

原子核的单粒位阱 (II) 非厄米选择

吴式枢

(吉林大学物理系)

摘 要

应用格林函数方法本文较仔细地研究了单粒位阱的非厄米选择 $u_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}(\epsilon_\beta)$ [或 $M_{\alpha\beta}(\epsilon_\alpha)$], 其中 $M_{\alpha\beta}(\omega) = M_{\alpha\beta}^{\text{on}}(\omega) + M_{\alpha\beta}^{\text{off}}(\omega)$ 表示质量算符. 文中从另一个角度给出了 $M_{\alpha\beta}^{\text{on}}(\omega)$ 与 $M_{\alpha\beta}^{\text{off}}(\omega)$ 的定义并指出, 质量算符插图可以分为三类项之和:

(1) 由 $M_{\alpha\beta}^{\text{off}}(\omega)$ 的极点贡献的项. 这类项不可分离, 只有它们需要另行处理;

(2) 可以由上述非厄米选择完全抵销的项, 这提供了选择 $u_{\alpha\beta}$ 的一个依据;

(3) 剩余项. 这部分项可以简单地求和并且可以解释为单粒格林函数的振幅修正.

作为应用举例, 文中讨论了粒子-空穴格林函数的重整化无规位相近似 (RRPA), 给出了有关的计算公式. 在RRPA中不仅顾及了 G 矩阵的偏离能壳性, 而且还计及了单粒传播子的重整化, 后者除 $M_{\alpha\beta}^{\text{off}}(\omega)$ 所含极点的贡献外考虑了所有其它效应.

一、引 言

原子核的单粒位阱 u 是核结构理论的基本研究课题之一, 它不仅决定原子核的零级近似波函数, 而且等效相互作用以及由剩余相互作用 H_1 引起的其它效应都和它有密切的关系. 例如, Ellis 与 Osnes^[1] 曾指出, 核实极化效应的计算结果随单粒波函数的不同选取可以有显著的差别. 因此, 要想确切了解 H_1 引起的效应, 建立一个恰当的单粒位阱理论是有实际意义的. 这方面近来有下少理论工作, 其中受到较广泛注意的一个理论是“最大抵销原则”. 它的基本思想是, 可以这样选择 u 使之尽可能抵销由二体相互作用 v 产生的费曼图. 这样将可能使 H_1 的作用大大减小或至少使需要计算的高级费曼图大大减少, 从而便于对这些高级项作进一步的理论研究. 利用广义时序分离法, Brandow^[2] 与 Kirson^[3] (BK) 曾指出, 质量算符插图 (简称 M 插图) 可分为两部分: M^{on} 与 $M^{\text{off}} = M - M^{\text{on}}$. M^{on} 可以分离, 它包含所有具有交叉外线的 M 插图 (图 1). 由这部分图所贡献的项又可分为两类: 其一可取为 u 的定义, 并由此将被 u 所抵销 (这一性质将称为 u 的抵销性);

另一可解释为费米线因子^[3]。Brandow 的理论对满壳核的计算已取得一定的成效^[4]，但是由于粒子线的最低级 G 矩阵 M 插图(图 2)已不属于 M^{on} ，按 BK 位阱求得的费米面外的粒子态几乎全是非结合态，因此不宜于计算非满壳核的定态性质。Jones 与 Mohling (JM)^[5] 指出， M^{off} 中实际上还含有一部分可分离的项。应用与时间有关的摄动理论，JM 明显地算出了 M^{off} 中准确到 $O(\nu^2)$ 的可分离项。虽然他们的论据可以推广到 ν 的高级项，但是计算比较复杂，因此不便于导出 u 的一般表达式，也不便于探讨 u 的一般性质。根据上述 JM 的结果以及 Klein^[6] 的一个结论，最近 JM 与 Becker (JMB)^[7] 提出， u 的一般形式可选为

$$u_{\alpha\beta} = \text{Re}M_{\alpha\beta}(\omega = \varepsilon_{\beta}) \text{ 或 } u_{\alpha\beta} = \text{Re}M_{\alpha\beta}(\varepsilon_{\alpha}) \quad (1-1)$$

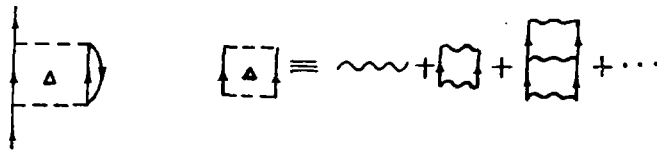


图 2 粒子线的最低级 G 矩阵插图

容易看出，式(1)概括了 BK 的结果。由上式确定的 $u_{\alpha\beta}$ 虽然是实的，却不是厄米的，为了保证所求得单粒本征函数互相正交，JMB 进一步建议将 $u_{\alpha\beta}$ 取为

$$u_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \text{Re} [M_{\alpha\beta}(\varepsilon_{\beta}) + M_{\alpha\beta}(\varepsilon_{\alpha})]. \quad (2)$$

下一文将证明，对核结构计算感兴趣的断续谱区， $M_{\alpha\beta}(\varepsilon_{\beta})$ 与 $M_{\alpha\beta}(\varepsilon_{\alpha})$ 都是实的，即式(1-1)中“Re”的限制并不是必要的。因此，本文将针对

$$u_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}(\varepsilon_{\beta}) \text{ 或 } u_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}(\varepsilon_{\alpha}) \quad (1-2)$$

进行讨论。我们将沿用前一文 [I]^[8] 的符号并将以 t 表示 $\sqrt{-1}$ 。[I] 中曾指出，按式(1)选择 u 可使单粒格林函数的表达式简化。此外，虽然为了引进双正交系将使计算复杂一些，但是在引进了双正交系后，摄动理论的公式演算却并不比将 u 选为厄米时 [式(2)] 更麻烦。这说明，式(1)是一个值得进一步研究的选择。本文将着重讨论式(1)的抵销性以及它和单粒格林函数的关系。由于按照 Klein^[6] 的推导不易看出究竟那类项将被式(1)所抵销，文中给出了另一个推导式(1)以及分析 M 插图的方法并从另一个角度定义了 M^{on} 与 M^{off} 。文中指出， M 插图的贡献可归结为三类项之和：

- (1) 由 $M_{\alpha\beta}^{off}(\omega)$ 所含极点贡献的项。这类项不可分离，只有它们需要另行处理；
- (2) 可由 $u_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}(\varepsilon_{\beta})$ [或 $M_{\alpha\beta}(\varepsilon_{\alpha})$] 全部抵销的项。这给出了一个按式(1)选择 $u_{\alpha\beta}$ 的依据；
- (3) 剩余项。虽然这类项仍是一个无穷级数，但可以简单求和并可解释为单粒格林函数的振幅修正。

最后，作为应用举例，文中讨论了粒子-空穴格林函数的 RRPA，给出了有关的计算

公式,并强调了G矩阵的偏离能壳性对反向传播的声子可能会自然地产生阻尼效应,从而构成一个排除RPA声子崩溃现象^[9]的因素。

二、单粒格林函数的主部与单粒位阱的非厄米选择

最近对满壳核的计算指出,单粒传播子的重整化常不是一个可以忽略的效应^[4]。这表明,我们不仅需要寻找一个恰当的单粒位阱,而且取单粒格林函数的零级近似,即令 $G_{\alpha\beta}(t=t_1-t_2) \simeq G_{\alpha\beta}^0(t)$ 也可能不是一个足够好的近似。

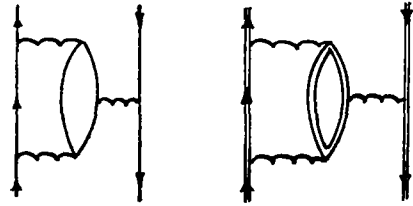


图3 (a) 以 $G_{\alpha\beta}^0(t)$ 为展开基底的骨架费曼图 (b) 以 $G_{\alpha\beta}(t)$ 为展开基底的对应费曼图

李与杨^[10]曾指出,为此可以采取以下改进途径:对应于每一个以 $G_{\alpha\beta}^0(t)$ 为展开基底的骨架费曼图可以代替 $G_{\alpha\beta}^0(t)$ 引进 $G_{\alpha\beta}(t)$ (图3)并再适当顾及由此可能会引起的多余项的修正。这样,计算了每一个后一类的费曼图(参看图3b)就相当于对无穷多个以 $G_{\alpha\beta}^0(t)$ 为基底的费曼图进行了求和,由此将不仅可以提高计算的准确性并使我们只需要考虑骨架费曼图。这里,自然,首先存在以下问题:如何足够准确地求得 $G_{\alpha\beta}(t)$ 并如何使其表达式尽量简化?

