

量子色动力学中的动力学自发破缺

邝宇平 易余萍

(兰州大学)

摘 要

本文用重整化群方程和 Dyson 方程研究了量子色动力学 (QCD) 中的动力学自发破缺问题。指出: (1) 研究 QCD 中 A 类模型的动力学自发破缺这类非微扰问题时, 电磁作用 (和弱作用) 的贡献是不能忽略的。 (2) 对许多实际模型 (A 类模型) 来说, 在 QCD 渐近自由时, 对层子间的电磁作用做弱耦合近似的计算后, 得到动力学自发破缺出现的结论。如果现在量子电动力学仍能用 Johnson-Baker-Willey 的自洽处理, 或 β_e 有一紫外稳定固定点 $e_\infty \neq 0$ (β_e 的简单零点) 且 e_∞ 不太大, 则上述结论在电磁作用的计算超出弱耦合近似时仍成立。

一、引 言

量子色动力学 (以下简称 QCD) 的研究已日益为人们所重视。它可能是一种有希望的强子内部动力学理论。对于层子和色规范场尚未被发现的事实, 目前有两种设想。一种是假定色规范对称性是完全的, 试图证明这种理论是红外不稳定的, 说明层子和色规范场完全“禁闭”于色单态的强子之中, 排除它们作为自由粒子存在的可能性。另一种是考虑色规范对称性有自发破缺, 色规范场有质量, 由于层子和色规范场的质量较大, 所以目前未被发现。我们现在主要讨论后一情况出现的可能性, 指出对许多模型来说, 实际情况往往是后者, 不是前者。

QCD 的特性之一是它的渐近自由性质。Gross 和 Wilczek^[1] 一开始就指出: 通常引入基本标量场的自发破缺机制是很难使全部色规范场都获得质量而又不破坏渐近自由性质的。因此色规范对称性如果破缺则更大的可能性是由动力学机制引起的。虽然也曾有人考虑让耦合常数满足一定的本征值条件来保持渐近自由^[2], 但有人指出, 这样的 Higgs 标量场实质上是一个复合标量场, 也就是说, 实质上相当于一种动力学自发破缺^[3]。因此研究 QCD 中的动力学自发破缺是必要的。

动力学自发破缺是 Dyson 方程的非微扰解, 严格讨论 Dyson 方程的解是十分困难的。目前能够做到的只是讨论它的线性化近似方程的解。Cornwall^[4] 曾从一个唯象的有效拉氏函数出发用 Callan-Symanzik 方程讨论过这种解。指出在一定条件下, 非阿贝尔规范理论可以既存在动力学自发破缺解又保持渐近自由。不过这个条件很苛, 通常实际的 QCD

模型是不能满足此条件的。在 Cornwall 及其它类似的工作中，都是只考虑色动力学本身，而将层子之间的电磁作用及弱作用完全略去。事实上，对动力学自发破缺这类非微扰效应来说，这种简化未必是合理的。层子间的电磁作用总是造成正、反层子之间的吸引力的，是有利于形成动力学自发破缺的。尤其对许多模型来说，Dyson 方程的核是非平方可积的(以下称之为 A 类模型^[5])，它们的动力学自发破缺性质主要取决于紫外渐近行为^[5,6]。如果电磁作用不是渐近自由的，则它对这类模型的动力学自发破缺将起重要作用(因为 QCD 是渐近自由的)。所以只限于色动力学本身的讨论还不能完全说明问题。我们的主要目的就是研究电磁作用对 QCD 中动力学自发破缺的影响。在对电磁作用做弱耦合近似计算后，我们指出动力学自发破缺的存在条件大大放宽，对通常的实际模型来说，可以既存在动力学自发破缺又具有 QCD 渐近自由的性质。如果现在量子电动力学仍能用 Johnson-Baker-Willey 的自洽处理^[7]，或重整化群方程的 β_e 有一紫外稳定固定点 $e_\infty \neq 0$ (β_e 的简单零点)且 e_∞ 不太大，则上述结论在电磁作用的计算超出弱耦合近似时仍成立。

我们在第二节中给出一个用 Weinberg 重整化群方程^[8]计算动力学自发破缺的比较简单的方法。在第三节中用此方法研究电磁作用对 QCD 动力学自发破缺的影响。第四节讨论基态稳定性问题，指出有破缺的基态是能量最低的稳定态，是真正的物理真空态。第五节简单地讨论弱-电统一对这问题的影响。

二、重整化群计算

设色规范群 G 为一个 r 阶单纯李群，耦合常数为 g ，色规范场为 $B_\mu^i (i = 1, 2, \dots, r)$ 。考虑费米场 ψ (层子场)属于群 G 的表示 R 。设 $t_i (i = 1, 2, \dots, r)$ 是群 G 的生成元在表示 R 中的矩阵。则这个系统的规范不变拉氏函数为

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G_{\mu\nu}^i - \bar{\psi} \gamma_\mu (\partial_\mu + ig t_i B_\mu^i) \psi - m \bar{\psi} \psi + \text{抵消项}, \quad (1)$$

这里 m 是费米子的对称质量，

$$G_{\mu\nu}^i \equiv \partial_\mu B_\nu^i - \partial_\nu B_\mu^i - g C_{ijk} B_\mu^j B_\nu^k,$$

