

# 介子束缚态方程及其解的进一步探讨

高 崑  
(四川 大学)

## 摘 要

在资料[1]讨论过的一种可能的介子束缚态方程的基础上,着重在位阱形状参量 $\nu$ 值较大( $\nu = 10^2 \sim 10^3$ )的情形下,对方程的解作了进一步的探讨。结果指出,特征值 $\lambda$ 和有关物理量对位阱参量 $\nu$ 、 $E$ 的依赖关系大致仍有资料[1]所述的规律性,但介子束缚态平均半径 $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$ 的数值当 $\nu$ 较大时,并不随 $\nu$ 的继续增大而不断增加。对应于每一个参量 $\nu$ 值,存在一个最大的介子平均半径 $\sqrt{\langle R^2 \rangle}_{\max}$ ,当 $\nu > 10^2$ 时,所有的 $\sqrt{\langle R^2 \rangle}_{\max}$ 约为 $12.6 M^{-1}$ ( $M$ 为层子质量),尚小于 $\pi$ 介子的物理半径。若考虑到层子与反层子之间的超强相互作用除这种吸引势外还存在另一排斥势,并引入和资料[1]中位势 $V_s(r)$ 相应的差型 $V_v(r)$ 势进行计算,可使介子束缚态半径与实验值接近的程度有较大改进。

## 一、引 言

层子模型中的一个重要的问题是,如何给出强子的结构波函数。在讨论介子结构时,我们遇到的是一个相对论性的两体束缚态问题。现在场论能用来处理两体束缚态问题的工具只有 Bethe-Salpeter 方程(以下简称 B-S 方程)。对构成介子的层子与反层子之间超强相互作用的性质目前还了解得很少,但从有关强子结构的实验资料表明,这种超强相互作用的等效势应当具有平底深位阱的特征。因此,应用 B-S 方程来研究介子结构时,可以通过唯象的方法进行讨论,即先讨论什么样的积分核相应于这种类型的位势,并检验用具有这种积分核的 B-S 方程能否解出接近介子物理半径的束缚态。

基于上述指导思想,资料[1]曾讨论过一种可能的介子束缚态方程,即对于动量空间的介子波函数 $x_q(p)$ ( $q$ 为介子四维动量, $p$ 为层子与反层子的相对动量),可以写出如下的 B-S 方程:

$$[i(\not{p} + \not{q}/2) + M]x_q(p)[i(\not{p} - \not{q}/2) + M] = i\int d^4k U_v(q; p-k)x_q(k), \quad (1.1)$$

式中 $M$ 为层子质量。所采用的积分核为:

$$U_v(k) = -\frac{G_v^2}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 + N^2)^{\nu}}, \quad (1.2)$$

与之相应的平均位势 $V_v(\mathbf{r})$ 为:

$$V_\nu(\mathbf{r}) = \int dt \int d^4k e^{ikx} U_\nu(k) = -\frac{G_\nu^2}{4\pi} \sum_m a_m^\nu r^m e^{-Nr},$$

$$a_m^\nu = \frac{1}{(\nu-1)!} \left(\frac{1}{2N}\right)^{2\nu-m-3} \frac{(2\nu-m-4)!}{(\nu-m-2)!m!}, \quad (0 \leq m \leq \nu-2) \quad (1.3)$$

式中  $N$  为表征超强作用力程的参量,  $\nu$  为表征位阱形状的参量.  $V_\nu(\mathbf{r})$  在原点无奇异性, 在位阱内变化缓慢, 而在远处按指数急剧变化.

为了保持介子内部运动的非相对论性特征(即相对动量项可以忽略), 对超强相互作用采用了标量型耦合, 任何其他类型的相互作用都不能单独作为超强相互作用而不导致与此图象相矛盾的结果<sup>[2]</sup>.

采用积分核(1.1)和标量相互作用后, 对  $0^-$  介子束缚态方程作 Wick 转动<sup>[3]</sup>及四维球谐函数的分波展开, 最后得到如下的分波积分方程<sup>[1]</sup>:

$$f_n^{(\nu)}(P, Q) = \frac{G_\nu^2}{8\pi^2} \frac{1}{P(P^2 + \mathcal{M}^2)} \frac{1}{(n+1)(\nu-1)!} \left(\frac{\partial}{\partial N^2}\right)^{\nu-1} \int_0^\infty K^2 dK$$

$$\cdot (Z - \sqrt{Z^2 - 1})^{n+1} f_n^{(\nu)}(K, Q)$$

$$\mathcal{M} = M - m/2, \quad Z = (K^2 + P^2 + N^2)/2KP, \quad (1.4)$$

式中  $f_n^{(\nu)}(P, Q)$  为  $0^-$  介子波函数按盖根堡函数  $c_n^+(\cos\theta)$  展开的分波振幅,  $P, Q, K$  分别为动量  $p, q, k$  在四维欧氏空间中的模,  $m$  为介子质量.

为了便于进行数值求解, 将方程中的各变量进行无量纲化, 即所有的动量与质量均以层子质量  $M$  为单位. 引入力程参量  $E$ 、束缚态能参量  $B$  及特征值  $\lambda^{(\nu)}$  后<sup>[1]</sup>, 将方程的积分核进行对称化, 利用高斯求积法将积分化为求和, 最后得到在计算机上进行数值求解的对称化联立线性方程组<sup>[1]</sup>.

利用一系列有关公式, 资料[1]曾对  $0^-$  介子束缚态的 B-S 方程进行数值求解, 所选用的参量值范围为  $\nu \leq 20$  ( $10^{-2} \leq E \leq 1, 0 \leq B \leq 1$ ). 在这样的参量值范围内, 解出的介子基态平均半径  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  最大约为  $12M^{-1}$  ( $M^{-1}$  为层子的康普顿波长), 虽小于实验值, 但  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  有随  $\nu$  的增加而加大的趋势. 本文先在资料[1]的基础上, 采用  $V_\nu(r)$  位势进一步求解  $0^-$  介子束缚态的 B-S 方程, 着重讨论参量  $\nu$  值较大 ( $\nu = 10^2 \sim 10^3$ ) 的情形下方程解的一些特性和介子束缚态半径  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  随  $\nu$  变化的规律, 然后讨论如何改进位阱, 以进一步求得与实验值相近的介子束缚态半径.

## 二、 $V_\nu(r)$ 势的计算结果和讨论

在  $0^-$  介子束缚态方程中有三个参量: 位阱形状参量  $\nu$ 、力程参量  $E$  和束缚态能参量  $B$ . 资料[1]已讨论过, 特征值  $\lambda$ 、平均半径  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  等量随  $B$  的变化比较缓慢, 本文将着重就  $B \cong 0$  (相应于紧束缚态) 的情形进行求解和讨论, 其中质量以层子质量  $M$  为单位, 长度则以层子的康普顿波长为单位.