因为 $G_{\alpha\beta}^0(t) = \delta_{\beta\alpha} G_{\alpha}^0(t)$, 而且 $G_{\beta}^0(t < 0) = 0$ 与 $G_{\alpha}^0(t > 0) = 0$, 所以在以 $G_{\alpha\beta}^0(t)$ 为基底的费曼图中,粒子(空穴)线总是上(下)指的。相应地,我们将分别称 $G_{p'p}(t > 0)$ 与 $G_{h'h}(t < 0)$ 为 $G_{p'p}(t)$ 与 $G_{h'h}(t)$ 的主部。作为第一步将先只考虑主部并问:是否可以恰当地选择单粒位阱 \mathbf{u} 以使主部的计算尽量准确和简单?

我们知道, $G_{\alpha\beta}(t)$ 满足以下Dyson方程

$$G_{\alpha\beta}(t_1 - t_2) = \delta_{\alpha\beta} G_{\alpha}^0(t_1 - t_2) + \iint_{-\infty}^{\infty} d\sigma_1 d\sigma_2 G_{\alpha}^0(t_1 - \sigma_1) \sum_{\gamma} [M_{\alpha\gamma}(\sigma_1 - \sigma_2) + t u_{\alpha\gamma} \delta(\sigma_1 - \sigma_2)] \times G_{\gamma\beta}(\sigma_2 - t_2). \quad (3)$$

上式的傅氏变换等于

$$G_{\alpha\beta}(\omega) = \delta_{\alpha\beta} G_{\alpha}^0(\omega) + \sum_{\gamma} G_{\alpha}^0(\omega) [u_{\alpha\gamma} - M_{\alpha\gamma}(\omega)] G_{\gamma\beta}(\omega) = \delta_{\alpha\beta} G_{\alpha}^0(\omega) + G_{\alpha}^0(\omega) [u_{\alpha\beta} - M_{\alpha\beta}(\omega)] G_{\beta}^0(\omega) + \sum_{\gamma} G_{\alpha}^0(\omega) [u_{\alpha\gamma} - M_{\alpha\gamma}(\omega)] G_{\gamma}^0(\omega) [u_{\gamma\beta} - M_{\gamma\beta}(\omega)] G_{\beta}^0(\omega) + \dots = G_{\alpha\beta}^0(\omega) + G_{\alpha\beta}^{(1)}(\omega) + G_{\alpha\beta}^{(2)}(\omega) + \dots \quad (4)$$

根据文[I]式(14)[简记为式(II4)]*不难看出, $M_{\alpha\beta}(\sigma_1 - \sigma_2)$ 的一般表达式可以明显地写如下形

* 式(II3)中的 $\xi_{\alpha}(t_1)$ 误印为 $\xi_{\alpha}(t_1)$, 即 $G_{\alpha\beta}(t_1 - t_2)$ 应读为 $G_{\alpha\beta}(t_1 - t_2) = \langle \Psi_0 | T \{ \xi_{\alpha}(t_1) \xi_{\beta}^{\dagger}(t_2) \} | \Psi_0 \rangle$

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha\beta}(\sigma_1 - \sigma_2) &= t \sum_{\gamma\delta} v_{\alpha\gamma, \beta\delta} G_{\delta\gamma}(0^-) \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \\
 &\quad + \langle \bar{\phi}_0 | T \{ U(\infty, -\infty) [V(\sigma_1), \bar{\xi}_\alpha(\sigma_1)] \\
 &\quad \times [V(\sigma_2), \xi_\beta^+(\sigma_2)] \} | \phi_0 \rangle_{L_{ir}}, \quad (5)
 \end{aligned}$$

其中 L_{ir} 表示只向相连的不可约图求和 [这里, 一个相连的图称为不可约, 如果不能通过切断其中所含任一内线而将它分为两部分],

$$\left. \begin{aligned}
 [V(\sigma_1), \bar{\xi}_\alpha(\sigma_1)] &= -\frac{1}{2} \sum_{\nu\rho\sigma} v_{\alpha\nu, \rho\sigma} \xi_\nu^+(\sigma_1) \bar{\xi}_\sigma(\sigma_1) \bar{\xi}_\rho(\sigma_1) \\
 [V(\sigma_2), \xi_\beta^+(\sigma_2)] &= \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\rho} v_{\mu\nu, \beta\rho} \xi_\mu^+(\sigma_2) \xi_\nu^+(\sigma_2) \bar{\xi}_\rho(\sigma_2)
 \end{aligned} \right\}, \quad (6)$$

$$G_{\delta\gamma}(0^-) = -\langle \Psi_0 | \xi_\gamma^+ \bar{\xi}_\delta | \Psi_0 \rangle \equiv -\hat{\rho}_{\delta\gamma}. \quad (7)$$

应用式 (6) 与 (7), 式 (5) 也可写为^[11]

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha\beta}(\sigma_1 - \sigma_2) &= - \left\{ t \sum_{\gamma\delta} v_{\alpha\gamma, \beta\delta} \hat{\rho}_{\delta\gamma} \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{4} \sum_{\lambda\eta\theta} \sum_{\mu\nu\rho} v_{\alpha\lambda, \eta\theta} G_{ir}(\eta\theta\lambda, \mu\nu\rho; \sigma_1 - \sigma_2) v_{\mu\nu, \beta\rho} \right\}, \quad (8)
 \end{aligned}$$

这里 $G_{ir}(\eta\theta\lambda, \mu\nu\rho; \sigma_1 - \sigma_2)$ 表示以下格林函数

$$\begin{aligned}
 \hat{G}(\eta\theta\lambda, \mu\nu\rho; \sigma_1 - \sigma_2) &= G(\eta\theta\lambda, \mu\nu\rho; \sigma_1 - \sigma_2) \\
 &\quad - [\hat{\rho}_{\theta\lambda} \langle \Psi_0 | T \{ \bar{\xi}_\eta(\sigma_1) \xi_\mu^+(\sigma_2) \xi_\nu^+(\sigma_2) \bar{\xi}_\rho(\sigma_2) \} | \Psi_0 \rangle - (\theta \longleftrightarrow \eta)] \\
 &\quad - [\hat{\rho}_{\rho\nu} \langle \Psi_0 | T \{ \xi_\lambda^+(\sigma_1) \bar{\xi}_\theta(\sigma_1) \bar{\xi}_\eta(\sigma_1) \xi_\mu^+(\sigma_2) \} | \Psi_0 \rangle - (\nu \longleftrightarrow \mu)] \quad (9-1)
 \end{aligned}$$

