

# 胶子到重夸克偶素的碎裂函数抽取问题讨论\*

戚伟<sup>1,2</sup> 乔从丰<sup>1</sup> 王建雄<sup>2</sup>

1 (中国科学院研究生院 北京 100049)

2 (中国科学院高能物理研究所 北京 100049)

**摘要** 分析胶子到重夸克偶素的碎裂函数使用中, 不同动量分数  $z$  的定义所带来的不确定性, 用数值方法计算了常用的非协变  $z$  定义所给出的有限胶子动量下  $g \rightarrow J/\psi$  的初始碎裂函数  $D_{g \rightarrow J/\psi}(z, Q_0)$ , 发现非协变定义给出的碎裂函数对胶子动量  $\mathbf{k}$  有较大的依赖性. 当  $|\mathbf{k}| \rightarrow \infty$  时, 相应碎裂函数趋于光锥定义下的碎裂函数; 但  $\mathbf{k}$  较小时 (如在加速器 Tevatron 和 LHC 上产生胶子的典型能动量范围内), 按非协变形式定义和使用碎裂函数会给计算带来较大的不确定性.

**关键词** 胶子碎裂函数 重夸克偶素 不确定性

碎裂是指在某过程中具有较大横动量的部分子形成含有特定强子喷注的过程. 胶子碎裂成重夸克偶素的过程虽然形式上属于  $\alpha_s$  的高阶过程, 但是在横动量时会起主要作用, 因此碎裂是强子对撞机上重夸克偶素产生的重要机制<sup>[1-3]</sup>. 一般讲, 重夸克偶素 H 的碎裂产生过程  $A+B \rightarrow H(p_T)+X$  的微分截面可以表示为

$$d\sigma(A+B \rightarrow H(p_T)+X) = \sum_{a,b,c} \int_0^1 dx_a \int_0^1 dx_b \int_0^1 dz f_{a/A}(x_a, Q) \times f_{b/B}(x_b, Q) d\hat{\sigma}(a+b \rightarrow c+X) D_{c \rightarrow H}(z, Q), \quad (1)$$

其中  $a, b$  是入射强子 A, B 中的部分子;  $f_{a/A}$  和  $f_{b/B}$  是相应能标  $Q^2$  下的部分子分布函数;  $D_{c \rightarrow H}(z, Q)$  是在能标为  $Q^2$  时部分子  $c$  碎裂为 H 的碎裂函数. 能标  $Q^2$  处的碎裂函数可由初始能标  $Q_0^2$  的碎裂函数通过 Altarelli-Parisi 方程

$$Q \frac{\partial}{\partial Q} D_{i \rightarrow H}(z, Q) = \sum_j \int_z^1 \frac{dy}{y} P_{ij}(z/y, Q) D_{j \rightarrow H}(y, Q), \quad (2)$$

演化得到. 其中  $P_{ij}$  是部分子  $i$  到部分子  $j$  的劈裂 (splitting) 函数. 胶子的初始碎裂函数  $D_{g \rightarrow H}(z, Q_0)$  是在胶子无穷大动量系中通过因子化方法得到的一个普适函

数. 它也可以在有限动量坐标系下用微扰 QCD 的方法通过计算特定物理过程而得到<sup>[3]</sup>. 在实际计算过程中, 以平动 (boost) 不变的形式 [如式 (3), (4)] 定义的变量  $z$ , 所得的结果与无穷大动量系下的结果一致, 并不依赖于碎裂胶子的动量.

$$z = \frac{E^H + p_z^H}{E^g + p_z^g}, \quad (3)$$

$$z = \frac{p_z^g \cdot p^H}{(p^g)^2}, \quad (4)$$

上式中取碎裂胶子的动量方向为  $Z$  方向.  $E^H, p_z^H$  分别是末态重夸克偶素能动量的  $Z$  分量;  $E^g, p_z^g$  是碎裂胶子的能量及动量的  $Z$  分量. 其中式 (3) 为光锥系下  $z$  的定义形式.

在使用碎裂函数时, 由于式 (3), (4) 的形式涉及末态重夸克偶素的横向 (即垂直于碎裂胶子动量方向) 动量而在具体使用时操作起来不是很方便, 故常近似的采用以下几种非协变形式的定义

$$z = \frac{\sqrt{M_H^2 + (p_z^H)^2}}{E^g}, \quad (5)$$

$$z = \frac{\sqrt{M_H^2 + (p_z^H)^2} + p_z^H}{E^g + p_z^g}, \quad (6)$$

$$z = \frac{p_z^H}{p_z^g}. \quad (7)$$

2006-12-22 收稿

\* 国家自然科学基金 (10491306, 10521003, 90303005, 104750831) 和中国科学院研究生院科研启动基金 (055101BM03) 资助