### 1. $B = 0$ 、 $E$ 固定、 $\nu$ 值改变的情形

计算结果如图 1, 由图 1 可以看出, 当  $\nu$  较大时,  $\lg \lambda$  与  $\nu$  之间仍近似有下列的线性关系:

$$\lg \lambda = \beta_1 - \beta_2 \nu, \quad (2.1)$$

式中  $\beta_1$  与  $\beta_2$  都是  $E$  的函数, 并随  $E$  的增加而减小.

至于位阱深度  $-V_s(0)$  与位阱面积  $S_s$ , 对于一定的  $E$ , 都随  $\nu$  值的增加而变大, 但对于不同的  $E$  值,  $-V_s(0)$  有最大极限值  $165 M$ .

基态的平均半径  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  对  $\nu$  的变化关系则如图 2 所示, 对于一定的  $E$ ,  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  随  $\nu$  的增加而逐步增大. 当  $\nu$  较小时  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  随  $\nu$  增长得较快, 当  $\nu$  较大时,  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  随  $\nu$  增长得较慢.

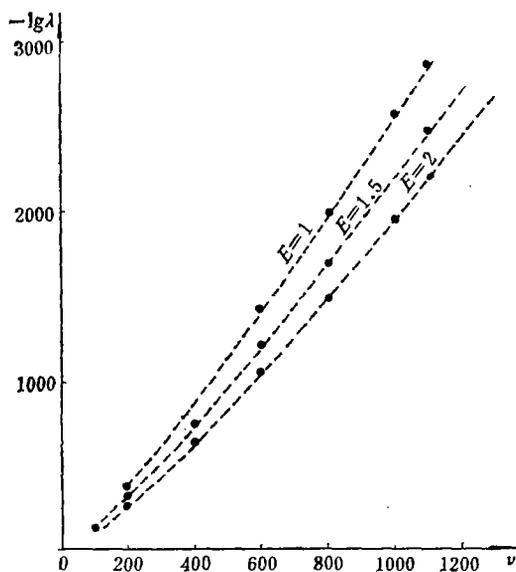


图 1  $B=0$ 、 $E$  固定时  $\lambda$  随  $\nu$  的变化关系

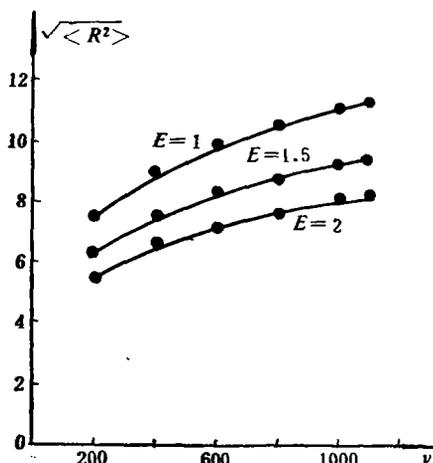


图 2  $B=0$ 、 $E$  固定时  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  与  $\nu$  的变化关系

位形空间波函数  $R\psi(R)$  对  $\nu$  的变化关系则如图 3 所示. 从图 3 可以看出: 对于一定的  $E$ ,  $R\psi(R)$  的峰随  $\nu$  的增加向  $R$  增大的方向移动, 位阱  $V_s(R)$  也随  $\nu$  的增加而加深又加宽. 但  $R\psi(R)$  的峰随  $\nu$  的增加而向  $R$  增加方向移动的速度, 不如阱宽随  $\nu$  的增大而增长的速度快. 当  $\nu$  较大时,  $R\psi(R)$  主要集中在位阱底部. 对于一定的  $E$ , 当  $\nu$  增大到一定值, 位形空间波函数将成为振荡的.

## 2. $B=0$ 、 $\nu$ 固定、 $E$ 值改变的情形

此时, 特征值  $\lambda$  与力程参量  $E$  之间仍有下列的关系:

$$\lg \lambda = K \lg E + b, \quad (2.2)$$

式中  $K$  与  $b$  均为  $E$  的函数.

位阱深度  $-V_s(0)$  和  $E$  的关系则如图 4 所示. 从图 4 可以看出: 当  $\nu$  固定时, 阱深  $-V_s(0)$  随  $E$  的减小而逐渐增加, 但  $E$  小于某值后, 再减小  $E$  阱深不再增加, 这个最大阱深对不同的  $\nu$  均约为  $165 M$ . 对某一  $\nu$  值, 使阱深达到最大值的最大  $E$  值表为  $E_c^{(\nu)}$ . 当  $\nu$  从 200 增至 1000 时,  $E_c^{(\nu)}$  从 0.32 增至 0.72. 当  $\nu$  固定时, 位阱面积  $S_s$  将随  $E$  的减小而迅速增大.