的不可约部分, 其中 $(\theta \longleftrightarrow \eta)$ 表示 θ 与 η 交换,

$$\begin{aligned}
 G(\eta\theta\lambda, \mu\nu\rho; \sigma_1 - \sigma_2) \\
 = \langle \Psi_0 | T \{ \xi_\lambda^+(\sigma_1) \bar{\xi}_\theta(\sigma_1) \bar{\xi}_\eta(\sigma_1) \xi_\mu^+(\sigma_2) \xi_\nu^+(\sigma_2) \bar{\xi}_\rho(\sigma_2) \} | \Psi_0 \rangle \quad (9-2)
 \end{aligned}$$

为二时 $2p - 1h$ 格林函数. 容易求得, 式 (8) 与 (5) 的傅氏变换如下:

$$\begin{aligned}
 M_{\alpha\beta}(\omega) &= \sum_{\gamma\delta} v_{\alpha\gamma, \beta\delta} \hat{\rho}_{\delta\gamma} \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_{\lambda\eta\theta} \sum_{\mu\nu\rho} v_{\alpha\lambda, \eta\theta} G_{ir}(\eta\theta\lambda, \mu\nu\rho; \omega) v_{\mu\nu, \beta\rho} \\
 &= \sum_{\gamma\delta} v_{\alpha\gamma, \beta\delta} \hat{\rho}_{\delta\gamma} + \langle \bar{\phi}_0 | \sum_{m=0}^{\infty} \left(\mathbf{H}_1 \frac{1}{E_G^0 - \mathbf{H}_0 + t\hat{\eta}} \right)^m \\
 &\quad \times \left\{ [\bar{\xi}_\alpha, \mathbf{V}] \frac{1}{E_G^0 + \omega - \mathbf{H}_0 + t\hat{\eta}} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\mathbf{H}_1 \frac{1}{E_G^0 + \omega - \mathbf{H}_0 + t\hat{\eta}} \right)^i [\mathbf{V}, \xi_\beta^+] \right. \\
 &\quad \left. - [\mathbf{V}, \xi_\beta^+] \frac{1}{E_G^0 - \omega - \mathbf{H}_0 + t\hat{\eta}} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\mathbf{H}_1 \frac{1}{E_G^0 - \omega - \mathbf{H}_0 + t\hat{\eta}} \right)^i [\bar{\xi}_\alpha, \mathbf{V}] \right\} \\
 &\quad \times \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{E_G^0 - \mathbf{H}_0 + t\hat{\eta}} \mathbf{H}_1 \right)^n | \phi_0 \rangle_{L_{ir}}, \quad (10)
 \end{aligned}$$

其中 $\hat{\eta} \rightarrow 0^+$. 上式将简记为

$$M_{\alpha\beta}(\omega) = \sum_{\gamma\delta} v_{\alpha\gamma, \beta\delta} \hat{\rho}_{\delta\gamma} + M_{\alpha\beta}^+(\omega) + M_{\alpha\beta}^-(\omega). \quad (11)$$

它的以 \mathbf{v} 为基底的摄动展开如下:

$$M_{\alpha\beta}(\omega) = \sum_{\gamma} v_{\alpha\gamma, \beta\gamma} n_{\gamma} + \frac{1}{2} \sum_{\mu\nu\rho} v_{\alpha\rho, \mu\nu} v_{\mu\nu, \beta\rho} \\ \times \left[\frac{(1-n_{\mu})(1-n_{\nu})n_{\rho}}{\omega - \varepsilon_{\mu} - \varepsilon_{\nu} + \varepsilon_{\rho} + i\eta} + \frac{n_{\mu}n_{\nu}(1-n_{\rho})}{\omega - \varepsilon_{\mu} - \varepsilon_{\nu} + \varepsilon_{\rho} - i\eta} \right] + \dots \quad (12)$$

式中 $n_{\mu} = 0$ 如果 $\mu = p$ (粒子态), $n_{\mu} = 1$ 如果 $\mu = h$ (空穴态). 由式(12)我们看到, $M_{\alpha\beta}(\omega)$ 的 $O(\mathbf{v})$ 近似就是熟知的 HF 近似.

现让我们讨论 $G_{p'p}(t > 0)$. 为了阐述方便, 先考虑 $G_{p'p}^{(1)}(t > 0)$. 当 $p' \neq p$ 时, 由式(4)有

$$G_{p'p}^{(1)}(t > 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} d\omega e^{-i\omega t} G_{p'}^0(\omega) [u_{p'p} - M_{p'p}(\omega)] G_p^0(\omega). \quad (13)$$

由此, 应用

$$G_{\alpha}^0(\omega) = - \left[\frac{1-n_{\alpha}}{\omega - \varepsilon_{\alpha} + i\eta} + \frac{n_{\alpha}}{\omega - \varepsilon_{\alpha} - i\eta} \right] = G_{\alpha}^{0+}(\omega) + G_{\alpha}^{0-}(\omega), \quad (14)$$

立即可得

$$G_{p'p}^{(1)}(t > 0) = [u_{p'p} - M_{p'p}(\varepsilon_{p'})] G_{p'}^0(\varepsilon_{p'}) e^{-i\varepsilon_{p'} t} \\ + [u_{p'p} - M_{p'p}(\varepsilon_p)] G_p^0(\varepsilon_p) e^{-i\varepsilon_p t} + P_{p'p}^{(1)}, \quad (15)$$

式中 $P_{p'p}^{(1)}$ 表示 $M_{p'p}^+(\omega)$ 的极点的贡献**. 因为 $M_{p'p}^-(\omega)$ 的极点位于上半平面, 因此它的极点对式(13)没有贡献, 即它的全部贡献已包含在式(15)的前两项里.

由式(15)我们看到, 如果选

$$u_{p'p} = M_{p'p}(\varepsilon_p), \quad (16-1)$$

就有

$$G_{p'p}^{(1)}(t > 0) = [u_{p'p} - M_{p'p}(\varepsilon_{p'})] G_{p'}^0(\varepsilon_{p'}) e^{-i\varepsilon_{p'} t} + P_{p'p}^{(1)}. \quad (17)$$

同样, 如果选

$$u_{p'p} = M_{p'p}(\varepsilon_{p'}),$$

则

$$G_{p'p}^{(1)}(t > 0) = [u_{p'p} - M_{p'p}(\varepsilon_p)] G_p^0(\varepsilon_p) e^{-i\varepsilon_p t} + P_{p'p}^{(1)}.$$

很明显, 这两种选择是等价的, 因此下面将只针对前一种选择进行讨论. 对于 $p' = p$ 的情形, $\omega = \varepsilon_p - i\eta$ 是一个二重极点, 按多重极点的留数定理可得

** 注意, 以下结果

$$\lim_{a \rightarrow b} \left\{ -\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} d\omega \frac{A(\omega)}{(\omega - a + i\eta_1)(\omega - b + i\eta_2)} \right\}_{\eta_1, \eta_2 \rightarrow 0^+} \\ = \lim_{b \rightarrow a} \left\{ \frac{A(b - i\eta_2)}{b - a + i(\eta_1 - \eta_2)} - \frac{A(a - i\eta_1)}{b - a + i(\eta_1 - \eta_2)} \right\}_{\eta_1, \eta_2 \rightarrow 0^+} = \left(\frac{dA}{d\omega} \right)_{\omega=a}$$

显然和将 $a - i\eta$ 看为是一个二重极点时所得结果相同. 这说明, 只要极限计算处理得当, 即使 $M_{p'p}^+(\omega)$ 的极点与 ε_p 或 $\varepsilon_{p'}$ 相重, 式(15)仍有意义. 不过, 这时必须顾及 $P_{p'p}^{(1)}$ 中所含的对应的项. 下面将指出, 对于 ε_{α} 的低能断续谱区, 上述情况一般不出现.