当  $|\mathbf{k}| \rightarrow \infty$  时, 这些非协变定义与光锥系定义(3)等价. 但当胶子的动量有限时, 以上的非协变定义会给计算带来不确定性. 另外, 式(5)可以表示成

$$|p_z^H| = \sqrt{(zE^g)^2 - M_H^2}, \quad (8)$$

对于给定的  $z$  值, 对应大小相同方向相反的两种末态重夸克偶素动量, 使用这种定义时应考虑二者各占一定的几率. 而式(6)虽然对于给定的  $z$ , 重夸克偶素的动量  $p_z^H$  是惟一确定的, 但当  $z$  值较小时,  $p_z^H$  可能与碎裂胶子反向, 这种情况与碎裂函数的思想不符. 因此与式(7)形式的定义相比, 式(5), (6)形式的定义不便于碎裂函数的应用. 下面通过微扰QCD的方法, 用以上3种关于  $z$  的非协变定义来计算有限胶子动量下  $g \rightarrow J/\psi$  的初始碎裂函数  $D_{g \rightarrow J/\psi}(z, M_{J/\psi})$ , 并将它们与用光锥系定义(3)式计算所得碎裂函数进行比较, 从而分析这些非协变定义的使用所带来的不确定性.

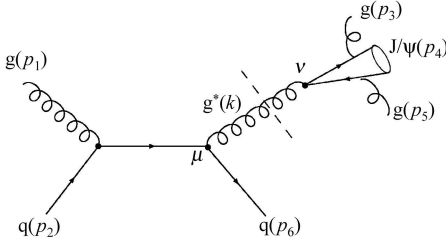


图1  $qg \rightarrow qg^* \rightarrow J/\psi gg$  的Feynman图

考虑如图1所示的  $qg \rightarrow qg^* \rightarrow J/\psi gg$  过程. 该过程的矩阵元可以成为两部分: (1) 动量为  $k$ , 不变质量为  $\sqrt{s}$  的虚胶子  $g^*$  的产生; (2) 虚胶子  $g^*$  衰变为  $J/\psi$  和两个实胶子, 即

$$\mathcal{M} = M_1^\mu \left( \frac{g_{\mu\nu}}{k^2} \right) M_2^\nu = - \sum_\lambda M_1^\mu \varepsilon_\mu(\lambda) \frac{1}{k^2} M_2^\nu \varepsilon_\nu^*(\lambda), \quad (9)$$

其中  $M_1^\mu \varepsilon_\mu(\lambda)$  为虚胶子产生部分,  $M_2^\nu \varepsilon_\nu^*(\lambda)$  为虚胶子衰变部分. 上式中使用了

$$g_{\mu\nu} = - \sum_\lambda \varepsilon_\mu(\lambda) \varepsilon_\nu^*(\lambda), \quad (10)$$

其中  $\varepsilon_\mu(\lambda)$  表示胶子的极化矢量,  $\lambda$  为极化指标. 则图1所示过程的微分截面可表示为

$$d\sigma = |\mathcal{M}|^2 [d\phi] = \int d^3k \frac{d\hat{\sigma}(qg \rightarrow qg^*)}{d^3k} \times \int_{M_{J/\psi}^2}^{\infty} ds \frac{d\Gamma(g^* \rightarrow J/\psi gg)}{\pi s \sqrt{s}}, \quad (11)$$

其中

$$d\hat{\sigma}(qg \rightarrow qg^*) = \delta^4(p_1 + p_2 - k - p_6) \times \sum_\lambda |M_1|_{\lambda\lambda}^2 [d\phi_1] \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2E_g}, \quad (12)$$

$$d\Gamma(g^* \rightarrow J/\psi gg) = \frac{(2\pi)^4}{2\sqrt{s}} \delta^4(k - p_3 - p_4 - p_5) \times \left( \frac{1}{2} \sum_\lambda |M_2|_{\lambda\lambda}^2 [d\phi_2] \right), \quad (13)$$

$$[d\phi] = [d\phi_1] [d\phi_2], \quad (14)$$

$$[d\phi_1] = \frac{d^3p_6}{(2\pi)^3 2E_6}, \quad (15)$$

$$[d\phi_2] = \prod_{i=3,4,5} \frac{d^3p_i}{(2\pi)^3 2E_i}. \quad (16)$$

在公式(12), (13)的极化求和中只显示地写出了对胶子的极化求和, 而隐去了对其他末态粒子的极化求和及对初态粒子的极化求平均. 胶子的初始碎裂函数可表示为

$$\int_0^1 dz D_{g \rightarrow J/\psi}(z, M_{J/\psi}) = \int dp_{4z} \int_{M_{J/\psi}^2}^{\infty} \frac{ds}{\pi s \sqrt{s}} \int \frac{d\Gamma(g^* \rightarrow J/\psi gg)}{dp_{4z}}. \quad (17)$$