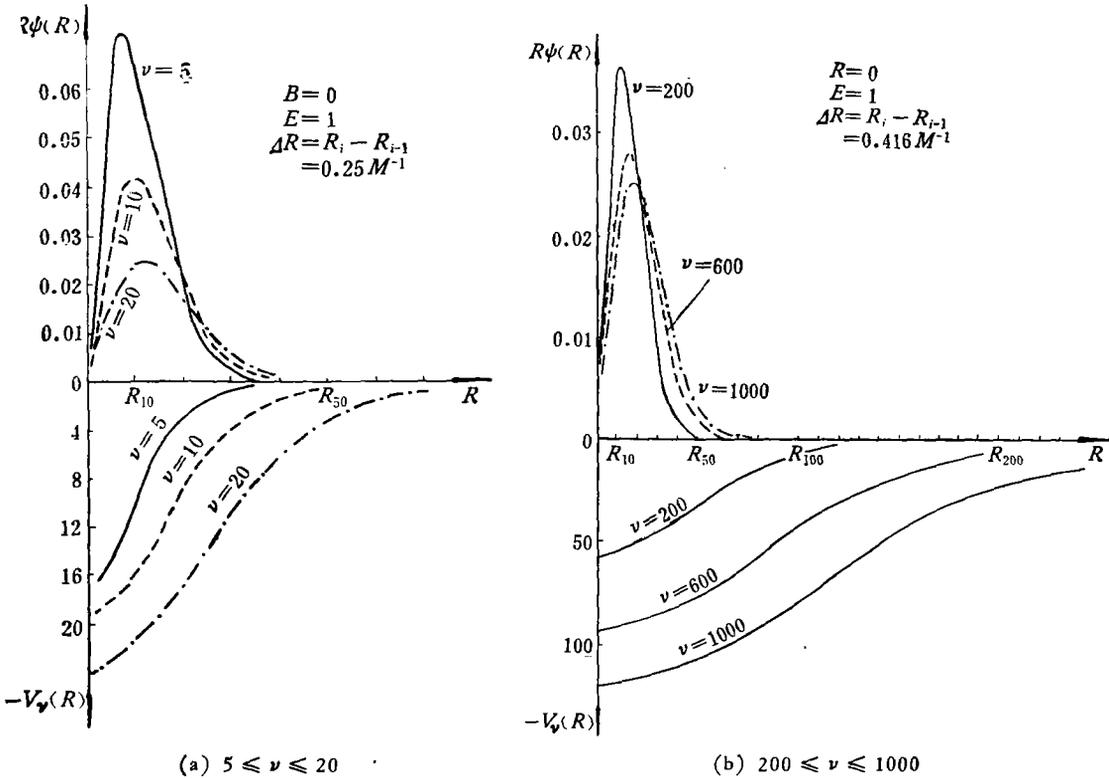


图3  $B=0, E$  固定、 $\nu$  改变时  $R\psi(R)$  与  $-V_\nu(R)$  随  $R$  的变化关系

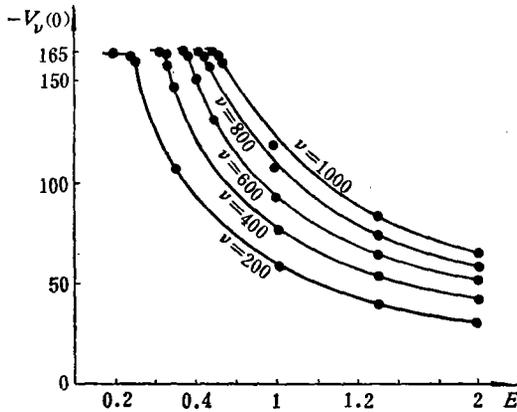


图4  $B=0, \nu$  固定时  $-V_\nu(0)$  随  $E$  的变化关系

平均半径  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  和  $E$  的变化关系如图 5 所示, 从图 5 可以看出: 平均半径  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  随  $E$  的减小而逐渐增大.  $\nu$  值越小, 这种变化更显著.

从上述数值求解的结果, 可以得出下面的一些结论:

- (1) 在位阱形状参量  $\nu$  值较大 ( $1100 \geq \nu \gg 20$ ) 的情形下, 特征值  $\lambda$  对  $\nu, E$  的依赖关系、位形空间波函数  $R\psi(R)$  和基态平均半径  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  对  $\nu, E$  的变化趋势, 和资料 [1]

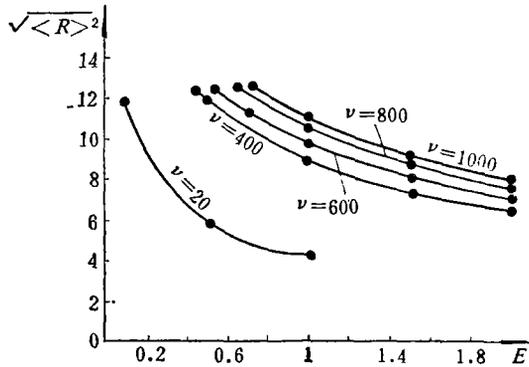


图 5  $B = 0$ 、 $\nu$  固定时  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  随  $E$  的变化关系

对  $\nu$  值较小 ( $\nu \leq 20$ ) 情形下得到的结果大体是一致的。

(2) 对  $\nu$  值较大的情形 ( $50 \leq \nu \leq 1100$ ), 在所选取的参量  $B$ 、 $E$  值范围内 ( $B \cong 0$ ,  $0.1 \leq E \leq 2$ ), 求出的阱深一般从几十到  $165 M$ , 说明这种相互作用仍是一种超强相互作用。

在位阱的极限深度下, 平均阱宽  $a_\nu \geq 77 M^{-1}$  (约等于  $\pi$  介子的康普顿波长), 相应的位形空间波函数是振荡的, 可能对应于激发态。当阱深  $-V_\nu(0) < 165 M$  时, 平均阱宽  $a_\nu < 77 M^{-1}$ , 相应的位形空间波函数  $R\psi(R)$  只有一个峰, 对应于基态。此时伴随阱深的增加, 平均阱宽也将增加, 对一定的  $\nu$ , 相应的临界  $E$  值  $E_c^{(\nu)}$  可由资料[1]表出:

$$E_c^{(\nu)} \cong \sqrt{\pi(\nu - 2)} / 77, \tag{2.3}$$

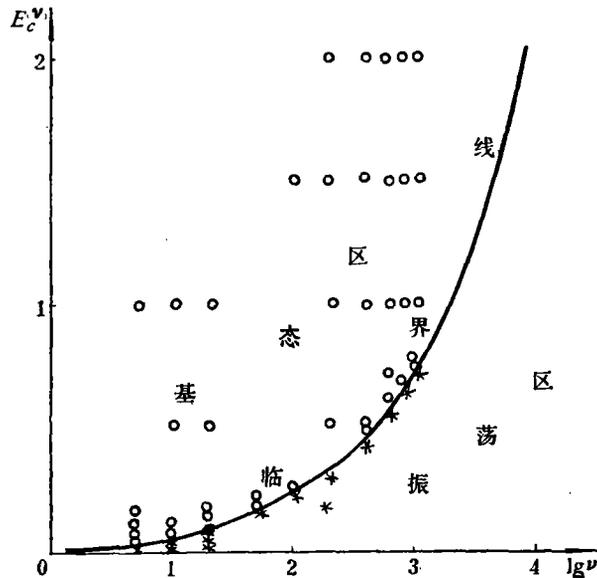


图 6 临界条件下  $E$  随  $\nu$  的变化关系  
 (“○”表基态点, “\*”表振荡点)

满足(2.3)的  $(\nu, E_c^{(\nu)})$  在图6中构成的曲线称为临界线。在临界线以上有  $E > E_c^{(\nu)}$ ,  $a_\nu < 77M^{-1}$ , 所对应的  $R\psi(R)$  为基态波函数; 在临界线下则有  $E < E_c^{(\nu)}$ ,  $a_\nu > 77M^{-1}$ , 所对应的  $R\psi(R)$  是振荡的。

(3) 介子基态波函数的平均半径  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  和位阱的性质密切相关。图7绘出平均半径  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  随阱宽  $a_\nu$  的变化关系, 从图7可以看出: 平均半径  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  随阱宽  $a_\nu$  的增加而加大。但阱宽不能任意增大, 对基态阱宽将不超过  $77M^{-1}$ , 图7指出阱宽  $a_\nu = 77M^{-1}$  时, 平均半径  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  约为  $12.6M^{-1}$ 。