$$G_{pp}^{(1)}(t > 0) = \{M'_{pp}(\varepsilon_p) + it[u_{pp} - M_{pp}(\varepsilon_p)]\}e^{-t\varepsilon_p} + P_{pp}^{(1)} \quad (18)$$

其中 $M'_{pp}(\varepsilon_p) = [dM_{pp}(\omega)/d\omega]_{\omega=\varepsilon_p}$. 因此, 倘若选

$$u_{pp} = M_{pp}(\varepsilon_p) \quad (16-2)$$

则和 t 成比例的项等于零(这是很重要的), 由此

$$G_{pp}^{(1)}(t > 0) = M'_{pp}(\varepsilon_p)e^{-t\varepsilon_p} + P_{pp}^{(1)} \quad (19)$$

下面再考虑 $G_{p'p}^{(2)}(\omega)$ 的贡献, 由式(4)有

$$G_{p'p}^{(2)}(t > 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} d\omega e^{-i\omega t} \sum_{\gamma} G_{p'\gamma}^0(\omega) [u_{p'\gamma} - M_{p'\gamma}(\omega)] \times G_{\gamma p}^0(\omega) [u_{\gamma p} - M_{\gamma p}(\omega)] G_p^0(\omega) \quad (20)$$

仍先设 $p' \neq p$. 很明显, $G_p^0(\omega)$ 的极点中只有 $G_p^{0+}(\omega)$ [即 γ 取粒子态时] 的极点有贡献. 当按式(16)选择 \mathbf{u} 时, 不难看出, $G_p^{0+}(\omega)$ [$\gamma \neq p$ 与 p'] 的极点以及 $\gamma = p$ 时 [$G_p^0(\omega)$] 的二重极点的贡献都等于零. 但是, 如果想使 $G_p^0(\omega)$ 的极点的贡献也全等于零, 则除了式(16-1)与(16-2)外还需要进一步要求

$$u_{hp} = M_{hp}(\varepsilon_p) \quad (16-3)$$

这样, 式(20)中贡献不等于零的项除了可来自 $M^+(\omega)$ 的极点外, 仅来自 $G_{p'}^0(\omega)$ 的极点以及 $\gamma = p'$ 时 [$G_{p'}^0(\omega)$] 的二重极点, 即

$$G_{p'p}^{(2)}(t > 0) = \{M'_{p'p'}(\varepsilon_{p'}) [u_{p'p'} - M_{p'p'}(\varepsilon_{p'})] G_{p'}^0(\varepsilon_{p'}) + \sum_{\gamma (\neq p')} [u_{p'\gamma} - M_{p'\gamma}(\varepsilon_{p'})] G_{\gamma p'}^0(\varepsilon_{p'}) [u_{\gamma p} - M_{\gamma p}(\varepsilon_{p'})] G_p^0(\varepsilon_{p'})\} e^{-t\varepsilon_{p'}} + P_{p'p}^{(2)} \quad (21)$$

其中 $P_{p'p}^{(2)}$ 表示 $M^+(\omega)$ 的极点的贡献. 对于 $p' = p$, 当按式(16)选择 \mathbf{u} 时, 同样 $G_p^0(\omega)$ [$\gamma \neq p'$] 的极点的贡献等于零. 式(20)中贡献不等于零的项除 $M^+(\omega)$ 的极点外仅来自 [$G_{p'}^0(\omega)$] ($n = 2$ 与 3) 的二重和三重极点, 而且由后二者引起的和 t 与 t^2 成比例的项均等于零. 容易验证, 以上结论也适用于式(4)中的更高级项, 即若按式(16)选择 \mathbf{u} , 则

(1) $G_{p'p}(t > 0)$ 可以严格地写为

$$G_{p'p}(t > 0) = A_{p'p} e^{-t\varepsilon_{p'}} + P_{p'p}, \quad (22)$$

式中 $P_{p'p}$ 表示来自 $M^+(\omega)$ 的极点的贡献而且 $A_{p'p}$ 与时间 t 无关,

(2) 在 $G_{p'p}(\omega)$ 的摄动展开式(4)的每一项里只有 [$G_p^0(\omega)$] ($n = 1, 2, \dots$) 的单重或多重极点会对式(22)右端第一项有贡献.

注意, $A_{p'p}$ 仍是一个无穷级数. 下面我们阐明, 这个级数可以简单求和. 根据上述结论(2), 为了演算方便可引入***

$$\overline{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta}(\omega) = [u - M(\omega)]_{\alpha\beta} + \sum_{\rho}' [u - M(\omega)]_{\alpha\rho} G_{\rho}^0(\omega) [u - M(\omega)]_{\rho\beta} + \sum_{\rho\lambda}' [u - M(\omega)]_{\alpha\rho} G_{\rho}^0(\omega) [u - M(\omega)]_{\rho\lambda} G_{\lambda}^0(\omega) [u - M(\omega)]_{\lambda\beta} + \dots \quad (23)$$

式中 $\sum_{\rho\lambda\cdots}'$ 表示求和时 ρ, λ, \dots 都不取 α 值. 根据式(4)不难看出, $G_{\alpha\beta}(\omega)$ 可改写为

*** 如果将 \mathbf{u} 选为 $u_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}(\varepsilon_{\alpha})$, 则可相应地引进 $\overline{\mathfrak{M}}_{\alpha\beta}(\omega)$.

$$\begin{aligned}
G_{\alpha\beta}(\omega) &= \delta_{\alpha\beta} G_{\alpha}^0(\omega) + G_{\alpha}^0(\omega) \mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega) G_{\beta}^0(\omega) \\
&\quad + G_{\alpha}^0(\omega) \mathfrak{M}_{\alpha\alpha}(\omega) G_{\alpha}^0(\omega) \mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega) G_{\beta}^0(\omega) + \dots \\
&= \delta_{\alpha\beta} G_{\alpha}^0(\omega) + \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [G_{\alpha}^0(\omega) \mathfrak{M}_{\alpha\alpha}(\omega)]^n \right\} G_{\alpha}^0(\omega) \mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega) G_{\beta}^0(\omega). \quad (24)
\end{aligned}$$

因为 $\mathfrak{M}_{pp}(\varepsilon_p) = 0$, 而且为了求 $A_{p'p}$ 只须考虑 $[G_{p'}^0(\omega)]^n$ 的 n 重极点的贡献, 所以在只顾及后者的贡献时, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi t} \int_{\ominus} d\omega e^{-i\omega t} [G_{p'}^0(\omega) \mathfrak{M}'_{p'p'}(\omega)]^{n+1} G_{p'}^0(\omega) \\
&= (-1)^{n+1} \frac{1}{(n+1)!} \left\{ \frac{d^{n+1}}{d\omega^{n+1}} (e^{-i\omega t} [\mathfrak{M}'_{p'p'}(\omega)]^{n+1}) \right\}_{\omega=\varepsilon_{p'}} \\
&= (-1)^{n+1} [\mathfrak{M}'_{p'p'}(\varepsilon_{p'})]^{n+1} e^{-i\varepsilon_{p'} t}; \quad (25-1)
\end{aligned}$$

而当 $p' \neq p$ 时:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi t} \int_{\ominus} d\omega e^{-i\omega t} [G_{p'}^0(\omega) \mathfrak{M}'_{p'p'}(\omega)]^n G_{p'}^0(\omega) \mathfrak{M}'_{p'p}(\omega) G_p^0(\omega) \\
&= (-1)^n [\mathfrak{M}'_{p'p'}(\varepsilon_{p'})]^n \mathfrak{M}'_{p'p}(\varepsilon_{p'}) G_p^0(\varepsilon_{p'}) e^{-i\varepsilon_{p'} t}. \quad (25-2)
\end{aligned}$$