C_{ijk} 是群 G 的结构常数。我们研究这个系统的动力学自发破缺解。

一般地说，求解 Dyson 方程可以得到费米子自能的一个自发破缺部分

$$\Sigma_\nu(p) = T^{(\nu)} m_\nu \sigma(p^2),$$

其中 $T^{(\nu)}$ 是一个 ν 秩无迹对称不可约张量算符，标志 Σ_ν 的破缺情况 ($\nu = 1$ 是伴随表示)； m_ν 标志费米子质量破缺部分的大小； $\sigma(p^2)$ 是四维动量的标量函数 $\sigma(0) \neq 0$ 。在 Weinberg 方案中^[8]，应取成 $\sigma(p^2 = \mu^2) = 1$ (μ 是重整化点)。类似地也可以求得规范场真空极化张量中的自发破缺部分

$$\Pi_{i\nu}(p) = M_i^2 \pi(p^2),$$

其中 M_i 是第 i 个规范场的质量， $\pi(p^2)$ 也是个四维动量的标量函数， $\pi(0) \neq 0$ ， $\pi(p^2 = \mu^2) = 1$ 。这样，在有自发破缺时理论中就有 g 、 m 、 m_ν 、 M_i^2 等与重整化点 μ 有关的参量。为了便于研究自发破缺，我们用 g 、 m 、 m_ν 来建立重整化群方程 (M_i^2 作为它们的函数)。

根据资料 [8] 的精神, 我们立刻可写出一粒子不可约 n 点固有顶角 $\Gamma^{(n)}$ 满足的重整化群方程:

$$\left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_\theta(g) m \frac{\partial}{\partial m} - \gamma_{\theta\nu}(g) m_\nu \frac{\partial}{\partial m_\nu} - \gamma_I(g) \right\} \Gamma^{(n)} = 0, \quad (2)$$

这里 $\beta(g)$ 、 $\gamma_I(g)$ 和 $\gamma_\theta(g)$ 的意义与资料 [8] 相同.

$$\begin{aligned} \beta(g) &\equiv \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g, \\ \gamma_I(g) &\equiv \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_I, \\ \gamma_\theta(g) &\equiv \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_\theta, \end{aligned} \quad (3)$$

其中 Z_I 是 $\Gamma^{(n)}$ 的重整化常数, Z_θ 是 m 的重整化常数, 定义为:

$$m = Z_\theta^{-1} m_0, \quad (4)$$

(m_0 为裸对称质量). 由于 m_ν 不是原来拉氏函数 (1) 中包含的量, 所以 $\gamma_{\theta\nu}(g)$ 需要特殊考虑. 可以像资料 [9] 那样, 在拉氏函数中引入一个与紫外截止参量 Λ 有关的质量破缺项 $-m_{\nu 0}(\Lambda) \bar{\psi} T^{(\nu)} \psi$, 裸质量 $m_{\nu 0}(\Lambda)$ 取为 $m_{\nu 0}(\Lambda) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} 0$. 如果理论中存在与 Λ 无关的非零 m_ν 解, 则此 m_ν 就是自发破缺产生的质量. 这样, 也可以定义:

$$\begin{aligned} m_\nu &= Z_{\theta\nu}^{-1} m_{\nu 0}^*, \\ \gamma_{\theta\nu} &\equiv \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln Z_{\theta\nu}. \end{aligned} \quad (5)$$

研究动力学自发破缺采用 Landau 规范最为方便^[10]. 下面我们一律在 Landau 规范中讨论. 我们的目的是研究 $\Gamma^{(n)}$ 的紫外渐近行为. 对渐近自由的理论来说, 方程 (2) 中的系数是可以用微扰论来计算的. 如所熟知的, $\beta(g)$ 和 $\gamma_I(g)$ 的微扰计算结果为^[1]:

$$\begin{aligned} \beta(g) &= -\frac{1}{2} b_0 g^3, \quad b_0 \equiv \frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} \sum_{\text{费米场}} \frac{d(R)}{r} C_2(R) \right], \\ \gamma_\psi &= 0, \\ \gamma_B &= c_0 g^2, \quad c_0 \equiv -\frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{13}{3} C_2(G) - \frac{8}{3} \sum_{\text{费米场}} \frac{d(R)}{r} C_2(R) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $C_2(R)$ 和 $C_2(G)$ 分别为表示 R 和伴随表示中的 Casimir 算子. $d(R)$ 是表示 R 的维数. $\gamma_\theta(g)$ 和 $\gamma_{\theta\nu}(g)$ 由图 1 来计算, 很易求得:

$$\gamma_\theta(g) = d_0 g^2, \quad d_0 \equiv \frac{3}{8\pi^2} C_2(R), \quad (7a)$$

$$\gamma_{\theta\nu}(g) = d_{\nu 0} g^2, \quad d_{\nu 0} \equiv \frac{3}{8\pi^2} \Lambda^{(\nu)}, \quad (7b)$$

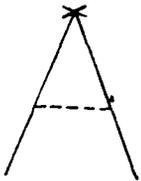


图 1 实线表示费米场, 虚线表示色规范场, \times 表示质量插入

其中 $\Lambda^{(\nu)}$ 的定义是:

$$t_i T^{(\nu)} t_i \equiv \Lambda^{(\nu)} T^{(\nu)}. \quad (8)$$

也可以不用引入 $m_{\nu 0}(\Lambda)$ 的办法, 直接用 Dyson 方程来求出 $\gamma_{\theta\nu}(g)$

* 若 $\Lambda \rightarrow \infty$ 时 $m_\nu \neq 0$, 则 $Z_{\theta\nu}(\Lambda) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} 0$. 因此和通常自发破缺理论一样, $m_\nu \neq 0$ 时的重整化情况与对称理论相同.

(见附录).