平均半径  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  和位阱的关系, 也可从  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  随阱深  $-V_\nu(0)$  的变化关系(见图8)看出, 图8表示平均半径  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  随阱深  $-V_\nu(0)$  的增加而加大, 但阱深不能任意增加, 而以  $165M$  为其极限值。图8指出当  $-V_\nu(0) = 165M$  时,  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  也约为  $12.6M^{-1}$ 。

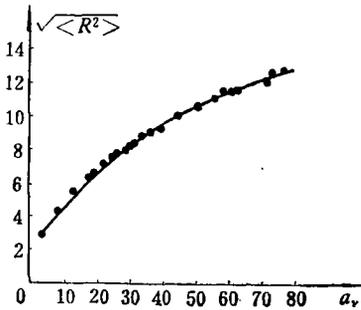


图7  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  随  $a_\nu$  的变化关系

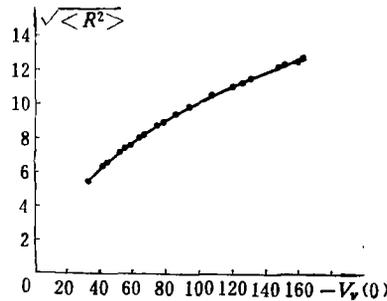


图8  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  随  $-V_\nu(0)$  的变化关系

由于当  $\nu$  固定时, 平均半径  $\sqrt{\langle R^2 \rangle}$  随力程参量  $E$  的增加而减小。因此, 对一定的  $\nu$ , 当  $E = E_c^{(\nu)}$  时的平均半径将为这一  $\nu$  值下的基态最大平均半径  $\sqrt{\langle R^2_{\max}(\nu) \rangle}$ , 或表为  $\sqrt{\langle R^2 \rangle_{\max}}$ 。图9给出  $\sqrt{\langle R^2 \rangle_{\max}}$  随  $\nu$  变化的曲线, 从图9可以看出: 当  $\nu$  较小时,  $\sqrt{\langle R^2 \rangle_{\max}}$  随  $\nu$  的增大而增加得较快; 但  $\nu$  较大 ( $10^2 < \nu < 10^3$ ) 时,  $\sqrt{\langle R^2 \rangle_{\max}}$  随  $\nu$  的增加而增长得较慢, 并约以  $12.6M^{-1}$  为极限, 这就是基态下求得的最大平均半径。

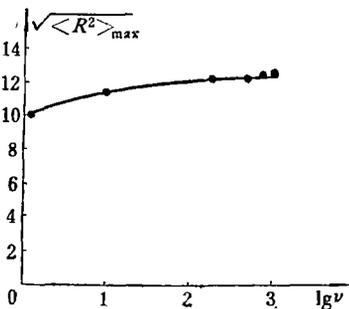


图9  $\sqrt{\langle R^2 \rangle_{\max}}$  随  $\nu$  的变化关系

从上面的讨论看出: 选用积分核

$$U_\nu(k) = -G_\nu^2 / (2\pi)^4 (k^2 + N^2)^\nu$$

和与其相应的位势  $V_\nu(r)$  后, 与汤川型位势相比, 可以得到平均半径较大一些的介子束缚态波函数, 但还不能达到  $\pi$  介子的物理半径(约为  $42M^{-1}$ )。这是由于这一积分核对应于超强作用吸引势, 没有充分反映出层子与反层子之间的排斥作用。为了克服上述困难, 下面将在考虑层子与反层子之间除吸引势外还存在另一排斥势的基础上, 引入差型  $V_\nu(r)$  势, 并应用差型  $V_\nu(r)$  势求出与实验值相近的介子束缚态半径。

另一排斥势的基础上, 引入差型  $V_\nu(r)$  势, 并应用差型  $V_\nu(r)$  势求出与实验值相近的介子束缚态半径。

### 三、差型 $V_\nu(r)$ 势

上面已讨论过, 介子基态波函数平均半径的增长在两方面受到限制. 第一是介子基态的平均半径随阱宽的增加而增大, 但阱宽不能任意增加. 对于一定的  $\nu$ , 阱宽  $a(\nu, E)$  [即  $a_\nu$ ] 存在一个和  $E_c^{(\nu)}$  对应的临界值  $a(\nu, E_c^{(\nu)})$ . 当  $E < E_c^{(\nu)}$ , 此时  $a(\nu, E) > a(\nu, E_c^{(\nu)})$ , 将得不到基态解. 今由下式定义函数  $K(\nu, E)$ :

$$\langle R^2(\nu, E) \rangle = K(\nu, E) \cdot a(\nu, E), \quad (3.1)$$

因此, 在  $\nu$  为一定的条件下, 介子基态的最大均方半径为:

$$\langle R^2(\nu, E_c^{(\nu)}) \rangle = K(\nu, E_c^{(\nu)}) \cdot a(\nu, E_c^{(\nu)}). \quad (3.1')$$

计算表明, 临界阱宽  $a(\nu, E_c^{(\nu)})$  随  $\nu$  的变化很小, 当  $\nu > 20$ , 近似有  $a(\nu, E_c^{(\nu)}) \approx 77M^{-1}$ . 引入符号  $K_c(\nu) \equiv K(\nu, E_c^{(\nu)})$ ,  $R_c(\nu) \equiv R(\nu, E_c^{(\nu)})$  后, 有

$$\langle R_c^2(\nu) \rangle \cong 77K_c(\nu). \quad (3.1'')$$

基态平均半径的增长受到的第二个限制, 就是  $K_c(\nu)$  在  $\nu < 20$  时随  $\nu$  的变化虽较明显, 但当  $\nu > 20$  后随  $\nu$  的变化则很缓慢(见图 9), 因而使介子的平均半径难于达到实验值.