由式(24)与(25)可立即求得

$$\begin{aligned}
G_{pp}(t > 0) &= e^{-i\varepsilon_p t} \{1 - \mathfrak{M}'_{pp}(\varepsilon_p) + [\mathfrak{M}'_{pp}(\varepsilon_p)]^2 - \dots\} + P_{pp} \\
&= [1 + \mathfrak{M}'_{pp}(\varepsilon_p)]^{-1} e^{-i\varepsilon_p t} + P_{pp}. \quad (26-1)
\end{aligned}$$

同理, 当 $p' \neq p$ 时, 有

$$G_{p'p}(t > 0) = [1 + \mathfrak{M}'_{p'p'}(\varepsilon_{p'})]^{-1} \mathfrak{M}'_{p'p}(\varepsilon_{p'}) G_p^0(\varepsilon_{p'}) e^{-i\varepsilon_{p'} t} + P_{p'p}. \quad (26-2)$$

这说明

$$\left. \begin{aligned}
A_{pp} &= [1 + \mathfrak{M}'_{pp}(\varepsilon_p)]^{-1} \\
A_{p'p} &= [1 + \mathfrak{M}'_{p'p'}(\varepsilon_{p'})]^{-1} \mathfrak{M}'_{p'p}(\varepsilon_{p'}) G_p^0(\varepsilon_{p'}) \quad (p' \neq p)
\end{aligned} \right\}. \quad (27)$$

式(26)与(27)中 $\mathfrak{M}'_{p'p}(\varepsilon_{p'})$ 与 $\mathfrak{M}'_{pp}(\varepsilon_p)$ 仍是无穷级数. 为了求它们的和, 可以考虑 $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)$ 和可约质量算符 $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)$ 的关系. $\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega)$ 的表达式可写为

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega) &= [u - M(\omega)]_{\alpha\beta} + \sum_p [u - M(\omega)]_{\alpha p} G_p^0(\omega) [u - M(\omega)]_{p\beta} \\
&\quad + \sum_{\rho\lambda} [u - M(\omega)]_{\alpha\rho} G_{\rho}^0(\omega) [u - M(\omega)]_{\rho\lambda} G_{\lambda}^0(\omega) [u - M(\omega)]_{\lambda\beta} + \dots \\
&= \{[\mu - M(\omega)][1 - G^0(\omega)\{u - M(\omega)\}]^{-1}\}_{\alpha\beta}, \quad (28)
\end{aligned}$$

对比式(23)与(28)立即可以看出

$$\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} [\mathfrak{M}_{\alpha\alpha}(\omega) G_{\alpha}^0(\omega)]^n \mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\omega). \quad (29)$$

因为

$$\lim_{\omega \rightarrow \varepsilon_p} [\mathfrak{M}_{pp}(\omega) G_p^0(\omega)] = -\mathfrak{M}'_{pp}(\varepsilon_p), \quad (30)$$

由式(29)容易求得

$$\left. \begin{aligned}
\mathfrak{M}_{p'p}(\varepsilon_{p'}) &= [1 + \mathfrak{M}'_{p'p'}(\varepsilon_{p'})]^{-1} \mathfrak{M}'_{p'p}(\varepsilon_{p'}) \\
\mathfrak{M}'_{pp}(\varepsilon_p) &= [1 + \mathfrak{M}'_{pp}(\varepsilon_p)]^{-1} \mathfrak{M}'_{pp}(\varepsilon_p)
\end{aligned} \right\}. \quad (31)$$

将上式代入式 (27), 我们得到

$$\left. \begin{aligned} A_{pp} &= 1 - \mathfrak{M}'_{pp}(\varepsilon_p) \\ A_{p'p} &= \mathfrak{M}_{p'p}(\varepsilon_{p'}) G_p^0(\varepsilon_{p'}) \quad (p' \neq p) \end{aligned} \right\}. \quad (32)$$

以上结果和文 [I] 求得的完全相同, 虽然事先并没有要求 \mathbf{u} 满足其中所述定理的条件 (2). 我们看到, 式 (22) 右端第一项顾及了除 $P_{p'p}$ 外的全部效应. 这说明, 即使 $P_{p'p}$ 不可忽略, 式 (22) 也是一个有用的表达式, 因为这时只需要再进一步研究 $M^+(\omega)$ 的极点的贡献, 而当后者可以忽略时, 我们就将得到一个十分简单的结果. 由此, 按式 (7), $A_{p'p}$ 也给予费米线因子一个明显的计算公式. 由于 $P_{p'p}$ 的贡献仅来自 $M^+(\omega)$ 的极点, 因此这提供了一个新的定义 M^{on} 与 M^{off} 的途径, 即对于 $G_{p'p}(t > 0)$ 可分别将 $M^+(\omega)$ 与 $[M(\omega) - M^+(\omega)]$ 定义为 $M^{off}(\omega)$ 与 $M^{on}(\omega)$.

注意, 除非式 (12) 中的无穷级数收敛很快, 不然由摄动展开式所反映的极点并不近似地等于 $M_{\alpha\beta}(\omega)$ 的真正极点. 由式 (10) 我们看到, $M_{\alpha\beta}(\omega)$ 的极点由 $G_{ir}(\eta\theta\lambda, \mu\nu\rho; \omega)$ 确定. 如果对 G_{ir} 进行了较严格的计算 [例如, TDA 或 RPA^[12,13] 计算], 不难看出, 对于 ε_r 的低能 [即不接近于连续谱的] 断续谱区, $M_{\alpha\beta}(\omega)$ 的极点一般不与 ε_β 相重. 当 $M_{\alpha\beta}(\omega)$ 的极点不与 ε_β 相重时, 有

$$\lim_{\omega \rightarrow \varepsilon_\beta} [\omega - M(\omega)]_{\alpha\beta} G_\beta^0(\omega) = M'_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta),$$

根据式 (28) 这说明, 若按式 (16) 选择 \mathbf{u} , 则

$$\mathfrak{M}_{\alpha\beta}(\varepsilon_\beta) = 0, \quad (33)$$

由此, 由式 (I39) 就可立即导得式 (32).

很明显, 以上论据同样适用于求 $G_{h'h}(t < 0)$, 因此只须写下有关的结果. 如果选

$$\mathbf{u}_{\alpha h} = M_{\alpha h}(\varepsilon_h), \quad (16-4)$$

则由

$$G_{h'h}(t < 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} d\omega e^{-i\omega t} G_{h'h}(\omega), \quad (34)$$

可以立即求得

$$G_{h'h}(t < 0) = -A_{h'h} e^{-t\varepsilon_{h'}} + \bar{P}_{h'h}, \quad (35)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} A_{hh} &= [1 + \mathfrak{M}'_{hh}(\varepsilon_h)]^{-1} = 1 - \mathfrak{M}'_{hh}(\varepsilon_h) \\ A_{h'h} &= [1 + \mathfrak{M}'_{h'h}(\varepsilon_{h'})]^{-1} \mathfrak{M}'_{h'h}(\varepsilon_{h'}) G_h^0(\varepsilon_{h'}) \\ &= \mathfrak{M}_{h'h}(\varepsilon_{h'}) G_h^0(\varepsilon_{h'}) \quad (h' \neq h) \end{aligned} \right\}, \quad (36)$$

$\bar{P}_{h'h}$ 表示 $M^-(\omega)$ 的极点的贡献. 因此对于 $G_{h'h}(t < 0)$, $M^{off}(\omega)$ 与 $M^{on}(\omega)$ 可分别定义为 $M^-(\omega)$ 与 $[M(\omega) - M^-(\omega)]$.