确定了(2)式中全部系数后,就可以按通常的做法求出它的解^[8]. 当 $\Gamma^{(n)}$ 中的所有动量按同一比例 $p = \kappa p_0$ 变化时,(2)式可写为:

$$\left\{ \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + [1 + \gamma_\theta(g)] m \frac{\partial}{\partial m} + [1 + \gamma_{\theta\nu}(g)] m_\nu \frac{\partial}{\partial m_\nu} - D_r + \gamma_r \right\} \Gamma^{(n)} = 0, \quad (9)$$

其中 D_r 是在通常量纲分析下 $\Gamma^{(n)}$ 作为质量量纲的维数. 引入 $\bar{g}(\kappa)$ 、 $\bar{m}(\kappa)$ 、 $\bar{m}_\nu(\kappa)$, 满足

$$\begin{aligned} \kappa \frac{d}{d\kappa} \bar{g} &= \beta(\bar{g}), \quad \bar{g}(1) = g; \\ \kappa \frac{d}{d\kappa} \bar{m} &= -[1 + \gamma_\theta(\bar{g})] \bar{m}, \quad \bar{m}(1) = m; \\ \kappa \frac{d}{d\kappa} \bar{m}_\nu &= -[1 + \gamma_{\theta\nu}(\bar{g})] \bar{m}_\nu, \quad \bar{m}_\nu(1) = m_\nu. \end{aligned} \quad (10)$$

则(9)的解可写成:

$$\Gamma^{(n)}(\kappa p_0, g, m, m_\nu, \mu) \underset{\kappa \rightarrow \infty}{\sim} \kappa^{D_r} e^{-\int^{\kappa} \gamma_r(\bar{g}(\kappa')) \frac{d\kappa'}{\kappa'}} \times \sum_{l_1, l_2} \frac{\bar{m}^{l_1}(\kappa) \bar{m}_\nu^{l_2}(\kappa)}{l_1! l_2!} \left[\frac{\partial^{l_1+l_2}}{\partial \bar{m}^{l_1} \partial \bar{m}_\nu^{l_2}} \Gamma^{(n)}(p_0, \bar{g}, \bar{m}, \bar{m}_\nu, \mu) \right]_{m=m_\nu=0}. \quad (11)$$

由(6),(7)和(10)很易求得 $\kappa \rightarrow \infty$ 时 \bar{g} 、 \bar{m} 、 \bar{m}_ν 的解为:

$$\begin{aligned} \bar{g}^2(\kappa) &\sim \frac{1}{b_0 \ln \kappa}, \\ \bar{m}(\kappa) &\sim \kappa^{-1} (\ln \kappa)^{-\delta}, \\ \bar{m}_\nu(\kappa) &\sim \kappa^{-1} (\ln \kappa)^{-\delta_\nu}, \\ \delta &\equiv \frac{d_0}{b_0}, \quad \delta_\nu \equiv \frac{d_{\nu 0}}{b_0}, \end{aligned} \quad (12)$$

将(12)代入(11)即得到 $\Gamma^{(n)}$ 的渐近解.

考虑费米子二点固有顶角

$$\Gamma_{\psi\bar{\psi}}^{(2)} = \hat{p} - i\Sigma_s(p) - i\Sigma_\nu(p) \quad (13)$$

的渐近解 ($\Sigma_s(p)$ 是费米子自能中的对称部分). 由于在 $\Gamma_{\psi\bar{\psi}}^{(2)}(p_0, \bar{g}, \bar{m}, \bar{m}_\nu, \mu)$ 中 $T^{(v)}$ 总是以 $T^{(v)}\bar{m}_\nu$ 的形式出现的, 所以(11)中 $l_1 = 0, l_2 = 1$ 的部分给出 $\Sigma_\nu(p)$ 的渐近行为, 即

$$\Sigma_\nu(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} T^{(v)} m_\nu (\ln p^2)^{-\delta_\nu}, \quad (14)$$

这正是 Cornwall^[4] 用有效拉氏函数和 Callan-Symanzik 方程解得的结果. 不过我们现在的计算比较简便.

类似地,考虑规范场二点固有顶角

$$\Gamma_{BB}^{(2)} = -i(p^2 + \Pi_i(p)), \quad (15)$$

由量纲分析及 $\pi(0) \neq 0$ 知其中的 $\Pi_{i\nu}(p)$ 部分最低含 \bar{m}^2 或 \bar{m}_ν^2 . 由于 $C_2(R) > \Lambda^{(v)[4]}$, 所以 $d_0 > d_{\nu 0}$, 故知(11)中 $l_1 = 0, l_2 = 2$ 的部分给出 $\Pi_{i\nu}(p)$ 的渐近行为, 即

$$\Pi_{i\nu}(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} M_i^2 (\ln p^2)^{-2c_\nu/b_0 - 2\delta_\nu} \quad (16)$$

在 $p \rightarrow \infty$ 时 $\Sigma_\nu(p)$ 满足的 Dyson 方程为^[6]:

$$\Sigma_\nu(p) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Gamma_\mu(k-p, p, -k) S(k) \Sigma_\nu(k) S(k) \Gamma_\nu(p-k, -p, k) D_{\mu\nu}(p-k) + \text{非领头项}, \quad (17a)$$

其中 S 和 $D_{\mu\nu}$ 分别表示费米场和色规范场的对称物理传播子, Γ_μ 表示色规范场与费米场的一粒子不可约对称物理顶角. 它们的大动量渐近行为可以由重整化群方法得知, 由之很易看出领头项是由积分中 k 大的部分贡献的, 并且 (17a) 可具体化为^[6]:

$$\Sigma_\nu(p) = \text{const } \Lambda^{(\nu)} \int_{p^2}^{\infty} \frac{dk^2}{k^2} g^2(k) \Sigma_\nu(k) + \text{非领头项}. \quad (17b)$$

容易看出 (17) 的解是具有 (14) 的形式的, 并且这个解存在的条件是

$$\delta_\nu > 0. \quad (18a)$$

再考虑到渐近自由条件 $b_0 > 0$, 则由 (12) 和 (7b) 看出存在解的条件是:

$$\Lambda^{(\nu)} > 0. \quad (18b)$$

事实上从上面求解过程中亦可看出 (18b) 的条件. 因为要在取 $m_{\nu 0}(\Lambda \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ 时存在与 Λ 无关的非零 m_ν , 必须 $\gamma_{\theta\nu} > 0$ ^[9], 即 $\Lambda^{(\nu)} > 0$.