为了讨论函数  $K(\nu, E)$  和位阱形状的关系, 我们将位阱(1.3)进行规格化, 即将阱深  $V_\nu(0)$  作为位势  $V_\nu(r)$  的单位, 而以阱宽  $a(\nu, E)$  作为距离  $r$  的单位, 亦即

$$\bar{V}_\nu(\bar{r}) = V_\nu(r)/V_\nu(0), \quad \bar{r} = r/a(\nu, E)$$

于是(1.3)变为

$$\begin{aligned} -\bar{V}_\nu(\bar{r}) &= \sum_{m=0}^{\nu-2} c_m^\nu f(\nu)^m \bar{r}^m e^{-f(\nu)\bar{r}} \\ c_m^\nu &= \frac{2^m(\nu-2)!(2\nu-m-4)!}{(2\nu-4)!(\nu-m-2)!m!}, \\ f(\nu) &= 4^{\nu-2} \frac{[(\nu-2)!]^2}{(2\nu-4)!}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

即规格化位阱  $\bar{V}_\nu(\bar{r})$  只是参量  $\nu$  和变量  $\bar{r}$  的函数. 计算不同  $\nu$  值 ( $5 \leq \nu \leq 10^3$ ) 的规格化位阱, 表明  $\bar{V}_\nu(\bar{r})$  只在  $\nu = 5$  到  $\nu = 20$  间变化较大, 到  $\nu > 20$  后变化很缓慢. 实际上, 可将规格化位阱  $\bar{V}_\nu(\bar{r})$  表为:

$$-\bar{V}_\nu(\bar{r}) = e^{-\bar{r}\sqrt{\pi(\nu-2)}} F(2-\nu, 4-2\nu, 2\bar{r}\sqrt{\pi(\nu-2)}), \quad (3.2')$$

其中  $F(\alpha, \gamma, Z)$  为合流超比函数. 或表为:

$$-\bar{V}_\nu(\bar{r}) = \frac{e^{-\bar{r}\sqrt{\pi(\nu-2)}}}{[2(\nu-2)!]} \int_0^\infty dt e^{-t} t^{\nu-2} (2\bar{r}\sqrt{\pi(\nu-2)} + t)^{\nu-2}. \quad (3.2'')$$

引入符号  $\lambda \equiv \nu - 2$ ,  $S \equiv \sqrt{\pi} \bar{r}$  后, 可以证明:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{d}{d\lambda} \bar{V}_\lambda(S) = 0, \quad (3.3)$$

即  $\bar{V}_\nu(\bar{r})$  当  $\nu$  趋于无限大时与  $\nu$  无关, 这与图 9 中相应于  $K_c(\nu)$  的变化趋势一致. 可见  $K_c(\nu)$  可作为规格化位阱  $\bar{V}_\nu(\bar{r})$  形状的一个参考标志. 即  $\nu$  越大, 规格化位阱底部越平坦,  $K_c(\nu)$  也越大. 由于  $\nu > 20$  后  $K_c(\nu)$  随  $\nu$  的增大而增长得很缓慢, 从平底的要求看,

需要改进位阱形状,使底部变平坦,从而使相应的  $K_c(\nu)$  有较大值. 这样,即使临界阱宽不能增加,也可能使介子得到较大的平均半径.

如何改进位阱呢?毛主席指出:“事物的矛盾法则,即对立统一的法则,是唯物辩证法的最根本的法则”.恩格斯也指出:“一切运动都存在于吸引和排斥的相互作用中”.显然,构成介子的层子和反层子之间的相互作用也应该是吸引和排斥的对立统一,而在形成介子束缚态时,其中的吸引作用应占优势.由  $V_\nu(r)$  势求出的介子平均半径偏小,估计它未充分反映层子与反层子之间的排斥作用.因此,可在吸引势  $V_\nu(r)$  上迭加另一排斥势  $-V'_\nu(r)$  来调整位阱,使其能较正确地反映层子与反层子之间的相互作用.

由于相互作用常数  $G_\nu^2$  随  $\nu$  值不同而具对  $M$  的不同量纲.为了便于讨论,在保持方程协变的条件下,一种比较自然的推广是采用  $\nu$  值相同的  $-V'_\nu(r)$  型排斥势和原有的  $V_\nu(r)$  型吸引势迭加.此时,介子束缚态的 B-S 方程中相应的积分核为:

$$U_{\nu, \gamma, g'}(k) = -\frac{G_\nu^2}{(2\pi)^4} \left\{ \frac{1}{(k^2 + N^2)^\nu} - \frac{g'}{(k^2 + \gamma^2 N^2)^\nu} \right\}, \quad (3.4)$$

式中  $\gamma$  与  $g'$  为新引入的参量. (3.4) 式反映层子与反层子之间的超强相互作用包括和交换粒子有关的吸引势和排斥势之和,为了确定,取  $\gamma > 1$ . 与积分核 (3.4) 相应的位势则为:

$$V_{\nu, \gamma, g'}(r) = -\frac{G_\nu^2}{4\pi} \sum_{m=0}^{\nu-2} d_m^\nu r^m \left[ \left( \frac{1}{2N} \right)^{2\nu-m-3} e^{-Nr} - g' \left( \frac{1}{2\gamma N} \right)^{2\nu-m-3} e^{-\gamma N r} \right],$$

$$d_m^\nu = \frac{1}{(\nu-1)! (\nu-m-2)! m!}, \quad (3.5)$$

我们称这种位势为“差型  $V_\nu(r)$  势”(以下简称差势,并用符号  $V_D(r)$  表示). 引入参量代换  $\omega \equiv \nu - 3$ ,  $g' \equiv \gamma^{2\omega+3} g$  后,由 (3.5) 式得到差势  $V_D(r)$  在原点的阱深为:

$$-V_D(0) = \lambda^{(\nu)} M \left( \frac{1}{2} \right)^{2\omega} \frac{(2\omega+2)!}{(\omega+1)!} \left( \frac{1}{E} \right)^{2\omega+3} (1-g), \quad (3.6)$$

差势  $V_D(r)$  的面积则为:

$$S_D = 4\lambda^{(\nu)} M (\omega+1)! \left( \frac{1}{E} \right)^{2\omega+4} \left( 1 - \frac{g}{\gamma} \right), \quad (3.7)$$

其平均阱宽  $a_D$  则定义为面积  $S_D$  与最大阱深  $-V_D(r)_{\max}$  之商:

$$a_D \equiv S_D / -V_D(r)_{\max}. \quad (3.8)$$

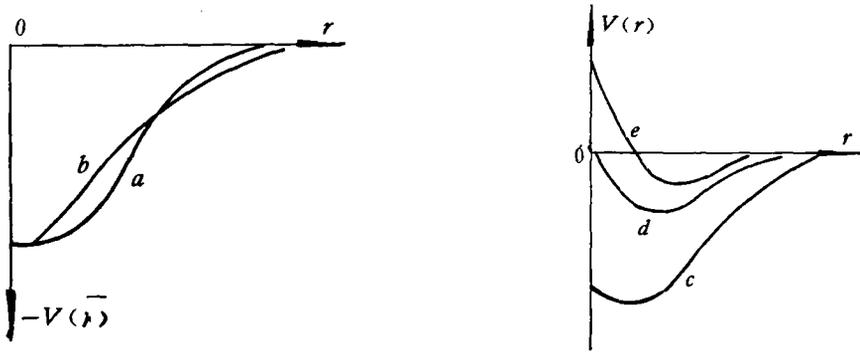
为了讨论差势  $V_D(r)$  的形状,先求出它在原点的一阶与二阶微商,由 (3.5) 直接得出:

$$\begin{aligned} -V_D'(0) &= 0, \\ -V_D''(0) &= -\lambda^{(\nu)} M^3 \left( \frac{1}{2} \right)^{2\omega-1} \frac{2\omega!}{\omega!} \left( \frac{1}{E} \right)^{2\omega+1} (1-\gamma^2 g). \end{aligned} \quad (3.9)$$