三、单粒格林函数的非主部

按式 (16) 选择 \mathbf{u} 不仅可简化单粒格林函数主部的表达式, 也可使其非主部有所简化. 由于 § 2 中的论据同样适用于求非主部, 这里将只对有关的推导作一些简短的注记. 先考虑 $G_{p'p}(t < 0)$. 为了叙述方便, 让我们计算 $G_{p'p}^0(t < 0)$:

$$G_{p'p}^{(3)}(t < 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} d\omega e^{-i\omega t} G_{p'}^0(\omega) \sum_{\gamma\delta} [u_{p'\gamma} - M_{p'\gamma}(\omega)] \times G_{\gamma}^0(\omega) [u_{\gamma\delta} - M_{\gamma\delta}(\omega)] G_{\delta}^0(\omega) [u_{\delta p} - M_{\delta p}(\omega)] G_p^0(\omega). \quad (37)$$

显然, 只有 $M^-(\omega)$ 以及 $G_{\gamma}^0(\omega)$ 与 $G_{\delta}^0(\omega)$ 的极点可能对 $G_{p'p}^{(3)}(t < 0)$ 有贡献. 容易看出, 由于按式 (16) 选择了 \mathbf{u} , G_{γ}^0 与 G_{δ}^0 的极点 ($\gamma \neq \delta$ 时的单重极点与 $\gamma = \delta$ 时的双重极点) 的贡献均等于零, 因此实际上只有 $M^-(\omega)$ 的极点有贡献, 即

$$G_{p'p}^{(3)}(t < 0) = \bar{P}_{p'p}^{(3)}.$$

很明显, 以上结论也适用于其它的 $G_{p'p}^{(n)}(t < 0)$. 这说明, 我们严格地有

$$G_{p'p}(t < 0) = \bar{P}_{p'p}, \quad (38)$$

其中 $\bar{P}_{p'p}$ 表示来自 $M^-(\omega)$ 的极点的贡献. 如果后者可以忽略, 就有 $G_{p'p}(t < 0) \approx 0$; 否则必须对 $G_{p'p}(t < 0)$ 进行具体的计算. 但是, 在求得了主部 $G_{p'p}(t > 0)$ 与 $G_{h'h}(t < 0)$

后, 还可使 $G_{p'p}(t < 0)$ 的具体计算得到简化. 例如, 对应于图 (4a) 可以引进图 (4b), 而计算了后者就相当于对无穷多个以 $G_{\alpha\beta}^0(t)$ 为基底、以图 4(a) 为骨架的费曼图进行了求和.

显然, 以上讨论对其它非主部同样适用. 因此, 下面将只简单地写下有关的结果.

对于 $G_{h'h}(t > 0)$ 有

$$G_{h'h}(t > 0) = P_{h'h}. \quad (39)$$

对于 G 的粒子-空穴分量, 结果为

$$\left. \begin{aligned} G_{ph}(t > 0) &= [1 + \mathfrak{M}'_{pp}(\varepsilon_p)]^{-1} \mathfrak{M}_{ph}(\varepsilon_p) G_h^0(\varepsilon_p) e^{-t\varepsilon_p} + P_{ph} \\ &= \mathfrak{M}_{ph}(\varepsilon_p) G_h^0(\varepsilon_p) e^{-t\varepsilon_p} + P_{ph} \end{aligned} \right\}, \quad (40)$$

$$G_{ph}(t < 0) = \bar{P}_{ph}$$

对于 $G_{hp}(t)$, 我们得到

$$\left. \begin{aligned} G_{hp}(t > 0) &= P_{hp} \\ G_{hp}(t < 0) &= -[1 + \mathfrak{M}'_{hh}(\varepsilon_h)]^{-1} \mathfrak{M}_{hp}(\varepsilon_h) G_p^0(\varepsilon_h) e^{-t\varepsilon_h} + \bar{P}_{hp} \\ &= -\mathfrak{M}_{hp}(\varepsilon_h) G_p^0(\varepsilon_h) e^{-t\varepsilon_h} + \bar{P}_{hp} \end{aligned} \right\}, \quad (41)$$

式中 $P_{\alpha\beta}$ 与 $\bar{P}_{\alpha\beta}$ 分别表示来自 $M^+(\omega)$ 与 $M^-(\omega)$ 的极点的贡献. 以上结果和文 [I] 一致, 但是对 $P_{\alpha\beta}$ 与 $\bar{P}_{\alpha\beta}$ 这里却作了一点补充说明, 即它们已分别由 $M^{\pm}(\omega)$ 的极点所确定, 中间费米线 $G_{\alpha}^0(\omega)$, $G_{\beta}^0(\omega)$, \dots 的极点对它们没有贡献. 注意, $G_{\alpha\beta}(t)$ 相对于脚标 α 与 β 明显不对称, 这显然是由于式 (16) 中 $u_{\alpha\beta}$ 相对于 α 与 β 不对称而引起的.

四、粒子-空穴格林函数的重整化无规位相近似

为了阐明式 (22) 与 (35) 的应用, 作为举例, 本节将考虑粒子-空穴格林函数的重整化无规位相近似 (RRPA). 这里 RRPA 是指, 我们将不仅考虑全部既朝前又向后传播的 RPA 气泡串, 同时还将顾及 G 矩阵的偏离能壳性以及粒子与空穴线的重整化 [参看图 5, 其中括号内的图为一交换图. 为了简单, 交换图没有一一画出]. 图 5 中的双线表示以

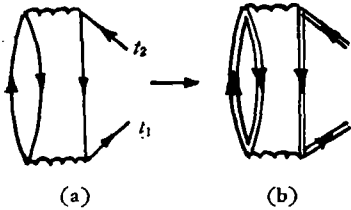


图4 应用 $G_{p'p}(t > 0)$ 与 $G_{h'h}(t < 0)$ 简化 $G_{p'p}(t < 0)$ 计算的示意图

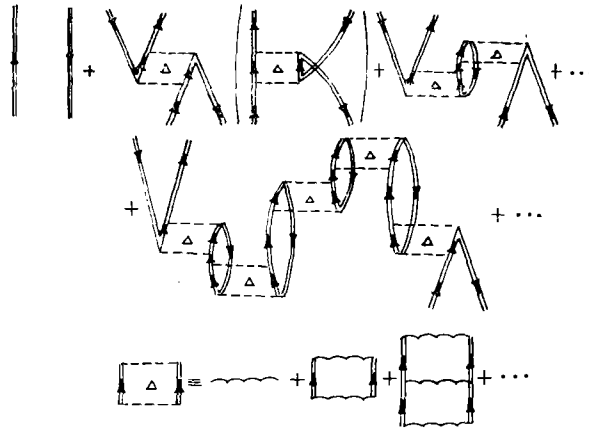


图 5 粒子-空穴 Green 数的重整化无规位相近似

$G_{\alpha\beta}(t)$ 代替 $G_{\alpha\beta}^0(t)$, 但将假定, $G_{\alpha\beta}(t)$ 可近似地取为

$$G_{\alpha\beta}(t_1 - t_2) \simeq \begin{cases} (1 - n_\alpha) A_\alpha e^{-i\varepsilon_\alpha(t_1 - t_2)} \delta_{\alpha\beta}, & t_1 > t_2; \\ -n_\alpha A_\alpha e^{-i\varepsilon_\alpha(t_1 - t_2)} \delta_{\alpha\beta}, & t_1 < t_2. \end{cases} \quad (42)$$