Cornwall 讨论了这个条件, 指出对 $SU(3)$ 群来说, 当 R 为伴随表示且 $\nu = 1$ 时, (18b) 可满足. 再结合 $b_0 > 0$ 的要求来考虑, 如果理论中含有两个以下这样的费米场, 则既可有动力学自发破缺又保持渐近自由. 对任意 $SU(N)$ 群来说, 若 R 是基本表示则无论 ν 等于多少 (18b) 都不满足, 因此通常的实际模型是不满足 (18b) 的.

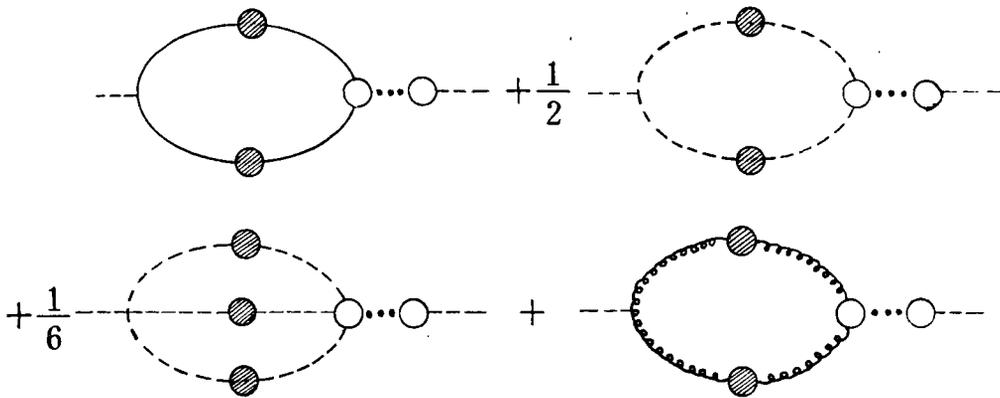


图 2 实线表示费米场, 虚线表示色规范场, 螺旋线表示鬼场, 点线表示复合 Goldstone 玻色子

若再考虑 $\Pi_{i\nu}$ 所满足的 Dyson 方程 (图 2), 做一定的分析可知 $\Pi_{i\nu}(0)$ 有限的条件是*:

* 资料 [6] 曾就所有规范场质量相等的特殊情况从 Bethe-Salpeter 方程的规一化条件得出 (19) 的要求. 我们利用 Ward-Takahashi 恒等式对图 2 进行过分析, 证明 (19) 是在规范场质量不相同的普遍情况下的要求. 不过由于这个条件没有什么实质性的影响, 所以这里没有必要写出分析的过程.

$$\delta_\nu > \frac{1}{2}, \quad (19)$$

不过对具体模型来说, (19) 往往并不比 (18) 给出更多内容. 比如上述 R 为伴随表示 $\nu = 1$ 的 $SU(3)$ 模型, 既满足 (18) 又满足 (19).

三、电磁作用的影响

从物理实质来看, 与超导理论类比, 动力学自发破缺解存在与否, 取决于正、反费米场 (或色规范场) 之间是否存在一个吸引力使之形成零质量的对 (复合 Goldstone 玻色子)^[11,12]. (18b) 实际上就是色规范场能使正、反层子互相吸引形成零质量对的条件. (17) 表明解的存在条件主要由紫外渐近行为决定. 对渐近自由的理论来说, 在紫外区域有效耦合常数 \bar{g} 是很小的, 所以当 (18b) 满足时, 是个很弱的力使形成复合 Goldstone 玻色子 (注意这是个非微扰效应, 力虽弱但 m_ν, M_i 并不小^[10-12]). 当 (18b) 不满足时, 也只是个很弱的力破坏复合 Goldstone 玻色子的形成. 由于层子是带电荷的, 所以正、反层子之间还有电磁作用贡献的吸引力. 如果像通常考虑的, 电磁作用不是渐近自由的 (弱-电统一的影响将在第五节中讨论), 则在紫外区域电磁吸引力可以超过色规范场贡献的力, 使得在 (18b) 不满足的情况下正、反层子也可以形成复合 Goldstone 玻色子, 造成动力学自发破缺. 所以虽然在考虑大多数强作用问题时电磁作用的贡献都可以忽略, 但在这类非微扰问题中情况完全不同. 就形成 A 类模型的动力学自发破缺而言, 层子间的电磁作用是不能忽略的. 可以做个具体比较, 例如在通常深度非弹问题中, 电磁作用会造成对近似 Bjorken 标度性的偏离, 不过由于电磁作用弱, 这要在很高能量时才会显示出来^[1], 在目前能量下它是可以忽略的. 但对方程 (17) 来说, 决定解存在与否的正是 $k \rightarrow \infty$ 时的性质, 这时电磁作用的贡献就不能忽略.

下面我们讨论在计及电磁作用贡献时的动力学自发破缺解. 计及电磁作用时, 拉氏函数变成:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^i G_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \bar{\psi} \gamma_\mu (\partial_\mu + ig t_i B_\mu^i + ie Q A_\mu) \psi \\ & - m \bar{\psi} \psi + \text{抵消项}, \end{aligned} \quad (20)$$

其中 A_μ 是电磁场, Q 是层子的电荷算符

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

这时重整化群方程(2)变为:

$$\begin{aligned} \left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_c(g, e) \frac{\partial}{\partial g} + \beta_e(g, e) \frac{\partial}{\partial e} - \gamma_\theta(g, e) m \frac{\partial}{\partial m} \right. \\ \left. - \gamma_{\theta\nu}(g, e) m_\nu \frac{\partial}{\partial m_\nu} - \gamma_\Gamma(g, e) \right\} \Gamma^{(n)} = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

这里

$$\beta_c(g, e) \equiv \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g, \quad \beta_e(g, e) \equiv \mu \frac{\partial}{\partial \mu} e. \quad (22)$$