即差势  $V_D(r)$  在原点达到极值,而其形状主要决定于参量  $\gamma, g$  的选择. 即有:

$$\left. \begin{aligned} V_D''(0) < 0, & \quad g > \gamma^{-2}, \\ V_D''(0) = 0, & \quad g = \gamma^{-2} < 1, \\ V_D''(0) > 0, & \quad g < \gamma^{-2} < 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

与 (3.10) 相应的各种差势的形状见图 10. 从图 10 可以看出: 当  $g = \gamma^{-2}$  时, 所得差势的底最平坦, 称为“类平底势”; 当  $g < \gamma^{-2}$  时, 差势的底不及类平底势的平坦; 当  $g > \gamma^{-2}$  时,



(a)  $g = r^{-2}$                       (d)  $r^{-2} < g = 1$   
 (b)  $g < r^{-2}$                       (e)  $r^{-2} < g > 1$   
 (c)  $r^{-2} < g < 1$

图 10 各种不同的差势

与类平底势相比,排斥作用更强,势的最深处不在原点,称为“凹势”,可以期望类平底势比参量  $\nu$  相同的  $V_\nu(r)$  势更为平坦,而对介子能求得比  $V_\nu(r)$  势得到的更大的平均半径。下面着重讨论类平底势的情形。

为了便于讨论,我们也将差势  $V_D(r)$  进行规格化,即以最大阱深  $V_D(r)_{\max}$  作为差势  $V_D(r)$  的单位,而以平均阱宽  $a_D$  作为  $r$  的单位。对类平底势的情形,即有

$$\bar{V}_D(r) = V_D(r)/V_D(0), \quad \bar{r} = r/a_D.$$

由 (3.5) 式:

$$-V_D(r) = \lambda^{(\nu)} M \sum_{m=0}^{\nu-2} b_m^\nu \left(\frac{1}{E}\right)^{2\nu-m-3} r^m e^{-Er} [1 - g\gamma^m e^{-Er(\gamma-1)}]$$

$$b_m^\nu = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu-m-6} \frac{(2\nu - m - 4)!}{(\nu - m - 2)! m!} \tag{3.5'}$$

从 (3.5') 式可以直接得出规格化的差势为:

$$-\bar{V}_D(\bar{r}) = \sum_{m=0}^{\nu-2} (1-g)^{-1} c_m^\nu t^m [f(\nu)]^m \bar{r}^m e^{-f(\nu)t\bar{r}} \cdot [1 - g\gamma^m e^{-f(\nu)t\bar{r}(\gamma-1)}],$$

$$t = (1 - g/\gamma)/(1 - g) \tag{3.11}$$

而系数  $c_m^\nu$  与  $f(\nu)$  的定义见 (3.2) 式。在类平底势的情形下  $g = \gamma^{-2}$ , 规格化位阱  $\bar{V}_D(\bar{r})$  只和  $\nu, \gamma$  两个参量有关。由 (3.11) 式可以看出,若  $\gamma \approx 1$  (即  $t \approx 1$ ), 则规格化差势  $\bar{V}_D(\bar{r})$  对  $\nu$  的依赖和  $V_\nu(r)$  势相近。对  $\gamma$  的依赖可从 (3.11) 式和实际计算看出。当  $g = \gamma^{-2}$ , 由 (3.11) 式可知  $\gamma \rightarrow \infty$  时,  $t \rightarrow 1$ , 这时 (3.11) 式变为 (3.2) 式, 即规格化差势  $\bar{V}_D(\bar{r})$  与规格化的  $\bar{V}_\nu(\bar{r})$  势相同, 这点也可从 (3.5) 式直接看出。由于规格化的  $\bar{V}_\nu(\bar{r})$  势在  $\nu > 20$  后变化很小, 因此, 对类平底差势  $V_D(r)$ , 我们只需着重求  $\nu = 20, \gamma \approx 1$  时的解, 对应于参量  $\nu, \gamma$  其他值的解只取作比较。

对类平底差势的情形, 为了易于求出介子基态波函数和接近最大值的平均半径, 在参量  $\nu, \gamma$  确定后, 还需讨论如何求得力程参量  $E$  的临界值  $E_c$ , 对类平底型差势, 应用 (3.6) — (3.8) 式直接求得平均阱宽为:

$$a_D = a_\nu \frac{\left(1 - \frac{g}{\gamma}\right)}{(1-g)} \approx \frac{\sqrt{\pi(\nu-2)}}{E} \frac{\left(1 - \frac{g}{\gamma}\right)}{(1-g)}, \quad (\nu \gg 1) \quad (3.12)$$

因此,对  $\gamma \approx 1$  和  $\nu$  较大的情形,在临界条件下,由(3.12)式可得出临界  $E$  值和临界阱宽的关系式:

$$E_c \approx \frac{\sqrt{\pi(\nu-2)}}{(a_D)_c}. \quad (3.13)$$

为了易于求出基态解,一般可先将类平底差势的临界阱宽  $(a_D)_c$  估计得比  $V_\nu(r)$  势的临界阱宽  $a(\nu, E_c^{(\nu)})$  略小,作少量试算先得出  $(a_D)_c$  的粗略值,再由(3.13)式大致估计为求得基态解所需的最小  $E$  值,再调节参量  $E$ ,即可求得对于一定  $\nu, \gamma$  值的介子基态波函数和接近最大值的平均半径。

实际的计算表明,类平底型差势  $V_D(r)$  的确比  $V_\nu(r)$  势平坦得多(见图11)。由图11(b)可以看出:  $\nu=5, \gamma=2$  的差势  $\bar{V}_D(\bar{r})$  对  $\bar{V}_5(\bar{r})$  底部平坦程度的改进,就比  $\bar{V}_{1000}(\bar{r})$  对  $\bar{V}_5(\bar{r})$  的改进显著。由图11(a)、(c)还可以看出,对于相同的  $\nu$ ,差势  $\bar{V}_D(\bar{r})$  对于  $\bar{V}_\nu(\bar{r})$  势底部平坦程度的改进更为显著。

