{\pi} \cdot m^4 \alpha^{5/2}. \end{aligned} \quad (24)$$

式(13)、(14)、(22)和(24)就是所要求的相对论协变的近似的基态 B-S 波函数. 容易看出, 这一波函数还满足谱条件, 有所需要的割缝等等性质. 值得注意的是, 式(17)、(22)虽然是 B-S 方程的很好的近似解答, 但这一解答是否确实已达到 $1 + O(\alpha)$ 量级的精确度, 将另行讨论.

不难将上述求得 S 波波函数的方法推广到其它情况. 实际上对于其它轨道角动量的激发态, 亦可用这方法求出相对论协变的、满足谱条件的近似的 B-S 波函数, 步骤是: 第一步根据量子数和对称性的要求定出 B-S 波函数中应包含的不变函数, 如(4)和(5)那样. 第二步求出这些不变函数所满足的方程——一般是如同(8)和(9)那样的耦合起来的方程组. 第三步利用 W-C 方程的解求得所给出的方程组的解答. 对于电磁相互作用这样弱耦合的束缚态而言, 在不十分高的精确度下, 这些方程组往往是退耦的, 如同(8')和(9')式那样. 因而, 无需求解联立方程便可得到所要求精确度的近似的 B-S 波函数.

以上所得到的结果不难分析出, 在我们所做的近似下, 将联立方程组退耦, 能得到较好的近似的 B-S 波函数, 是和相应的非相对论的 $\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$ 耦合项对 S 波无贡献的事实相联系的. 对于 $J^{pc} = 0^{++}, 1^{+-}, 2^{-+}, \dots$ 等相应于正反费米子组成的自旋 S 为 0 的态, 非相对论的 $\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$ 耦合项当然没有贡献. 可预计到做近似使联立方程组退耦, 亦能得到较好的近似的 B-S 波函数, 而对于自旋 S 不为 0 的非 S 波波函数, 由于存在 $\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}$ 耦合项的贡献, 因此在同样做近似并令方程组退耦, 所得到的近似波函数可能不会太好.

然而, 当我们只需要精确度不太高的近似波函数时, 仍然可以把式(17)所描述的高轨道角动量的波函数连同式(13)和(14)一起, 给出相应的高轨道角动量的近似波函数. 对于总自

旋 $S = 0$ 的态,有

$$\chi_{\frac{1}{2}^{-1}}^I(p) = \left[1 - \frac{i\hat{P}}{2m} \right] \gamma_5 \varphi_n^{Im}(p, P), \quad (25)$$

对于总自旋 $S = 1$ 的态,有

$$\chi_{\frac{1}{2}^I}(p) = c_{JM}^{Im1\lambda} \left[\hat{p} - \frac{i\hat{P}\hat{p}^\lambda}{2m} \right] \varphi_n^{Im}(p, P), \quad (26)$$

其中 $c_{JM}^{Im1\lambda}$ 是角动量耦合的 C-G 系数,仅对于 $J = l + 1, l, l - 1$ 不为零. 式(25)、(26)和(17)以及条件(21),将能用来讨论高速飞行时任意状态下 $(1/2, \bar{1}/2)$ 原子体系的产生和湮灭过程.

四、关于 $\eta^0 \rightarrow \gamma + (e^+e^-), \eta^0 \rightarrow \gamma + (\mu^+\mu^-)$ 过程

近来,实验上提出利用 $\pi^0 \rightarrow \gamma + (e^+e^-)$ 的衰变过程来产生氩原子束^[9]. 准确计算它们的衰变几率或分枝比将成为实际需要解决的一个问题. 其实,实验上更容易产生的是利用 $\eta^0 \rightarrow \gamma + (\mu^+\mu^-), \eta^0 \rightarrow \gamma + (e^+e^-)$ 等过程来得到 $(\mu^+\mu^-)$ 的原子. 因为 (e^+e^-) 原子束流的强度除决定于 π^0 介子的产额外,还取决于靶的厚薄. 对于 (e^+e^-) 原子,由于它们的原子裂解截面将达 $10^{-17} - 10^{-18}$ (厘米)² 的量级,因而有效的靶厚只不过 2—20 微米左右. $(\mu^+\mu^-)$ 原子裂解的截面将至少比 (e^+e^-) 原子小 40000 倍以上,这就可以期待产生 $(\mu^+\mu^-)$ 原子的有效靶厚将至少大 40000 倍以上. 如果将入射 π 介子能量取在产生 η^0 粒子的共振峰 $N'(1535)$ 临近,这时衰变道

$$N'(1535) \rightarrow N + \eta^0, \quad (27)$$

将占总的衰变几率的 65%. 因而人们仍将能获得较高的 η^0 介子的产额,并从而易于观测到 $(\mu^+\mu^-)$ 原子的束流.