现在我们仍可引入 $\bar{g}(\kappa)$ 、 $\bar{e}(\kappa)$ 、 $\bar{m}(\kappa)$ 、 $\bar{m}_v(\kappa)$ ，满足

$$\begin{aligned} \kappa \frac{d}{d\kappa} \bar{g} &= \beta_c(\bar{g}, \bar{e}), \quad \bar{g}(1) = g, \\ \kappa \frac{d}{d\kappa} \bar{e} &= \beta_e(\bar{g}, \bar{e}), \quad \bar{e}(1) = e, \\ \kappa \frac{d}{d\kappa} \bar{m} &= -[1 + \gamma_\theta(\bar{g}, \bar{e})]\bar{m}, \quad \bar{m}(1) = m, \\ \kappa \frac{d}{d\kappa} \bar{m}_v &= -[1 + \gamma_{\theta v}(\bar{g}, \bar{e})]\bar{m}_v, \quad \bar{m}_v(1) = m_v \end{aligned} \tag{23}$$

求得(21)中各系数后,求解(23)得出 \bar{g} 、 \bar{e} 、 \bar{m} 、 \bar{m}_v ，代入(11)即得所要的解的渐近行为。下面讨论(21)中各系数。

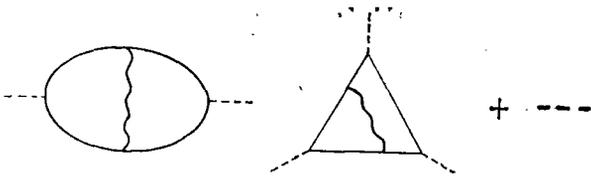


图3 实线表示费米场,虚线表示色规范场,波浪线表示电磁场

β_c 由 B 场真空极化图和 $B-B-B$ 顶角图决定。由于 A 场只与费米场作用,所以考虑到 e 的最低级贡献时只增加图3类型的图。它对 β_c 的贡献是 $O(e^2g^3)$, 与通常一样是可以略去的。故

$$\beta_c(g, e) \simeq -\frac{1}{2} b_0 g^3. \tag{24}$$

对 β_c 和普通电动力学的考虑一样,若用微扰计算可得

$$\beta_c(g, e) \simeq \frac{1}{8\pi^2} \sum_{\text{费米子}} \frac{4}{3} Q^2 e^3. \tag{25}$$

色规范场的修正也是 $O(g^2e^3)$, 可略。由(25)得 $\frac{d\beta_c}{de} > 0$, 即 $e = 0$ 不是紫外稳定固定点,因此在讨论紫外渐近行为时(25)无效。如果我们对电磁作用做弱耦合近似*, 即在 Dyson 方程中只计及 e 的最低次贡献,不计光子真空极化图,则不出现 e 的重整化,这时

$$\beta_c(g, e) = 0, \quad \bar{e} = e. \tag{26}$$

再讨论 $\gamma_\theta(g, e)$ 和 $\gamma_{\theta v}(g, e)$ 。这时需要考虑图4的微扰论计算,结果是:

$$\gamma_\theta(g, e) = \frac{3}{8\pi^2} [C_2(R)g^2 + Q^2e^2], \tag{27a}$$

$$\gamma_{\theta v}(g, e) = \frac{3}{8\pi^2} [A^{(v)}g^2 + Q^2e^2]. \tag{27b}$$



图4

由于实际需要的是 $\kappa \rightarrow \infty$ 时的 $\gamma_\theta(\bar{g}, e)$ 和 $\gamma_{\theta v}(\bar{g}, e)$, 所以对渐近自由理论来说,无论 $A^{(v)}$ 是正还是负,总有 $\gamma_{\theta v}(\bar{g}, e) > 0$ 。因此保证在取 $m_{v0}(\Lambda \rightarrow \infty) \rightarrow 0$

* 对线性化近似的 Dyson 方程来说这就是梯形近似。

的情况下存在与 Λ 无关的非零 $m_\nu^{[9]}$ 。

求得这些系数后,代入(23)立刻解出在 $\kappa \rightarrow \infty$ 时

$$\begin{aligned}\bar{g}^2(\kappa) &\sim \frac{1}{b_0 \ln \kappa}, \\ \bar{m}(\kappa) &\sim \kappa^{-1-2\epsilon} (\ln \kappa)^{-\delta}, \\ \bar{m}_\nu(\kappa) &\sim \kappa^{-1-2\epsilon} (\ln \kappa)^{-\delta_\nu}, \\ \epsilon &\equiv \frac{3}{16\pi^2} Q^2 e^2.\end{aligned}\quad (28)$$

将(28)代入(11)得到:

$$\begin{aligned}\Sigma_\nu(p) &\underset{p \rightarrow \infty}{\sim} T^{(\nu)} m_\nu(p^2)^{-\epsilon} (\ln p^2)^{-\delta_\nu}, \\ \Pi_{i\nu}(p) &\underset{p \rightarrow \infty}{\sim} M_i^2(p^2)^{-2\epsilon} (\ln p^2)^{-2\epsilon/b_0 - 2\delta_\nu}\end{aligned}\quad (29)$$

现在与(17b)相应的方程是:

$$\Sigma_\nu(p) = \text{const } \Lambda^{(\nu)} \int_{p^2}^{\infty} \frac{dk^2}{k^2} \bar{g}^2(k) \Sigma_\nu(k) + \text{const}' Q^2 e^2 \int_{p^2}^{\infty} \frac{dk^2}{k^2} \Sigma_\nu(k) + \text{非领头项}.\quad (30)$$