其中 A_α ($\equiv A_{\alpha\alpha}$) 的表达式见式 (32) 与 (36), n_α 的取值如下

$$n_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{如果 } \alpha = p; \\ 1, & \text{如果 } \alpha = h. \end{cases}$$

但它的含意却不是填充数, 引进它只是为了标志粒子态与空穴态. 注意, 式 (42) 中除假定了 $P_{\alpha\beta}$ 与 $\bar{P}_{\alpha\beta}$ [即 $M^{off}(\omega)$ 的极点的贡献] 可以忽略外, 还做了以下近似: $A_{p'p} \simeq \delta_{p'p} A_p$, $A_{h'h} \simeq \delta_{h'h} A_h$. 不过后者并不是必须的, 不做这个近似, 相应的计算式也不难求, 然而有关的表达式却过于冗长, 这里就不写出了. 为了便于供数值计算时参考, 同时也由于所得表达式相当简单, 对于重整化的 G 矩阵没有做 $A_{p'p} \simeq \delta_{p'p} A_p$ 的近似. 下面将以 $G_R(\alpha\beta, \gamma\delta; t_1 - t_2)$ 表示 RRPA 的粒子-空穴格林函数. 应用 [14] 中的方法并注意到以下关系

$$\left. \begin{aligned} G_p(t_1 - t_3) &= \frac{1}{A_p} G_p(t_1 - t_2) G_p(t_2 - t_3), & t_1 > t_2 > t_3; \\ G_h(t_1 - t_3) &= -\frac{1}{A_h} G_h(t_1 - t_2) G_h(t_2 - t_3), & t_1 < t_2 < t_3. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

容易求得, G_R 满足以下积分方程:

$$\begin{aligned} G_R(\alpha\beta, \gamma\delta; t_1 - t_2) &= -\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} G_\alpha(t_1 - t_2) G_\beta(t_2 - t_1) \\ &+ \sum_{\eta\theta} \iint_{-\infty}^{\infty} d\sigma_1 d\sigma_2 G_\alpha(t_1 - \sigma_1) G_\beta(\sigma_1 - t_1) \Gamma_R(\alpha\beta, \eta\theta; \sigma_1 - \sigma_2) \\ &\times G_R(\eta\theta, \gamma\delta; \sigma_2 - t_2) \\ &= G_R^{(0)}(\alpha\beta, \gamma\delta; t_1 - t_2) + G_R^{(1)}(\alpha\beta, \gamma\delta; t_1 - t_2) + \dots \end{aligned} \quad (44)$$

式中 $G_R^{(n)}$ 表示 $O(\Gamma_R^n)$ 的近似项,

$$\Gamma_R(\alpha\beta, \eta\theta; \sigma_1 - \sigma_2) = t v_{\alpha\theta, \beta\eta} \delta(\sigma_1 - \sigma_2) + Q_R(\alpha\theta, \beta\eta; \sigma_1 - \sigma_2) \quad (45)$$

除 p 与 h 外, 下面还将分别以 $mnqrs$ 与 ij 表示粒子与空穴态, Q_R 的表达式为

$$Q_R(mj, in; \sigma_1 - \sigma_2)$$

$$= \frac{1}{A_i} G_i(\sigma_2 - \sigma_1) W_R(mj, in; \sigma_1 - \sigma_2) \frac{1}{A_j} G_j(\sigma_2 - \sigma_1), \quad (46-1)$$

$$\begin{aligned} & Q_R(mn, ij; \sigma_1 - \sigma_2) \\ &= \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \frac{1}{A_i} G_i(\sigma - \sigma_1) W_R(mn, ij; \sigma_1 - \sigma) \frac{1}{A_j} G_j(\sigma - \sigma_1), \end{aligned} \quad (46-2)$$

$$\begin{aligned} & Q_R(ij, mn; \sigma_1 - \sigma_2) \\ &= \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \frac{1}{A_i} G_i(\sigma_2 - \sigma) W_R(ij, mn; \sigma - \sigma_2) \frac{1}{A_j} G_j(\sigma_2 - \sigma), \end{aligned} \quad (46-3)$$

$$\begin{aligned} & Q_R(in, mj; \sigma_1 - \sigma_2) \\ &= \frac{1}{A_i} G_i(\sigma_1 - \sigma_2) W_R(in, mj; \sigma_2 - \sigma_1) \frac{1}{A_j} G_j(\sigma_1 - \sigma_2), \end{aligned} \quad (46-4)$$

其中

$$\begin{aligned} & W_R(\alpha\theta, \beta\eta; \sigma_1 - \sigma_2) \\ &= \sum_{r < s} \sum_{r' < s'} v_{\alpha\theta, rs} Q_R^+(rs, r's'; \sigma_1 - \sigma_2) v_{r's', \beta\eta}. \end{aligned} \quad (47)$$

Q_R^+ 为粒子-粒子格林函数的 RTDA (重整化的 Tamm-Dancoff 近似), 它满足以下积分方程:

$$\begin{aligned} & Q_R^+(rs, r's'; t_1 - t_2) = Q_R^0(rs, r's'; t_1 - t_2) \\ & - \sum_{p < q} \sum_{p' < q'} \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma Q_R^0(rs, pq; t_1 - \sigma) \varepsilon v_{pq, p'q'} \\ & \times Q_R^+(p'q', r's'; \sigma - t_2), \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} & Q_R^0(rs, r's'; t_1 - t_2) = G_{rr'}(t_1 - t_2) G_{s's'}(t_1 - t_2) \\ & - G_{rr'}(t_1 - t_2) G_{s's'}(t_1 - t_2). \end{aligned} \quad (49)$$

由式(44)的迭代解不难看出, $G_R(\alpha\beta, \gamma\delta; t_1 - t_2)$ 的确等于图5所示全部费曼图之和. 容易求得, 式(44)的傅氏变换为:

$$\begin{aligned} & G_R(\alpha\beta, \gamma\delta; \omega) = -G_R^0(\alpha\beta, \gamma\delta; \omega) \\ & + \sum_{\rho\lambda, \eta\theta} G_R^0(\alpha\beta, \rho\lambda; \omega) F_R(\rho\lambda, \eta\theta; \omega) G_R(\eta\theta, \gamma\delta; \omega), \end{aligned} \quad (50)$$

其中

$$\begin{aligned} & G_R^0(\alpha\beta, \gamma\delta; \omega) = \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} G_R^0(\alpha\beta; \omega) \\ & = \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \left[\frac{(1 - n_\alpha) n_\beta A_\alpha A_\beta}{\omega - \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + i\eta} - \frac{n_\alpha (1 - n_\beta) A_\alpha A_\beta}{\omega - \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta - i\eta} \right]. \end{aligned} \quad (51)$$

F_R 的表达式如下:

$$\begin{aligned} & F_R(mi, nj; \omega) = v_{mj, in} - W_R(mj, in; \omega + \varepsilon_i + \varepsilon_j) \\ & = G_{RB}(mj, in; \omega + \varepsilon_i + \varepsilon_j), \end{aligned} \quad (52-1)$$

$$\begin{aligned} & F_R(mi, jn; \omega) = v_{mn, ij} - W_R(mn, ij; \varepsilon_i + \varepsilon_j) \\ & = G_{RB}(mn, ij; \varepsilon_i + \varepsilon_j), \end{aligned} \quad (52-2)$$

$$\begin{aligned} & F_R(im, nj; \omega) = v_{ij, mn} - W_R(ij, mn; \varepsilon_i + \varepsilon_j) \\ & = G_{RB}(ij, mn; \varepsilon_i + \varepsilon_j), \end{aligned} \quad (52-3)$$

$$\begin{aligned} F_R(im, jn; \omega) &= v_{in, mj} - W_R(in, mj; -\omega + \varepsilon_i + \varepsilon_j) \\ &= G_{RB}(in, mj; -\omega + \varepsilon_i + \varepsilon_j). \end{aligned} \quad (52-4)$$