容易利用复合粒子场论的费曼规则和上述波函数来求出过程

$$\eta^0 \rightarrow \gamma + (e^+e^-), \eta^0 \rightarrow \gamma + (\mu^+\mu^-) \quad (28)$$

的分枝比. 由微扰展开式可知,产生 $(e^+e^-), (\mu^+\mu^-)$ 的过程相应于下列的费曼图^[10]:

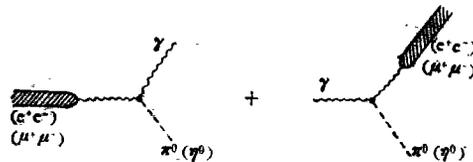


图 1

而 $\pi^0(\eta^0) \rightarrow 2\gamma$ 过程的费曼图是

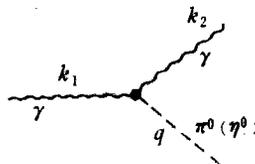


图 2

如果 $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, $\eta^0 \rightarrow 2\gamma$ 过程的跃迁矩阵元有普遍形式

$$\begin{aligned} & \langle \gamma(k_1), \gamma(k_2) | \pi^0(q) \rangle \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(q - k_1 - k_2) F(q^2) \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} e_\mu^{(1)} k_\nu^{(1)} e_\rho^{(2)} k_\sigma^{(2)} \frac{1}{\sqrt{8q_0\omega_1\omega_2}}, \end{aligned} \quad (29)$$

那么 $\pi^0 \rightarrow \gamma + (e^+e^-)$, $\eta^0 \rightarrow \gamma + (\mu^+\mu^-)$ 的跃迁矩阵元将是^[10]

$$\begin{aligned} & \langle (e^+e^-), \gamma | \pi^0(\eta^0) \rangle \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(q - P - k) F(q^2, P^2) \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} e_\mu k_\nu f_\rho P_\sigma \frac{g}{\sqrt{8q_0\omega P_0}}. \end{aligned} \quad (30)$$

其中

$$g = 2e\phi(0)/P^2, \quad (31)$$

而

$$\begin{aligned} \phi(0) &= 4(2\pi)^{-4} \int d^4p \frac{N}{\left[p^2 + m^2 + \frac{P^2}{4} \right] \left[\left(p + \frac{P}{2} \right)^2 + m^2 \right] \left[\left(p - \frac{P}{2} \right)^2 + m^2 \right]} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \alpha^{3/2} m^2 \left[1 - \frac{2\alpha}{\pi} \left(1 - \ln \frac{\alpha}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

(31)式中的因子 2 是因为 π^0, η^0 有两个光子都能产生 (e^+e^-) 原子。考虑到 (e^+e^-) 原子的总质量极小,对于相空间的修正是微不足道的,因而就有

$$\begin{aligned} \frac{W(\pi^0 \rightarrow \gamma + (e^+e^-))}{W(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)} &= \frac{W(\eta^0 \rightarrow \gamma + (e^+e^-))}{W(\eta^0 \rightarrow 2\gamma)} \\ &= g^2 = \frac{1}{2} \alpha^4 \left[1 - \frac{2\alpha}{\pi} \left(1 - \ln \frac{\alpha}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

式(33)中 $\frac{2\alpha}{\pi} \left(1 - \ln \frac{\alpha}{2} \right)$ 是相对论协变波函数零点值造成的修正。这使 $\phi(0)$ 值小了约 1.5%。在通常非相对论波函数中,这一修正值是没有的^[9]。如果认为 π^0, η^0 还将产生出处于激发态的原子,那末就有

$$\begin{aligned} \frac{W(\pi^0 \rightarrow \gamma + (e^+e^-))}{W(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)} &= \frac{W(\eta^0 \rightarrow \gamma + (e^+e^-))}{W(\eta^0 \rightarrow 2\gamma)} \simeq \frac{1}{2} \alpha^4 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{2} \alpha^4 \cdot 1.20 \cdot \left[1 - \frac{2\alpha}{\pi} \left(1 - \ln \frac{\alpha}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