由此可验证(30)的解确是(29)的形式。现在解的存在条件变成了

$$\epsilon > 0.\quad (31)$$

类似地分析图2中各积分亦容易看出只要有(31)则一切积分都收敛,不再有(19)的限制。由 ϵ 的定义[公式(28)]看出(31)总是满足的,因此对实际模型来说,如果 \bar{g} 渐近自由,我们就在对 e 做弱耦合近似的情况下得到动力学自发破缺解确实存在的结论。

对 e 的处理超出弱耦合近似时, $\kappa \rightarrow \infty$ 的 β_e 是不易计算的。我们讨论以下两种可能的情况:

如果有 QCD 后量子电动力学仍能有 Johnson-Baker-Willey 的自洽处理^[7], 则在这种理论中也有 $\beta_e = 0$, $\bar{e} = e$, 但它的意义已超出弱耦合近似,而是自洽的结果。这时上面的一切结论都不变。当然有 QCD 后这种做法是否自洽还需仔细讨论。

另一种可能性是: 如果计及 e 的重整化效应后 β_e 有一个紫外稳定固定点 $e_\infty \neq 0$, e 在它的吸引区域, 则 $\bar{e}(\kappa) \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} e_\infty$ 。按照资料[8]的讨论, 如果 e_∞ 是 β_e 的简单零点, 则

$$\beta_e(\bar{e}) = (\bar{e} - e_\infty)[(\bar{e} - e_\infty) \text{的幂级数}],\quad (32)$$

这里我们按照前面的分析略去了色规范场的修正。将(32)代入(23)求得:

$$\bar{e}(\kappa) = e_\infty + \kappa^{-\rho}[\kappa^{-\rho} \text{的幂级数}], \quad \rho \equiv |\beta'_e(e_\infty)|.\quad (33)$$

如果 e_∞ 较小则由(27)知现在

$$\gamma_\theta(\bar{g}, \bar{e}) = \frac{3}{8\pi^2} \{C_2(R)\bar{g}^2 + Q^2 e_\infty^2 + \kappa^{-\rho}[\kappa^{-\rho} \text{的幂级数}]\},\quad (34a)$$

$$\gamma_\theta(\bar{g}, \bar{e}) = \frac{3}{8\pi^2} \{\Lambda^{(\nu)}\bar{g}^2 + Q^2 e_\infty^2 + \kappa^{-\rho}[\kappa^{-\rho} \text{的幂级数}]\}.\quad (34b)$$

将此代入(23)求得:

$$\begin{aligned}\bar{m}(\kappa) &\underset{\kappa \rightarrow \infty}{\sim} \kappa^{-1-2\epsilon_\infty} (\ln \kappa)^{-\delta}, \\ \bar{m}_\nu(\kappa) &\underset{\kappa \rightarrow \infty}{\sim} \kappa^{-1-2\epsilon_\infty} (\ln \kappa)^{-\delta_\nu},\end{aligned}\quad (35)$$

$$\epsilon_{\infty} \equiv \frac{3}{16\pi^2} Q^2 e_{\infty}^2.$$

这与(28)形式相同,只不过 e 换成了 e_{∞} . 所以这种情况下 Σ_{ν} 、 $\Pi_{i\nu}$ 的渐近行为仍为(29)的形式,只是其中 e 换成 e_{∞} . 现在 e_{∞} 永远是正的,所以这时动力学自发破缺解存在. 如果 e_{∞} 较大则 ϵ_{∞} 、 δ 、 δ_{ν} 等的具体公式要改变,但解(35)的形式不变. 虽然在 e_{∞} 大时不易求出 e_{∞} 的具体公式,但我们知道 e_{∞} 实际反映 Dyson 方程中电磁作用的贡献. 电磁作用总是贡献正、反层子之间的吸引力的,是有益于复合 Goldstone 玻色子的形成的,这表现为 $\epsilon_{\infty} > 0$. e_{∞} 大时这性质仍是一样的. 但是如果 e_{∞} 大则可能对 b_0 有不可忽略的修正,对渐近自由条件有影响. 不过只要 e_{∞} 不大到破坏实际 QCD 模型的渐近自由性质,上面的结论就仍成立.

四、基态稳定性

以上我们说明了在计及层子间的电磁相互作用后, QCD 中的 Dyson 方程是有自洽的动力学自发破缺解的. 不过这还不等于证明了动力学自发破缺一定出现,因为还没有说明有自发破缺的基态是不是能量最低的稳定态. 现在我们来讨论这个问题.

为了简单,我们仅以一个不实际的 SU(2) 模型为例来做一讨论. 在此模型中,只考虑一个属于 SU(2) 基本表示的费米场,并设破缺情况为 $\nu = 1$, $T^{(\nu)} = t_3$. 这样,色规范场 B_{μ}^3 不获得质量, B_{μ}^{\pm} 获得相同的质量 M . 我们采用 Rayleigh-Ritz 近似^[10]来计算两种有效势之差 $\Omega \equiv V_{\text{破缺}} - V_{\text{对称}}$. 计算中以(29)为试探解,计及一圈图及图5中的两圈图的贡献. 在计算中要用到由重整化群方法求得的对称物理传播子的渐近形式,其中包含了一些不能确定的比例常数,不过我们还是可以做出定性的判断.

在只保留 e 的最低级和次低级近似及只保留到 $\left(\frac{m_{\nu}}{m}\right)^6$ 的情况下, Ω 的形式是*:

$$\Omega = am_{\nu}^4 + b \frac{m_{\nu}^6}{m^2} + cM^4 - dm_{\nu}^2 M^2. \quad (36)$$

由图2我们可以求得一个 M^2 与 m_{ν}^2 的关系

$$M^2 = hm_{\nu}^2, \quad (37)$$

代入(36)得

$$\Omega = (a + ch^2 - dh)m_{\nu}^4 + b \frac{m_{\nu}^6}{m^2}. \quad (38)$$

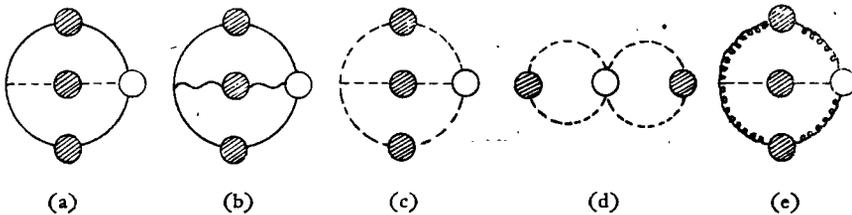


图 5

* 和资料 [10] 一样,我们假定 m_{ν} 、 M 和 m 大小相差不多.