通过代入  $z$  的不同定义, 由上式可以得出相应的有限动量下的碎裂函数. 按照式(3)和(4)的定义, 相应的碎裂函数与虚胶子动量无关; 而按式(5), (6)和(7)的定义, 所对应的碎裂函数将依赖于虚胶子动量. 在碎裂胶子的无穷大动量系, 可以解析地得到胶子到重夸克偶素的碎裂函数. 而在有限动量时, 使用数值计算的方法也可以得出给定虚胶子动量下, 碎裂函数在相应  $z$  定义下的分布.

图2是使用FDC(Feynman Diagram Calculation)系统<sup>[4]</sup>, 通过数值方法计算出的, 平动不变定义(3)式和洛伦兹协变定义(4)式下相应的初始能标碎裂函数. 它们不依赖于虚胶子的动量, 所以在数值计算中虚胶子动量取任意值所得结果相同. 图中光锥系定义(3)式给出的碎裂函数与Braaten等得到的结果一致<sup>[3]</sup>; 式(4)对应碎裂函数与文献[5]给出的结果一致. 图3, 4是相同方法下算出的, 非协变定义(5), (6)式对应的初始碎裂函数. 从图上可以看出, 碎裂函数依赖于虚胶子的动量  $|\mathbf{k}|$ . 当虚胶子动量  $|\mathbf{k}| \rightarrow \infty$  时, 碎裂函数趋于光锥系碎裂函数. 当虚胶子动量有限时, 存在一定的几率使末态  $J/\psi$  的动量与虚胶子动量反向, 且该几率与虚胶子动量大小成反比, 因此在图3, 4中  $z$  值较小处存在较大的峰, 从而将给碎裂函数的应用带来较大的不确定性. 图5是式(7)对应的不同虚胶子动量下的碎裂函数. 图中给出的是在  $-1 \leq z \leq 2$  范围内的碎

裂函数分布. 通常我们讲碎裂粒子的动量分数  $z$  的取值范围应为  $[0, 1]$ , 那是在无穷大动量系下的取值范围. 而在定义 (7) 式下  $z$  取值超出此范围是因为在虚胶子动量有限时,  $J/\psi$  的动量方向可能沿虚胶子动量的反方向, 故存在  $z < 0$  的情况; 另外由于虚胶子具有质量, 故有  $z > 1$  的情况. 由图可见, 当虚胶子动量  $|k| \rightarrow \infty$  时, 碎裂函数趋于光锥系碎裂函数. 当虚胶子动量取 5, 10, 20, 80 和 1280 GeV 时, 在  $[0, 1]$  区间内式 (7) 对应碎裂函数的积分值与光锥系碎裂函数的积分值之比分别约为 0.49, 0.65, 0.77, 0.91, 0.97. 可见虚胶子动量越小,  $J/\psi$  的动量与虚胶子动量反向的几率越大. 因此, 在胶子动量较小时, 按此定义使用碎裂函数会带来大的不确定性. 当胶子的能量大于 80 GeV 时, 按 (7) 定义给出的数值结果的不确定性将小于 10%.

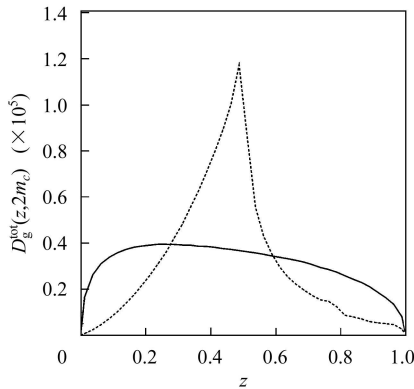


图 2  $z$  的平动不变形式的定义式 (3) [实线] 和式 (4) [虚线] 对应的碎裂函数

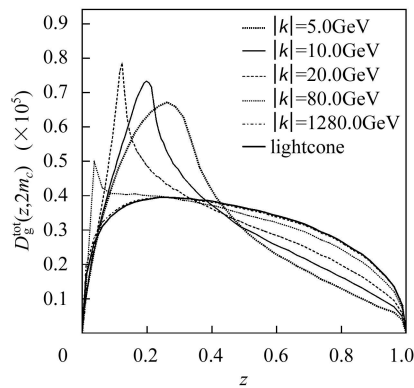


图 3 不同的虚胶子动量下,  $z$  的非协变定义式 (5) 对应的碎裂函数

综上所述, 虽然  $z$  的平动不变形式的定义式 (3) 和洛伦兹协变形式的定义式 (4) 对应碎裂函数与胶子无穷大动量坐标系下的碎裂函数等价而不依赖于胶子动