对于 $\eta^0 \rightarrow \gamma + (\mu^+\mu^-)$ 过程,相空间的修正并不是微不足道的。但不难算出

$$\begin{aligned} \frac{W(\eta^0 \rightarrow \gamma + (\mu^+\mu^-))}{W(\eta^0 \rightarrow 2\gamma)} &= \frac{F^2(q^2, P^2)}{F^2(q^2, 0)} \cdot \frac{1}{2} \alpha^4 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \right) \left[1 - \frac{2\alpha}{\pi} \left(1 - \ln \frac{\alpha}{2} \right) \right] \\ &\quad \cdot \left(1 - \frac{4m_\mu^2}{m_\eta^2} \right)^2, \end{aligned} \quad (35)$$

其中相空间修正因子 $\left(1 - \frac{4m_\mu^2}{m_\eta^2} \right)^2 = (1 - 0.147)^2 = 0.73$ 。

由上述计算容易看出,这里给出的产生 (e^+e^-) 或 $(\mu^+\mu^-)$ 与相应产生光子的过程,在略去相空间的差异时,总有

$$\frac{W(\alpha + \beta \rightarrow (e^+e^-) + \dots)}{W(\alpha + \beta \rightarrow \gamma + \dots)} = \frac{1}{2} g^2 = \frac{\alpha^4}{4} \left[1 - \frac{2\alpha}{\pi} \left(1 - \ln \frac{\alpha}{2} \right) \right] \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \right) \simeq 10^{-3}. \quad (36)$$

上述例子告诉我们,有了原子体系的波函数之后,将不难应用复合粒子场论的费曼规则计算出任何一个包括束缚态在内的过程。

值得注意的一个问题是:W-C方程的近似解(17)、(22)不仅是具有正确解析形式的弱耦合下的近似解,而且当 $P \rightarrow 0$ 时,它还将是极强束缚态的严格解。式(17)、(22)仿佛是一个很好的插值公式将 $\frac{P^2}{4m^2} \rightarrow -1$, $\frac{P^2}{4m^2} \rightarrow 0$ 这两个极端情形有机地联结起来。可能的是,式(17)、(22)同样将能成为强耦合下一类(不是全部)近似解。

参 考 文 献

- [1] N. Nakanishi, *Supp. Prog. Theor. Phys.*, **43**(1969), 1.
 [2] 胡宁, *物理学报*, **25** (1976), 494; 北京大学物理系基本粒子理论组, *物理学报*, **25** (1976), 316; 415.
 A. И. Алексеев, *ЖЭТФ*, **36** (1959), 1435.
 [3] G. C. Wick, *Phys. Rev.*, **96**(1954), 1124.
 [4] R. E. Cutkosky, *Phys. Rev.*, **96**(1954), 1135.
 [5] 吴坚武等, *中国科学*, **5** (1977), 431.
 A. H. Guth, *Ann. Phys. (N. Y.)*, **82**(1974), 407.
 [6] 吴咏时、何祚麻, *物理学报*, **26** (1977), 274. 该文引有关于四维谐振子的有关文献。
 [7] 北京大学物理系基本粒子理论组, 中国科学院数学研究所理论物理研究室, *北京大学学报(自然科学版)*, **12** (1966), 209.
 [8] 中国科学院数学研究所理论物理研究室, 北京大学物理系基本粒子理论组, *原子能*, (1966), 507.
 [9] Л. Л. Немецков, *К. Ф.* **15** (1972), 1047.
 [10] 何祚麻、张肇西、黄涛, *物理学报*, **25** (1976), 215.

THE APPROXIMATE B-S WAVE FUNCTION FOR ELECTROMAGNETIC BOUND STATES CONSISTING OF A FERMION AND AN ANTI-FERMION OF SPIN 1/2

HE JU ZHANG ZHAO-XI

(*Institute of High Energy Physics, Academia Sinica*)

HE ZUO-XIU

(*Institute of Theoretical Physics, Academia Sinica*)

ABSTRACT

The Bethe-Salpeter equation for the electromagnetic bound states consisting of a fermion and an anti-fermion of spin $1/2$ is solved in the Ladder approximation in this paper. The well-known Balmer series is obtained together with the B-S wave functions, which are relativistic covariant, also have correct analytic properties and satisfy the spectra conditions. The results are applied to the processes $\eta^0 \rightarrow \gamma + (e^+e^-)$ and $\eta^0 \rightarrow \gamma + (\mu^+\mu^-)$. It is shown that the creation, annihilation and transition processes of such relativistic electromagnetic bound states can be calculated conveniently by using the approximate B-S wave functions obtained in this paper.