现在外源为零的条件变为:

$$\frac{dQ}{dm_v} = 0. \quad (39)$$

将(38)代入(39)求得:

$$\left(\frac{m_v}{m}\right)^2 = \frac{2(dh - ch^2 - a)}{3b}. \quad (40)$$

将此解代入(38)即得到 Dyson 方程近似解所确定的 $Q_{\text{破缺}}$ 的值:

$$Q_{\text{破缺}} = -\frac{b}{2} \frac{m_v^6}{m^2}. \quad (41)$$

由(41)看出如果 $b > 0$ 则 $Q_{\text{破缺}} < 0$. 这个 b 是一圈图及图 5(a)、(b)中的一部分所贡献的. 利用 $\Sigma_v(p)$ 所满足的线性化近似 Dyson 方程, 并对一些积分做极点近似, 在只保留 e 的最低次项的情况下求得:

$$b = \frac{1}{120\pi^2} \left(1 + \frac{99}{64\pi^2} g^2\right) > 0 \quad (42)$$

所以得到:

$$Q_{\text{破缺}} < 0. \quad (43)$$

就是说, 有自发破缺的基态能量低于对称的基态能量. 再由(38)和(40)得:

$$\left[\frac{d^2Q}{dm_v^2}\right]_{\text{破缺}} = 22b \frac{m_v^4}{m^2} > 0. \quad (44)$$

故知有破缺的基态是能量最低的稳定态, 它是真正的物理真空态. 动力学自发破缺实际出现.

五、讨 论

从上面的计算我们看到, 在讨论强作用问题时, 电磁作用(和弱作用)的影响并不一定永远能够忽略. 对一些非微扰效应来说, 比如 A 类模型的动力学自发破缺问题, 电磁作用(和弱作用)的影响会是重要的, 因此在处理这类问题时是要慎重的.

我们已经指出, 在不考虑电磁作用和弱作用的统一时, 如果满足 $b_0 > 0$ 的渐近自由条件, 则在对电磁作用做弱耦合近似计算后, 拉氏函数(20)决定的真实物理解是有动力学自发破缺的解, 色规范场具有质量, 因此不存在颜色“禁闭”. 如果有 QCD 后量子电动力学仍可有 Johnson-Baker-Willey 的自洽处理, 或 β_e 有一紫外稳定固定点 $e_\infty \neq 0$ (β_e 的简单零点)且 e_∞ 不太大, 则上述结论在电磁作用的计算超出弱耦合近似时仍成立.

在考虑弱作用和电磁作用统一时, 可能有以下的情况:

第一, 弱-电作用不是渐近自由的, 比如 Weinberg-Salam 的 $SU(2) \times U(1)$ 模型^[13], 其中 $U(1)$ 的部分不是渐近自由的. 在紫外区域这个 $U(1)$ 的规范场(光子和中性中间玻色子的混合)就相当于上述的电磁场, 造成 QCD 的动力学自发破缺. 情况与上面讨论的类似.

第二, 如果弱-电作用是渐近自由的. 在 $\kappa \rightarrow \infty$ 时, 如果弱-电耦合常数比色规范群

的耦合常数 g 趋于零来得慢, 则和第一种情况类似, QCD 要有动力学自发破缺; 如果弱电耦合常数比 g 趋于零来得快, 则 QCD 不发生动力学自发破缺. 这时层子和色规范场可能“禁闭”于色单态强子之中.

从目前弱作用理论和实验比较的情况看, 第一种可能性较大.

我们在拉氏函数(20)中引入了费米子对称质量 m , 这是为了使 $Q_{\text{破缺}} \neq 0$. 因为如果不引入 m , 则理论中没有一个确定的质量尺度, 动力学自发破缺后所得到的 m_ν 必可取任意连续值(包括 $m_\nu = 0$), 这必然要导致 $Q_{\text{破缺}} \equiv 0$ 的结果^[11,14].

以上结论限于 A 类模型. 对于积分方程的核平方可积的 B 类模型^[5] 来说, 比如群 G 是手征 $SU(N) \times SU(N)$, 动力学自发破缺解不取决于紫外渐近行为, 上述结论都不再成立. 对这类模型目前还没有好的计算方法.

感谢戴元本和陈文焜同志的有益的讨论.

附 录

这里讨论一个不引入 $m_{\nu 0}(\Lambda)$, 直接用 Dyson 方程来确定重整化群方程系数 $\gamma_{\theta\nu}(g)$ 的办法.

考虑费米子二点固有顶角(13). 它所满足的重整化群方程(9)的形式是:

$$\left\{ \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + [1 + \gamma_\theta(g)] m \frac{\partial}{\partial m} + [1 + \gamma_{\theta\nu}(g)] m_\nu \frac{\partial}{\partial m_\nu} - 1 \right\} \Gamma_{\psi\bar{\psi}}^{(2)} = 0. \quad (\text{附 } 1)$$

在已经由微扰论求得 $\beta(g)$ 、 $\gamma_\theta(g)$ 后, 我们可以将由弱耦合近似 Dyson 方程所求得的 $p \rightarrow \infty$ 时的 $\Gamma_{\psi\bar{\psi}}^{(2)}$ 代入(附1)来确定 $\gamma_{\theta\nu}(g)$.