根据上式, G_{RB} 的定义为

$$\begin{aligned} G_{RB}(\rho\lambda, \eta\theta; \omega) &= v_{\rho\lambda, \eta\theta} - W_R(\rho\lambda, \eta\theta; \omega) \\ &= v_{\rho\lambda, \eta\theta} - \sum_{r < s} \sum_{r' < s'} v_{\rho\lambda, rs} Q_R^+(rs, r's'; \omega) v_{r's', \eta\theta}. \end{aligned} \quad (53)$$

因为按式(48)有

$$\begin{aligned} Q_R^+(rs, r's'; \omega) &= Q_R^0(rs, r's'; \omega) \\ &- \sum_{p < q} \sum_{p' < q'} Q_R^0(rs, pq; \omega) v_{pq, p'q'} Q_R^+(p'q', r's'; \omega), \end{aligned} \quad (54)$$

其中

$$\begin{aligned} Q_R^0(rs, r's'; \omega) &= -(1 - n_r)(1 - n_s)(1 - n_{r'}) (1 - n_{s'}) \\ &\times \left[\frac{A_{rr'} A_{ss'} - A_{rs'} A_{sr'}}{\omega - \varepsilon_r - \varepsilon_s + \varepsilon_{r'}} \right], \end{aligned} \quad (55)$$

所以由式(53)我们得到

$$G_{RB}(\omega) = v - v Q_R^0(\omega) G_{RB}(\omega). \quad (56)$$

上式说明, $G_{RB}(\omega)$ 就是顾及了单粒传播子的重整化的 Brueckner G 矩阵.

显然, 为了求式(52)也可以采取以下更简便的方法. 应用摄动理论可以很容易地直接算出 $G_R^{(1)}(\alpha\beta, \gamma\delta; \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ [参看式(44)] 与 $G_R^{(1)}(\alpha\beta, \gamma\delta; \omega)$, 再应用以下关系:

$$G_R^0(\alpha\beta; \omega) F_R(\alpha\beta, \gamma\delta; \omega) G_R^0(\gamma\delta; \omega) = -G_R^{(1)}(\alpha\beta, \gamma\delta; \omega)$$

就可立即求得 $F_R(\alpha\beta, \gamma\delta; \omega)$.

大家熟知, 由式(50)可以导得以下本征方程:

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}_\lambda - \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) \langle \Psi_0 | \xi_\beta^\dagger \xi_\alpha | \Psi_\lambda \rangle \\ = [(1 - n_\alpha) n_\beta - n_\alpha (1 - n_\beta)] A_\alpha A_\beta \sum_{\eta\theta} F_R(\alpha\beta, \eta\theta; \mathcal{E}_\lambda) \langle \Psi_0 | \xi_\theta^\dagger \xi_\eta | \Psi_\lambda \rangle. \end{aligned} \quad (57)$$

不难看出, 这本征方程不仅顾及了粒子与空穴线的重整化而且还顾及了 G 矩阵的偏离能壳性及其重整化.

我们注意, 由于顾及了 G 矩阵的偏离能壳性, 式(52-1) 与(52-4) 右端所含 ω 相差一个符号. 因为 $\mathcal{E}_\lambda = E_\lambda - E_0 > 0 (\lambda \neq 0)$, 所以

$$|\varepsilon_r + \varepsilon_s + \mathcal{E}_\lambda - \varepsilon_i - \varepsilon_j|^{-1} < |\varepsilon_r + \varepsilon_s - \mathcal{E}_\lambda - \varepsilon_i - \varepsilon_j|^{-1}.$$

按照式(52—55) 这说明, 上述符号差别可能会自然地反向传播的声子产生一种阻尼效应, 从而构成一个排除 RPA 声子崩溃现象的因素. 迄今的 RPA 计算都没有顾及 G 矩阵的偏离能壳性. 由前一文^[4] 以及本文所导得的公式我们看到, 顾及这一效应的具体计算并不十分复杂, 因此, 通过具体计算以确切了解这一效应的物理内容是一个值得进一步考虑的问题.

参 考 资 料

- [1] P. J. Ellis, E. Osnes, *Phys. Lett.*, **41B** (1972), 97.
 [2] B. H. Brandow, *Phys. Rev.*, **152** (1966), 863; *Ann. of Phys.*, **57** (1970), 214.

- [3] M. W. Kirson, *Nucl. Phys.*, **A115** (1968), 49; **A139** (1969), 57.
 [4] R. L. Becker, K. T. R. Davies, M. R. Patterson, *Phys. Rev.*, **C9** (1974), 1221.
 [5] R. W. Jones, F. Mohling, *Nucl. Phys.*, **A151** (1970), 420.
 [6] A. Klein, *Phys. Rev.*, **121** (1960), 950.
 [7] R. W. Jones, F. Mohling, R. L. Becker, *Nucl. Phys.*, **A220** (1974), 45.
 [8] 吴式枢, 物理学报, **25** (1976), 433.
 [9] M. W. Kirson, *Ann. of Phys.*, **66** (1971), 624; **82** (1974), 345.
 [10] 李政道、杨振宁, *Phys. Rev.*, **117** (1960), 22.
 [11] S. Ethofer, P. Schuck, *Z. Physik*, **228** (1969), 264.
 [12] 吴式枢, 物理学报, **22** (1966), 377.
 [13] P. Schuck, F. Villars, P. Ring, *Nucl. Phys.*, **A208** (1973), 302.
 [14] 吴式枢, 中国科学, 1973, **3**, 255; 1974, **5**, 471.

ON NUCLEAR SINGLE-PARTICLE POTENTIALS (II) THE NONHERMITIAN CHOICE

Wu Shi-shu

(Department of Physics, Jilin University)

ABSTRACT

The cancellation properties of the nonhermitian single-particle (SP) potential $u_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}(\epsilon_\beta)$ [or $M_{\alpha\beta}(\epsilon_\alpha)$] according to the principle of maximal cancellation of perturbation diagrams are investigated in detail. The mass operator $M_{\alpha\beta}(\omega)$ is separated into two parts $M_{\alpha\beta}^{\text{on}}(\omega)$ and $M_{\alpha\beta}^{\text{off}}(\omega)$ as usual, however, a new criterion for their definition will be proposed. It is shown that the exact mass operator insertion is equal to the sum of the following three types of terms:

- (1) terms contributed by the poles of $M_{\alpha\beta}^{\text{off}}(\omega)$. They are truly non-factorizable and must be considered separately,
- (2) terms which can be cancelled to all orders by the nonhermitian choice $u_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta}(\epsilon_\beta)$ [or $M_{\alpha\beta}(\epsilon_\alpha)$]. Hence, they serve to define $u_{\alpha\beta}$,
- (3) the remaining terms, which can be summed to all orders in a simple way and may be interpreted as amplitude renormalization of the SP Green function.

In order to illustrate the usefulness of the above results, we have considered the renormalized random phase approximation (RRPA) for the particle-hole Green function as an example. Related formulae are derived. In RRPA, not only the SP propagator renormalization which includes all the effects except those contributed by the poles of $M_{\alpha\beta}^{\text{off}}(\omega)$, but also the off energy shell property of the G matrix elements have been taken into account.