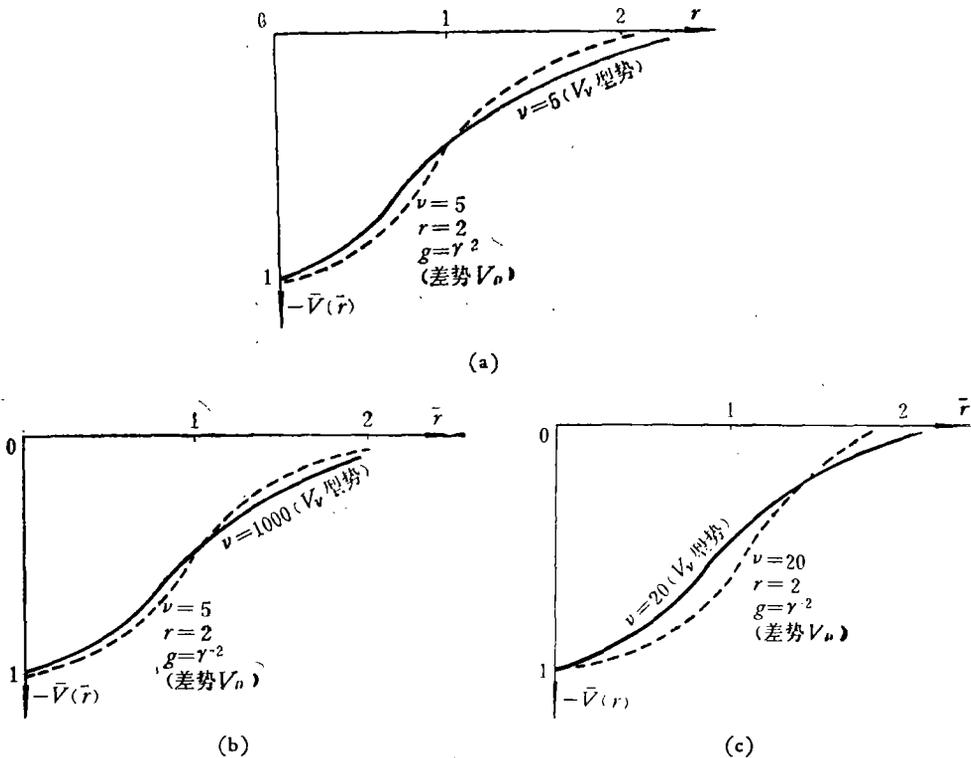


图11 类平底差势  $V_D(r)$  与  $V_\nu(r)$  势的规格化形状的比较

在凹势的情形下,  $g > \gamma^2$ , 此时规格化位阱  $\bar{V}_D(\bar{r})$  的形状除参量  $\nu, \gamma$  外还和参量  $g$  的选择有关。在求凹势情形下的介子基态波函数和接近最大值的平均半径时,可以采用和讨论类平底型差势相似的方法来估计力程参量  $E$  的临界值。

### 四、差型 $V_D(r)$ 势的计算结果和讨论

对类平底型差势的情形 ( $g = \gamma^{-2}$ ), 在求解  $0^-$  介子的束缚态方程时, 除参量  $\nu$ 、 $E$ 、 $B$  外还需确定表征差势  $V_D(r)$  特性的另一位阱参量  $\gamma$ . 为了了解类平底型差势对于计算介子基态平均半径的改进程度, 根据上面的讨论, 我们可以着重就  $\nu = 20$ 、 $\gamma \geq 1$  的参量值范围内求解, 对于参量  $(\nu, \gamma)$  值其它范围内的解只取作比较. 图 12 给出对类平底差势求得的一组基态解, 图中给出这组位阱参量  $(\nu, E, \gamma)$  的数值和相应的位形空间波函数  $r\psi(r)$  与差势位阱  $V_D(r)$ .

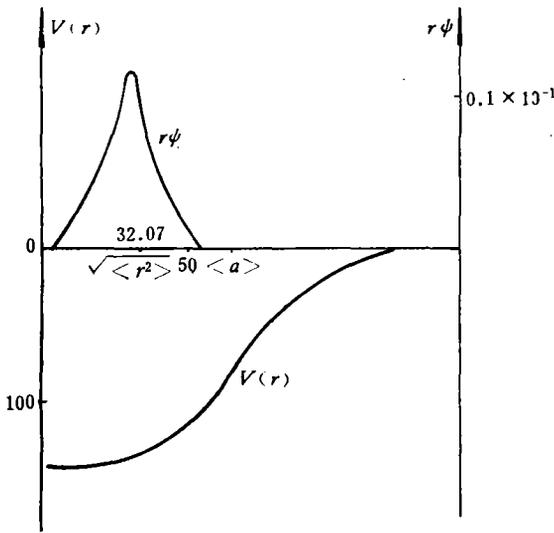


图 12 与参量  $\nu = 20$ ,  
 $E = 0.17, \gamma = 1.1$   
相应的类平底差势与介子波函数

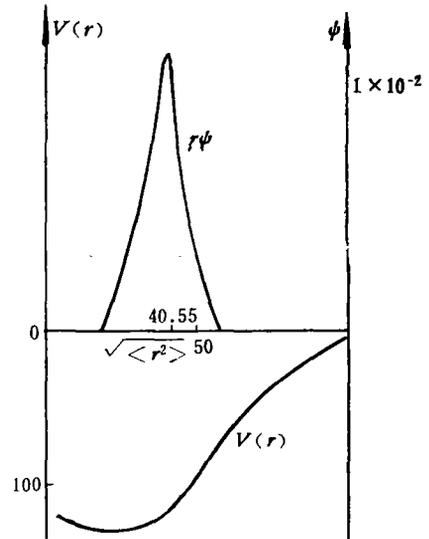


图 13 与参量  $\nu = 20, E =$   
 $0.19, B = 0, \gamma = 1.1,$   
 $g = 0.88$  相应的凹势和介子波函数

表 1 给出对应于类平底差势  $V_D(r)$  的各组位阱参量值所求得的介子基态平均半径 (由相应的基态波函数算出). 为了便于进行比较, 表 1 还列出和  $V_D(r)$  势相应的部分结果, 表中的差势阱宽  $a_D$  可从 (3.12) 算出, 而参量  $K \equiv \langle R^2 \rangle / a_D$  或  $a_D$  可以作为表征  $V_D(r)$  势或类平底差势  $V_D(r)$  底部平坦程度的参考标志.