由于在 $p \rightarrow \infty$ 时 $\Sigma_i(p)$ 所满足的 Dyson 方程中积分主要取决于紫外部分, 而一切物理顶角、物理传播子在 $p \rightarrow \infty$ 的行为又都与它们在无自发破缺的对称理论中的行为相同^[15], 所以 $p \rightarrow \infty$ 时 $\Sigma_i(p)$ 的 Dyson 方程的核中不包含 m_ν 、 M_i , 也就是说在 $p \rightarrow \infty$ 时, $\Sigma_i(p)$ 与无破缺时的费米子自能一样, 满足

$$\left\{ \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + [1 + \gamma_\theta(g)] m \frac{\partial}{\partial m} \right\} [\hat{p} - i\Sigma_i(p)] = 0. \quad (\text{附 } 2)$$

在 $p \rightarrow \infty$ 时弱耦合近似下, $\Sigma_\nu(p)$ 满足的 Dyson 方程为

$$\Sigma_\nu(p) = \Lambda^{(v)} g^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma_\mu S_0(k) \Sigma_\nu(k) S_0(k) \gamma_\sigma D_{0\mu\sigma}(p-k), \quad (\text{附 } 3)$$

其中

$$S_0(k) \equiv -\frac{\hat{k}}{k^2}, \quad D_{0\mu\sigma}(k) \equiv \frac{-i \left(\delta_{\mu\sigma} - \frac{k_\mu k_\sigma}{k^2} \right)}{k^2}.$$

方程(附3)的解立刻可以求出为:

$$\Sigma_\nu(p) \underset{p \rightarrow \infty}{\sim} T^{(v)} m_\nu (p^2)^{-\omega}, \quad \omega \equiv \frac{3}{16\pi^2} \Lambda^{(v)} g^2. \quad (\text{附 } 4)$$

在 $p = \kappa p_0$ 时, 将(附4)代入(附1)并与(附2)相减得:

$$\left\{ \kappa \frac{\partial}{\partial \kappa} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + [1 + \gamma_{\theta\nu}(g)] m_\nu \frac{\partial}{\partial m_\nu} - 1 \right\} m_\nu (\kappa^2)^{-\omega} = 0. \quad (\text{附5})$$

在写出方程(附3)时, 没有进行 g 的重整化, 所以(附5)中的 $\beta(g)$ 为零. 于是由(附5)立刻求得:

$$\gamma_{\theta\nu}(g) = 2\omega = \frac{3}{8\pi^2} \Lambda^{(\nu)} g^2. \quad (\text{附6})$$

这正是文中公式(7b)的结果.

由(附3)和(附4)看出, (附3)具有(附4)的解的条件是 $\omega > 0$, 即 $\Lambda^{(\nu)} > 0$. 这正是文中的条件(18b).

在计及电磁作用的贡献后, 用完全相同的办法亦立刻可求出文中公式(27b)的结果.

参 考 资 料

- [1] D. J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev.*, **D8**(1973), 3633.
- [2] N. P. Chang, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 2706; E. Ma, *Phys. Rev.*, **D11**(1975), 322.
- [3] J. Lemmon and K. T. Mahanthapa, *Phys. Rev.*, **D13**(1976), 2907.
- [4] J. M. Cornwall, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 500.
- [5] F. Englert, J. M. Frère and P. Nicoletopoulos, *Phys. Lett.*, **59B**(1975), 346.
- [6] S.-H. H. Tye, E. Tomboulis and E. C. Poggio, *Phys. Rev.*, **D11**(1975), 2839.
- [7] K. Johnson, M. Baker and R. Willey, *Phys. Rev.*, **136**(1964), B111; K. Johnson, R. Willey and M. Baker, *Phys. Rev.*, **163**(1967), 1699; M. Baker and K. Johnson, *Phys. Rev.*, **183**(1969), 1292; *Phys. Rev.*, **D3**(1971), 2516, 2541; S. L. Adler and W. A. Bardeen, *Phys. Rev.*, **D4**(1971), 3045.
- [8] S. Weinberg, *Phys. Rev.*, **D8**(1973), 3497; J. C. Collins and A. J. Macfarlaire, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 1021.
- [9] K. Lane, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 2605.
- [10] J. M. Cornwall, R. Jakiw and E. Tomboulis, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 2428.
- [11] J. M. Cornwall and R. E. Norton, *Phys. Rev.*, **D8**(1973), 3338.
- [12] R. Jakiw and K. Johnson, *Phys. Rev.*, **D8**(1973), 2386; E. J. Eichten and F. L. Feinberg, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 3254.
- [13] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, **19**(1967), 1264.
- [14] 邝宇平, 易余萍, 兰州大学学报(自然科学版), 1977, **2**, 25.
- [15] B. W. Lee and W. I. Weisberger, *Phys. Rev.*, **D10**(1974), 2530.

DYNAMICAL SYMMETRY BREAKINGS IN QUANTUM CHROMODYNAMICS

KUANG YU-PING YI YU-PING

(Lanchow University)

ABSTRACT

Dynamical symmetry breakings in quantum chromodynamics (QCD) are investigated by means of the renormalization-group equations and the Dyson equations. It is shown that: (1) The electromagnetic (and weak) interactions can not be neglected in studying those nonperturbative problems as dynamical symmetry breakings for type-A models in QCD. (2) When the electromagnetic interactions between stratonons are taken into account in the weak coupling approximation, dynamical symmetry breakings in QCD occur for many realistic models (type-A models) with QCD asymptotically free. This conclusion may hold beyond the weak coupling approximation of the electromagnetic interactions if there can still be a self-consistent solution of Johnson-Baker-Willey in quantum electrodynamics or β_e has an UV-stable fixed point. $e_\infty \neq 0$ (a simple zero of β_e) and e_∞ is not too large.