量, 但由于这些定义涉及胶子的横向动量, 因此在实际使用碎裂函数时这样的定义形式不便于操作, 而常近似地采用如式 (5), (6), (7) 所示的非协变形式的定义. 当胶子动量  $|k| \rightarrow \infty$  时, 它们与光锥系定义式 (3) 等价. 但是当胶子动量较小时, 从以上计算可知, 这些非协变定义会给碎裂函数的使用带来较大的不确定性. 另外, 由于按式 (5), (6) 的定义,  $J/\psi$  动量与胶子动量反向的情况也包含在区间  $0 \leq z \leq 1$  内, 因此也不方便应用; 而式 (7) 的形式, 虽然在  $0 \leq z \leq 1$  区间内  $J/\psi$  的动量与胶子动量始终同向, 便于应用, 但在现有加速器 (如 Tevatron 及 LHC) 产生胶子的典型能能量范围内 (约 4—20 GeV 左右), 它对应的碎裂函数与光锥系碎裂函数有较大差异, 故按这种定义应用碎裂函数所产生的不确定性是很大的. 综合以上讨论可见, 在现有加速器产生胶子的典型能能量范围内, 用  $z$  的非协变定义来应用碎裂函数, 必须考虑可能产生的较大不确定性.

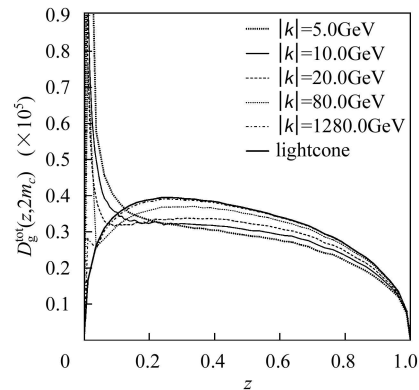


图 4 不同的虚胶子动量下,  $z$  的非协变定义式 (6) 对应的碎裂函数

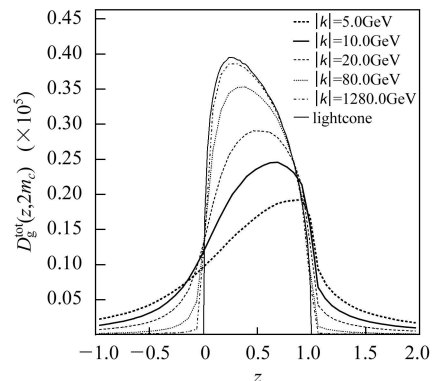


图 5 不同的虚胶子动量下,  $z$  的非协变定义式 (7) 对应的碎裂函数

## 参考文献(References)

- 1 Braaten E, Doncheski M A, Fleming S. Phys. Lett., 1994, **B333**: 548
- 2 Braaten E, Fleming S, YUAN T C. Ann. Rev. Nucl. Part. Sci., 1996, **46**: 197
- 3 Braaten E, YUAN T C. Phys. Rev. Lett., 1993, **71**: 1673
- 4 WANG J X. Nucl. Instrum. Methods, 2004, **A534**: 241
- 5 QIAO C F, YUAN F, CHAO K T. Phys. Rev., 1997, **D55**: 5437

## On the Application of Gluon to Heavy Quarkonium Fragmentation Function<sup>\*</sup>

QI Wei<sup>1,2</sup> QIAO Cong-Feng<sup>1</sup> WANG Jian-Xiong<sup>2</sup>

1 (Graduate University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China)

2 (Institute of High Energy Physics, CAS, Beijing 100049, China)

**Abstract** We analyze the uncertainties induced by different definitions of the momentum fraction  $z$  in the application of gluon to heavy quarkonium fragmentation function. We numerically calculate the initial  $g \rightarrow J/\psi$  fragmentation functions by using the non-covariant definitions of  $z$  with finite gluon momentum and find that these fragmentation functions have strong dependence on the gluon momentum  $\mathbf{k}$ . As  $|\mathbf{k}| \rightarrow \infty$ , these fragmentation functions approach to the fragmentation function in the light-cone definition. We find that when  $|\mathbf{k}|$  is small (for instance in the typical energy scale (about 4–20 GeV) of the gluon production at the hadron colliders, such as Tevatron and LHC), large uncertainty remains while the in-covariant definitions of  $z$  are employed in the application of the fragmentation functions.

**Key words** gluon fragmentation function, heavy quarkonium, uncertainty

---

Received 22 December 2006

<sup>\*</sup> Supported by National Natural Science Foundation of China (10491306, 10521003, 90303005, 104750831) and Scientific Research Fund of GUCAS (055101BM03)