在凹势的情形下,  $g > \gamma^{-2}$ , 与类平底差势相比, 此时位势中排斥作用的相对比重增加, 求得的介子基态平均半径可能更大一些. 在求解介子束缚态方程时, 除参量  $\nu, E, \gamma$  外, 还需确定表征凹势特性的另一参量  $g$ , 表 2 给出凹势情形下对几组参量值求得的介子基态平均半径 (由相应的基态波函数算出).

图 13 给出从表 2 最后一组参量值求得的介子基态的位形空间波函数  $r\psi(r)$  及其凹势位阱  $V_D(r)$ .

从上面的计算结果和讨论, 可以得出下面的一些结论:

(1) 引入类平底差势  $V_D(r)$  后, 这种类平底差势一般可以具有  $V_D(r)$  势相近的阱宽  $a_D$  和阱深  $-V_D(0)$  [参看 (3.6) 和 (3.12) 式], 说明它表征的层子与反层子间的相互作用

表1 介子基态平均半径及其有关位阱参量

$V_\nu(r)$ 势						类平底差势 $V_D(r)$ , ( $g = \gamma^{-2}$ )						
$\nu$	$E \approx E_c^{(\nu)}$	$B$	$a_\nu$	$K$	$\sqrt{\langle R^2 \rangle}$	$\nu$	$E$	$B$	$\gamma$	$a_D$	$K$	$\sqrt{\langle R^2 \rangle}$
5	0.043	0	74.36	1.39	10.16	5	0.070	0	2	63.21	5.33	18.36
10	0.068	0	74.79	1.78	11.52	20	0.140	0	2.5	60.27	9.46	23.88
20	0.099	0	76.34	1.91	12.09	20	0.130	0.007	2	67.96	12.84	29.54
						20	0.140	0	2	63.10	11.83	27.31
						20	0.140	0.007	2	63.10	11.85	27.34
						20	0.170	0	1.1	63.80	16.12	32.07
						20	0.190	0	1.001	59.77	14.64	29.58
50	0.160	0	76.95	2.00	12.41	50	0.220	0	2	65.29	12.99	29.13
						100	0.350	0	2	58.56	11.86	26.35
400	0.500	0	70.7	2.04	12.00							
800	0.660	0	75.88	2.07	12.53							
1000	0.730	0	76.71	2.06	12.58							

表2 凹势情形下 ( $g > \gamma^{-2}$ ) 的介子基态平均半径

$\nu$	$E$	$B$	$\gamma$	$g$	$\sqrt{\langle R^2 \rangle}$
20	0.18	0	1.1	0.850	35.63
20	0.18	0	1.1	0.855	37.20
20	0.19	0	1.1	0.880	40.55

仍然是一种超强作用。由于增加了排斥作用,使差势  $V_D(r)$  的最大阱深有所减小(约从  $V_\nu(r)$  势的 165 M 减至 140 M),因而减弱了层子与反层子之间的平均束缚程度。这种束缚程度的减弱还反映在位阱的底部变得更为平坦,和  $V_\nu(r)$  势相比,在参量 ( $\nu, E$ ) 值的通常范围内,即可得到底部较为平坦的位阱。由此求得的介子基态平均半径,比 ( $\nu, E$ ) 值相同的  $V_\nu(r)$  势求得的介子基态平均半径有较大改进。

应该指出,在导出介子束缚态的分波积分方程时,基于介子内部运动的非相对论性近似的考虑,我们曾略去介子结构波函数中的相对动量项,即相应于采取了 Bargman-Wigner 近似。对于我们讨论的紧束缚态的情形,应用上述 B-W 近似的合理程度,值得进一步讨论,看来它不是一个好的近似(至少和松束缚态的情形相比)。但从上述的讨论可知,即使考虑更为合理的近似,差势  $V_D(r)$  较  $V_\nu(r)$  势能更好地描述介子束缚态的特性这一定性的结论仍将保留。

另外,在层子模型中研究由层子与反层子构成介子束缚态时,它们之间的超强相互作用在其质心系中的等效势常可近似地看作一个平底深位阱(即总体表现为一种吸引势)<sup>[4]</sup>,在这种等效势中一般应同时包括吸引势与排斥势两种对立的因素,并相互制约。当然我们只是在研究一种特殊形式的位阱  $V_\nu(r)$  并将超强相互作用限于标量型耦合的条

件下得出这个结论, 估计推广到其他形式的位阱和考虑超强相互作用各种可能类型的耦合时, 这种定性的基本特征仍有可能保留。

(2) 上面将  $V_s(r)$  势推广到类平底差势只是初步的讨论, 在上面的讨论中我们只考虑两项  $V_s(r)$  势的迭加。显然, 在上述讨论和改进 B-W 近似的基础上, 可以考虑由更多项的  $V_s(r)$  势进行迭加以构成底部更为平坦的差势。利用更多的参量进行调节, 使求得的介子基态平均半径更易接近实验值, 也可进一步讨论介子结构波函数的性质(包括原点波函数等)。这些问题有待进一步研究。

作者对四川大学数学系计算数学教研室在计算过程中给予的支持表示谢意。

### 参 考 资 料

- [1] 冼鼎昌、吴坚武、高崧、计算, 中国科学, 1977, 5, 431.
- [2] 北京大学物理系基本粒子理论组, 北京大学学报, 1966, 12, 213.
- [3] G. E. Wick, *Phys. Rev.*, 96 (1958), 1924.
- [4] 北京大学物理系基本粒子理论组, 物理学报, 25 (1976), 415.

## FURTHER DISCUSSION ON THE EQUATION AND ITS SOLUTIONS FOR THE BOUND STATES OF MESONS

GAO LUN

(*Szechuan University*)

### ABSTRACT

We continue the investigation of the equation and its solutions for the bound states of mesons discussed previously, emphasizing on large values of  $\nu$ , a parameter characterizing the shape of the potential. The results show that the dependence of the eigenvalues  $\lambda$  and some related physical quantities upon the potential parameters  $\nu$  and  $E$  is approximately the same as in our previous work. But the average radii of the bound mesons cease increasing as  $\nu$  increases. For each value of  $\nu$ , there exists a maximum average radius  $\sqrt{\langle R^2 \rangle_{\max}}$ , and all these  $\sqrt{\langle R^2 \rangle_{\max}}$  are approximately equal to  $12.6 M^{-1}$  ( $M$  being the mass of the straton), which is much smaller than the experimental value of the radius of the  $\pi$  meson. However, if we assume, in addition to the attractive potential, there exists, for the straton-anti-straton superstrong interactions, also a repulsive potential, and, in particular, if we introduce a difference-type potential  $V_D(r)$  corresponding to the potential  $V_s(r)$  in our previous work, the calculated radii of the bound mesons do approach the experimental value.